带多丢包和滞后随机不确定系统的最优线性估计

李 娜[1] 马 静[2] 孙书利[1]

摘 要 研究了带多丢包和滞后网络化随机不确定系统的最优线性估计问题. 通过白色乘性噪声来描述系统参数的随机不确定性. 通过一组满足 Bernoulli 分布的随机变量来描述数据传输过程中发生的丢包和滞后现象. 应用新息分析方法, 设计了线性最小方差意义下的最优线性估值器, 包括滤波器, 预报器和平滑器. 给出了稳态估值器存在的一个充分条件. 仿真例子验证了其有效性.

关键词 乘性噪声, 丢包, 随机滞后, 最优线性估计, 新息分析方法

引用格式 李娜, 马静, 孙书利. 带多丢包和滞后随机不确定系统的最优线性估计. 自动化学报, 2015, **41**(3): 611−619

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140484

Optimal Linear Estimation for Stochastic Uncertain Systems with Multiple Packet Dropouts and Delays

LI Na[1] MA Jing[2] SUN Shu-Li[1]

Abstract This paper is concerned with the optimal linear estimation problem for networked stochastic uncertain systems with multiple packet dropouts and delays. The random uncertainties of system parameters are described by white multiplicative noises. The phenomena of packet dropouts and delays in data transmission are described by a group of Bernoulli distributed random variables. Using an innovation analysis method, the optimal linear estimators including filter, predictor and smoother are presented in a linear minimum variance sense. A sufficient condition for the existence of the steady-state estimators is given. An example shows the effectiveness of the optimal linear estimators.

Key words Multiplicative noise, packet dropout, random delay, optimal linear estimation, innovation analysis method

Citation Li Na, Ma Jing, Sun Shu-Li. Optimal linear estimation for stochastic uncertain systems with multiple packet dropouts and delays. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(3): 611−619

由于传统点对点形式的控制系统在应用方面受到诸多限制, 网络控制系统应运而生, 并逐步成为当前控制领域的研究热点[1−5]. 然而随着控制系统规模的增大, 复杂程度也随之增加, 这就使得我们在享受网络控制系统资源共享便利的同时, 也面临着由网络传输带宽受限所带来的数据随机滞后和丢包等诸多弊端[6−12]. 目前, 对多丢包和随机滞后系统的估计问题也得到了广泛的研究. 文献 [6−7] 研究了带有随机滞后系统的估计问题. 文献 [8−9] 研究了带丢包系统的估计问题. 文献 [10] 针对一步滞后和多丢包系统设计了最优线性滤波器. 文献 [11] 对文献 [10] 进行了进一步的拓展, 利用 LMI 技术设计 H_∞ 滤波器, 由于采用了新的变量定义方法, 使计算量比文献 [10] 更低. 新近文献 [12] 将文献 [10] 推广到了带多步随机滞后和丢包系统, 并分别设计了依赖真值和依赖概率的两种滤波算法. 然而没有考虑预报和平滑问题, 而且没有考虑随机参数不确定性.

在实际的网络系统中, 往往不仅含有数据包丢失、随机滞后此类的媒介不确定性, 也含有乘性噪声此类的参数不确定性. 而带有乘性噪声的随机系统在航天、机械、化工等领域都有广泛的应用背景, 这就意味着研究含有乘性噪声随机系统的估计问题是必要而有意义的. 乘性噪声分为确定乘性噪声和随机乘性噪声. 文献 [13−14] 对在状态方程中含有确定性乘性噪声的系统提出了基于线性矩阵不等式的鲁棒滤波算法. 文献 [15−17] 对含有随机乘性噪声的系统进行了分析. 文献 [15] 在人为选择抗干扰噪声的系数和方差的前提下, 对带有随机状态乘性噪声和不确定观测的系统给出了集中式先验滤波器, 但该滤波器的设计具有一定的主观性, 且没有考虑随机滞后现象. 文献 [16] 对带有随机乘性噪声不确

收稿日期 2014-07-01 录用日期 2014-10-13
Manuscript received July 1, 2014; accepted October 13, 2014
国家自然科学基金 (61174139, 61403131), 黑龙江省杰出青年基金 (JC201412), 黑龙江大学研究生创新科研项目 (YJSCX2014-076HLJU) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174139, 61403131), Outstanding Youth Fund in Heilongjiang Province (JC201412), and Postgraduate Innovation Project of Heilongjiang Province (YJSCX2014-076HLJU)
本文责任编委 高会军
Recommended by Associate Editor GAO Hui-Jun
1. 黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080 2. 黑龙江大学数学科学学院 哈尔滨 150080
1. School of Electronics Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080 2. School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080

定系统进行了滤波器的设计, 也没有考虑随机滞后现象. 文献 [17] 对带有随机乘性噪声和观测不确定系统, 给出了集中式融合估值器的设计. 所设计的估值器在精度方面具有最优性, 但忽略了数据传输中可能存在的数据传输滞后、数据包丢失等问题. 文献 [18−19] 研究了一种非线性多项式滤波器, 但此种滤波器计算负担较大, 且不便于实时应用. 目前, 综合考虑多丢包、多滞后和乘性噪声随机不确定性的复杂系统的估计问题的研究成果还很少报导.

本文基于新近文献 [12] 提出的多丢包和滞后数学模型, 研究了带有随机乘性噪声参数不确定性网络化系统的最优线性估值器设计问题. 通过满足 Bernoulli 分布的随机变量来描述数据传输中具有的多丢包和滞后现象. 通过白噪声序列来描述系统中存在的乘性噪声. 应用射影理论[20], 给出了线性最小方差意义下的最优线性估值器, 包括滤波器、预报器和平滑器, 进而研究了估值器的稳态特性, 给出了稳态存在的一个充分条件.

1 问题的阐述

考虑如下带有随机乘性噪声的离散随机系统:

$$\boldsymbol{x}(t+1)=(\Phi+\beta(t)\Xi)\boldsymbol{x}(t)+D\boldsymbol{w}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=(C+\gamma(t)\Lambda)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是传感器的观测输出, 它将通过网络传输给数据处理中心, $\boldsymbol{w}(t)\in\mathbf{R}^r$ 和 $\boldsymbol{v}(t)\in\mathbf{R}^m$ 分别为输入噪声和观测噪声, $\beta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是均值为 0, 方差分别为 Q_β 和 Q_γ 的随机白噪声序列, 且与其他随机变量不相关, Φ, Ξ, D, C, Λ 为已知的适当维数的常阵.

传感器数据在通过网络传输给数据处理中心的过程中可能存在随机滞后和丢包现象, 可通过如下模型来描述[12]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t)=\;&\lambda_0(t)\boldsymbol{y}(t)+(1-\lambda_0(t))\{(1-\lambda_0(t-1))\lambda_1(t)\times\\&\boldsymbol{y}(t-1)+[1-(1-\lambda_0(t-1))\lambda_1(t)]\times\\&(1-\lambda_0(t-2))(1-\lambda_1(t-1))\lambda_2(t)\boldsymbol{y}(t-2)+\cdots+\\&\left[1-\prod_{k=0}^{d-2}(1-\lambda_k(t-d+k+1))\lambda_{d-1}(t)\right]\times\\&\prod_{k=0}^{d-1}(1-\lambda_k(t-d+k))\lambda_d(t)\boldsymbol{y}(t-d)\}\cdots\}\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{z}(t)$ 表示数据处理中心 (或估值器) 接收到的观测数据, 存在可能的有界 d 步滞后和多丢包. $\lambda_k(t)$, $k=0,1,\cdots,d$ 是满足 Bernoulli 分布的不相关的随机变量, 其概率分布为 $P\{\lambda_k(t)=1\}=\alpha_k$, $P\{\lambda_k(t)=0\}=1-\alpha_k$, 其中 $0\le\alpha_k\le1$, 且与其他随机变量不相关. 为了避免网络拥塞, 假设传感器的每个数据包仅发送一次, 而且估值器在每时刻只接收到一个数据包.

下面针对 $d=2$ 时的情形对模型式 (3) 进行说明.

当 $d=2$ 时, 模型变为 $\boldsymbol{z}(t)=\lambda_0(t)\boldsymbol{y}(t)+(1-\lambda_0(t))\{(1-\lambda_0(t-1))\lambda_1(t)\boldsymbol{y}(t-1)+[1-(1-\lambda_0(t-1))\lambda_1(t)](1-\lambda_0(t-2))(1-\lambda_1(t-1))\lambda_2(t)\boldsymbol{y}(t-2)\}$. 此时, t 时刻的按时接收率为 $P\{\lambda_0(t)=1\}=\alpha_0$, 一步滞后率为 $\tau_1=Prob\{\lambda_0(t)=0,\lambda_0(t+1)=0,\lambda_1(t+1)=1\}=(1-\alpha_0)^2\alpha_1$, 两步滞后率为 $\tau_2=Prob\{\lambda_0(t+2)=0,\lambda_0(t)=0,\lambda_1(t+1)=0,\lambda_2(t+2)=1,\lambda_0(t+1)=1\}+Prob\{\lambda_0(t+2)=0,\lambda_0(t)=0,\lambda_1(t+1)=0,\lambda_2(t+2)=1,\lambda_1(t+2)=0\}=(1-\alpha_0)^2(1-\alpha_1)\alpha_2$, 丢包率为 $\sigma=1-\alpha_0-\tau_1-\tau_2=(1-\alpha_0)[1-\alpha_1+\alpha_0\alpha_1-\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_0+\alpha_0\alpha_1)]$.

在本文中, 数学期望 E 对 $\beta(t)$, $\lambda_k(t)$, $\gamma(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 同时作用. 本文中的 0 和 I 表示适当维数的零矩阵和单位阵, T 是转置号.

假设 1. $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是均值为零、方差阵为 $Q_{\boldsymbol{w}}\ge0$ 和 $Q_{\boldsymbol{v}}>0$ 的相关白噪声, 且相关阵为 $\mathrm{E}[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)]=S$.

假设 2. 初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 的均值为 $\boldsymbol{\mu}_0$, 方差为 P_0, 且 $\boldsymbol{x}(0)$ 与 $\lambda_k(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, $\beta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是不相关的.

问题是基于所接收到的观测信息 $(\boldsymbol{z}(t),\cdots,\boldsymbol{z}(0))$ 来寻求线性最小方差意义下的最优线性估值器 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+M)$. 当 $M=0$ 时为滤波器; 当 $M<0$ 时为预报器; 当 $M>0$ 时为平滑器.

注 1. 根据 $\lambda_k(t)$ 的分布, 有 $\mathrm{E}[\lambda_k(t)]=\alpha_k$, $\mathrm{E}[(\lambda_k(t)-\alpha_k)^2]=\alpha_k(1-\alpha_k)$, $\mathrm{E}[\lambda_k(t)(1-\lambda_k(t))]=0$, $\mathrm{E}[\lambda_p(l)\lambda_k(t)]=\alpha_p\alpha_k$, $l\ne t$ 或 $p\ne k$.

注 2. 由于射影理论是寻求最优线性估计的有效工具, 因而本文将采用新息分析方法来设计依赖概率的估计算法. 只要按时接收率、滞后率和丢包率已知 (等价于 α_k 已知), 本文算法就可应用. 而按时接收率、滞后率和丢包率可通过统计的方法获得.

2 最优线性估值器

2.1 模型转化与预备引理

令 $\theta_0(t)=\lambda_0(t)$, $\theta_k(t)=[\prod_{j=0}^{k-1}(1-\lambda_j(t+j))]\times\lambda_k(t+k)$, $k=1,2,\cdots,d$, 且

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_k(t)=\theta_k(t)\boldsymbol{y}(t)+(1-\theta_k(t))\boldsymbol{Y}_{k+1}(t-1),\\&k=1,2,\cdots,d-1,\boldsymbol{Y}_d(t)=\theta_d(t)\boldsymbol{y}(t)\end{aligned} \tag{4}$$

则系统式 (1) ~ (3) 等价于如下系统:

$$\boldsymbol{\varsigma}(t+1)=\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)+\tilde{D}(t)\boldsymbol{\eta}(t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\tilde{C}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)+\theta_0(t)\boldsymbol{v}(t) \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{\eta}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varsigma}(t+1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+1) & \boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}(t) & \cdots & \boldsymbol{Y}_d^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 且

$$\tilde{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\Phi+\beta(t)\Xi & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \theta_1(t)(C+\gamma(t)\Lambda) & 0 & (1-\theta_1(t))I_m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \theta_{d-1}(t)(C+\gamma(t)\Lambda) & 0 & 0 & \cdots & (1-\theta_{d-1}(t))I_m\\ \theta_d(t)(C+\gamma(t)\Lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}(t)=\begin{bmatrix}D^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \theta_1(t)I_m & \cdots & \theta_d(t)I_m\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{C}(t)=\begin{bmatrix}\theta_0(t)(C+\gamma(t)\Lambda) & (1-\theta_0(t))I_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

有噪声统计信息如下:

$$Q_{\boldsymbol{\eta}}=\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\right\}=\begin{bmatrix}Q_{\boldsymbol{w}} & S\\ S^{\mathrm{T}} & Q_{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}\delta_{tk}$$

$$\bar{S}=\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\right\}=\begin{bmatrix}S\\ Q_{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix}\delta_{tk} \tag{8}$$

$$\bar{\theta}_0=\mathrm{E}[\theta_0(t)]=\alpha_0, \bar{\theta}_k=\mathrm{E}[\theta_k(t)]=\prod_{j=0}^{k-1}(1-\alpha_j)\alpha_k,$$
$$k=1,2,\cdots,d, \mathrm{E}[(\theta_k(t)-\bar{\theta}_k)^2]=\bar{\theta}_k(1-\bar{\theta}_k),$$
$$\mathrm{E}[(\theta_k(t_1)\theta_l(t_2)]=0,$$
$$k\neq l, t_1\neq t_2, k,l=0,1,\cdots,d \tag{9}$$

我们容易得到如下均值:

$$\bar{\Phi}=\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)],\ \bar{D}=\mathrm{E}[\tilde{D}(t)],\ \bar{C}=\mathrm{E}[\tilde{C}(t)] \tag{10}$$

其中, 只需将式 (7) 中的 $\theta_k(t), k=0,1,\cdots,d$ 用 $\bar{\theta}_k$ 来替代, 且注意到 $\mathrm{E}[\gamma(t)]=0$.

在推导最优线性滤波器前, 我们首先给出如下两个引理.

引理 1. 在假设 1 和假设 2 下, 系统式 (5) 的状态二阶矩矩阵 $g(t+1)=\mathrm{E}[\boldsymbol{\varsigma}(t+1)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t+1)]$ 满足如下递推方程:

$$g(t+1)=F(g(t))+\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}F(g(t))=&\Phi_0 g(t)\Phi_0^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_0 g(t)\Phi_k^{\mathrm{T}}+\\&\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_k g(t)\Phi_0^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_k g(t)\Phi_k^{\mathrm{T}}+\\&\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k Q_{\gamma}N_k g(t)N_k^{\mathrm{T}}+Q_{\beta}\Phi_{\Xi}g(t)\Phi_{\Xi}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}}=&D_0 Q_{\boldsymbol{\eta}}D_0^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k D_0 Q_{\boldsymbol{\eta}}D_k^{\mathrm{T}}+\\&\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k D_k Q_{\boldsymbol{\eta}}D_0^{\mathrm{T}}+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k D_k Q_{\boldsymbol{\eta}}D_k^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{13}$$

其中,

$$\Phi_{\Xi}=\begin{bmatrix}\Xi & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \Phi_0=\begin{bmatrix}\Phi & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{(d-1)m}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Phi_d=\begin{bmatrix}0 & 0\\ C & 0\end{bmatrix}$$

$$\Phi_k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ C & 0 & -I_m^{(l+1,l+2)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$N_k=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \Lambda^{(k+1,1)} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D_0=\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ D_k=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_m^{(k+1,2)}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中, $*^{(a,b)}$ 中的 a, b 代表第 a 行和第 b 列块的位置, $l=1,2,\cdots,d-1; k=1,2,\cdots,d$. 初值 $g(0)=\mathrm{diag}\{P_0+\boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\mu}_0^{\mathrm{T}},0\}$, $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 表示块对角阵.

证明. 由于 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 不相关于 $\boldsymbol{\varsigma}(t)$, 则

$$\begin{aligned}g(t+1)=\mathrm{E}[\boldsymbol{\varsigma}(t+1)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t+1)]=&\\ \mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)]+&\\ \mathrm{E}[\tilde{D}(t)\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{D}^{\mathrm{T}}(t)]&\end{aligned} \tag{15}$$

其中,

$$F(g(t)) = \mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)] \tag{16}$$

$$\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathrm{E}[\tilde{D}(t)\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{D}^{\mathrm{T}}(t)] \tag{17}$$

由式 (14) 有 $\tilde{\Phi}(t) = \Phi_0 + \sum_{k=1}^{d}\theta_k(t)\Phi_k + \sum_{k=1}^{d}\theta_k(t)\gamma(t)N_k + \beta(t)\Phi_{\Xi}$, $\tilde{D}(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{d}\theta_k(t)D_k$. 由于 $\mathrm{E}[\gamma(t)] = 0$, $\mathrm{E}[\beta(t)] = 0$, $\mathrm{E}[\theta_k^2(t)] = \bar{\theta}_k$, $\mathrm{E}[\gamma^2(t)] = Q_\gamma$, $\mathrm{E}[\beta^2(t)] = Q_\beta$, 将式 (16) 和式 (17) 代入式 (15), 式 (11) ~ (13) 成立. □

由式 (7) 和式 (10), 很容易得出下面的引理 2.

引理 2. 对于系统式 (5) 和式 (6), 有如下结论成立:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(t) - \bar{\Phi} = &\sum_{k=1}^{d}(\theta_k(t) - \bar{\theta}_k)\Phi_k + \sum_{k=1}^{d}\theta_k(t)\gamma(t)N_k + \\ &\beta(t)\Phi_{\Xi}\\ \tilde{C}(t) - \bar{C} = &(\theta_0(t) - \bar{\theta}_0)C_1 + \theta_0(t)\gamma(t)K\end{aligned} \tag{18}$$

其中, $C_1 = [\,C \quad -I_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,]$, $K = [\,\Lambda \quad 0 \quad \cdots \quad 0\,]$.

2.2 最优线性滤波器

基于引理 1 和引理 2, 我们有如下结论.

定理 1. 在假设 1 和假设 2 下, 系统式 (5) 和式 (6) 有如下最优线性滤波器

$$\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t) = \hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1) + G_f(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{19}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+1|t) = \bar{\Phi}\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1) + G_P(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \bar{C}\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1) \tag{21}$$

$$G_f(t) = P(t|t-1)\bar{C}^{\mathrm{T}}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t) \tag{22}$$

$$\begin{aligned}G_P(t) = &[\bar{\theta}_0(\Phi_0 - \bar{\Phi})g(t)C_1^{\mathrm{T}} + \bar{\Phi}P(t|t-1)\bar{C}^{\mathrm{T}} + \\ &\bar{\theta}_0 D_0\bar{S}]Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t)\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = &\bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)C_1 g(t)C_1^{\mathrm{T}} + \bar{\theta}_0 Q_\gamma K g(t)K^{\mathrm{T}} + \\ &\bar{C}P(t|t-1)\bar{C}^{\mathrm{T}} + \bar{\theta}_0 Q_{\boldsymbol{v}}\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}P(t+1|t) = &\breve{Q}(t) - G_P(t)\breve{S}^{\mathrm{T}}(t) - \breve{S}(t)G_P^{\mathrm{T}}(t) + \\ &(\bar{\Phi} - G_P(t)\bar{C})P(t|t-1)(\bar{\Phi} - G_P(t)\bar{C})^{\mathrm{T}} + \\ &G_P(t)\breve{R}(t)G_P^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{25}$$

$$P(t|t) = P(t|t-1) - G_f(t)Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)G_f^{\mathrm{T}}(t) \tag{26}$$

其中,

$$\begin{aligned}\breve{R}(t) = &\bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)C_1 g(t)C_1^{\mathrm{T}} + \bar{\theta}_0 Q_\gamma K g(t)K^{\mathrm{T}} + \\ &\bar{\theta}_0 Q_{\boldsymbol{v}}\\ \breve{Q}(t) = &F(g(t)) - \bar{\Phi}g(t)\bar{\Phi}^{\mathrm{T}} + \bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}}\\ \breve{S}(t) = &\bar{\theta}_0(\Phi_0 - \bar{\Phi})g(t)C_1^{\mathrm{T}} + \bar{\theta}_0 D_0\bar{S}\end{aligned} \tag{27}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 是方差阵为 $Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ 的新息, $G_f(t)$ 和 $G_P(t)$ 分别为滤波增益阵和预报增益阵, $P(t+1|t)$ 和 $P(t|t)$ 分别是预报和滤波误差方差阵. 初值为 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(0|-1) = [\,\boldsymbol{\mu}_0^{\mathrm{T}} \quad 0\,]^{\mathrm{T}}$ 和 $P(0|-1) = \mathrm{diag}\{P_0, 0\}$.

证明. 由射影定理, 可以得到式 (19) ~ (21). 把式 (6) 代入式 (21) 中, 有新息的另一种形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = (\tilde{C}(t) - \bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t) + \bar{C}\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1) + \theta_0(t)\boldsymbol{v}(t) \tag{28}$$

滤波和预报增益阵 $G_f(t)$ 和 $G_P(t)$ 分别被定义为

$$G_f(t) = \mathrm{E}[\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t) \tag{29}$$

$$G_P(t) = \mathrm{E}[\boldsymbol{\varsigma}(t+1)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t) \tag{30}$$

把式 (28) 代入式 (29) 中, 由于 $\mathrm{E}[\tilde{C}(t) - \bar{C}] = 0$, $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{v}(t)$, 其中符号 $\perp$ 表示正交, 则式 (22) 成立. 把式 (5) 和式 (28) 代入式 (30) 中, 由于 $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{\eta}(t)$, $\mathrm{E}[\theta_0(t)\theta_k(t)] = 0$, $k = 1,\cdots,d$, $\boldsymbol{\varsigma}(t) = \hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1) + \tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)$, 且 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\perp\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)$, 有

$$\begin{aligned}G_P(t) = &\{\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)] + \\ &\mathrm{E}[\tilde{D}(t)\boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]\}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t) = \\ &\{\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t) - \bar{C})^{\mathrm{T}}] + \\ &\bar{\Phi}P(t|t-1)\bar{C}^{\mathrm{T}} + \bar{\theta}_0 D_0\bar{S}\}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t)\end{aligned} \tag{31}$$

其中, 式 (31) 的第 1 项可以写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t) - \bar{C})^{\mathrm{T}}] = \\ &\quad\mathrm{E}[(\tilde{\Phi}(t) - \bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t) - \bar{C})^{\mathrm{T}}]\end{aligned} \tag{32}$$

应用式 (18) 和 $\mathrm{E}[\gamma(t)] = 0$, $\mathrm{E}[\beta(t)] = 0$, $\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{d}\theta_k(t)\theta_0(t)] = 0$, $\mathrm{E}[\sum_{k=1}^{d}(\theta_k(t) - \bar{\theta}_k)(\theta_0(t) - \bar{\theta}_0)] = -\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_0\bar{\theta}_k$, 式 (32) 可以改写为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t) - \bar{C})^{\mathrm{T}}] = \\ &\quad -\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_0\bar{\theta}_k\Phi_k g(t)C_1^{\mathrm{T}} = \bar{\theta}_0(\Phi_0 - \bar{\Phi})g(t)C_1^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{33}$$

把式 (33) 代入式 (31) 中, 式 (23) 成立.

把式 (28) 代入 $Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)=\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]$ 中, 由于 $\mathrm{E}[\tilde{C}(t)-\bar{C}]=0$, $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{v}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\perp\boldsymbol{v}(t)$, 则

$$Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)=\mathrm{E}[(\tilde{C}(t)-\bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}]+\bar{C}P(t|t-1)\bar{C}^{\mathrm{T}}+\bar{\theta}_0Q_{\boldsymbol{v}} \tag{34}$$

根据式 (18), 并由 $\mathrm{E}[(\theta_0(t)-\bar{\theta}_0)^2]=\bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)$, $\mathrm{E}[\theta_0^2(t)]=\bar{\theta}_0$, $\mathrm{E}[\gamma(t)]=0$, $\mathrm{E}[\gamma^2(t)]=Q_\gamma$, 式 (34) 中的第 1 项计算为

$$\mathrm{E}[(\tilde{C}(t)-\bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}]=\bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)C_1g(t)C_1^{\mathrm{T}}+\bar{\theta}_0Q_\gamma Kg(t)K^{\mathrm{T}} \tag{35}$$

把式 (35) 代入式 (34) 中, 式 (24) 成立.

用式 (5) 减去式 (20), 并结合式 (28), 则一步预报误差方程为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+1|t)=\;&[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})-G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})]\boldsymbol{\varsigma}(t)+\\&(\bar{\Phi}-G_P(t)\bar{C})\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)+\tilde{D}(t)\boldsymbol{\eta}(t)-\\&\theta_0(t)G_P(t)\boldsymbol{v}(t)\end{aligned} \tag{36}$$

由于 $\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi}]=0$, $\mathrm{E}[\tilde{C}(t)-\bar{C}]=0$, $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{\eta}(t)$, $\boldsymbol{\varsigma}(t)\perp\boldsymbol{v}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\perp\boldsymbol{\eta}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\perp\boldsymbol{v}(t)$, 因此有一步预报误差方差阵

$$\begin{aligned}&P(t+1|t)=\\&\quad\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+1|t)\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}^{\mathrm{T}}(t+1|t)]=\\&\quad\mathrm{E}\{[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})-G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})]\boldsymbol{\varsigma}(t)\times\\&\quad\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})-G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})]^{\mathrm{T}}\}+\\&\quad(\bar{\Phi}-G_P(t)\bar{C})P(t|t-1)(\bar{\Phi}-G_P(t)\bar{C})^{\mathrm{T}}+\\&\quad\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}}-\bar{\theta}_0D_0\bar{S}G_P^{\mathrm{T}}(t)-\bar{\theta}_0G_P(t)\bar{S}^{\mathrm{T}}D_0^{\mathrm{T}}+\\&\quad\bar{\theta}_0G_P(t)Q_{\boldsymbol{v}}G_P^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{37}$$

式 (37) 中的第 1 项可以展为

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})^{\mathrm{T}}]-\\&\quad\mathrm{E}[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)]-\\&\quad\mathrm{E}[G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})^{\mathrm{T}}]+\\&\quad\mathrm{E}[G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)]\end{aligned} \tag{38}$$

其中,

$$\mathrm{E}[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})^{\mathrm{T}}]=F(g(t))-\bar{\Phi}g(t)\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(\tilde{\Phi}(t)-\bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)]=\\&\quad\bar{\theta}_0(\Phi_0-\bar{\Phi})g(t)C_1^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)\\&\mathrm{E}[G_P(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(t)(\tilde{C}(t)-\bar{C})^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)]=\\&\quad\bar{\theta}_0(1-\bar{\theta}_0)G_P(t)C_1g(t)C_1^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)+\\&\quad\bar{\theta}_0Q_\gamma G_P(t)Kg(t)K^{\mathrm{T}}G_P^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{39}$$

根据式 (37) ∼ (39), 可以得到式 (25) 和式 (27). 根据式 (19), 滤波误差方程为

$$\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t)=\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)-G_f(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{40}$$

滤波误差方差阵为

$$\begin{aligned}P(t|t)=\;&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t)\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}^{\mathrm{T}}(t|t)]=\\&P(t|t-1)+G_f(t)Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)G_f^{\mathrm{T}}(t)-\\&G_f(t)\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(t)\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}^{\mathrm{T}}(t|t-1)]-\\&\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]G_f^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{41}$$

其中, $\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]=\mathrm{E}\{[\boldsymbol{\varsigma}(t)-\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)]\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)\}$. 由于 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\in L(\boldsymbol{\varepsilon}(1),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}(t-1))\perp\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, 且由式 (29), 我们有

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t-1)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]=\mathrm{E}[\boldsymbol{\varsigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)]=G_f(t)Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \tag{42}$$

把式 (42) 代入式 (41), 则式 (26) 成立. □

注 3. 当系统不含乘性噪声时, 定理 1 所给出的结果即为文献 [12] 的结果. 即文献 [12] 可作为本文的特殊情况获得. 同文献 [12] 相比, 乘性噪声的存在使得状态二阶矩式 (11) ∼ (13)、新息方差阵式 (24) 以及一步预报误差方差阵式 (25) 和式 (27) 变得更加复杂, 同时也使得文献 [12] 所设计的滤波器在处理本文问题时将失去最优性.

2.3 最优线性预报器

下面, 我们基于定理 1 给出的最优线性滤波器, 来推导最优线性 M $(M>1)$ 步预报器.

定理 2. 在假设 1 和假设 2 下, 系统式 (5) 和式 (6) 的 M $(M>1)$ 步最优预报器为

$$\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t)=\bar{\Phi}\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M-1|t) \tag{43}$$

$M(M>1)$ 步预报误差方差阵为

$$\begin{aligned}P(t+M|t)=\;&F(g(t+M-1))-\\&\bar{\Phi}g(t+M-1)\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}+\\&\bar{\Phi}P(t+M-1|t)\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}+\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}}\end{aligned} \tag{44}$$

其中, $g(t+M-1)$ 由引理 1 计算, 初值 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+1|t)$ 和 $P(t+1|t)$ 由定理 1 计算.

证明. 由式 (5), 有

$$\boldsymbol{\varsigma}(t+M)=\tilde{\Phi}(t+M-1)\boldsymbol{\varsigma}(t+M-1)+\tilde{D}(t+M-1)\boldsymbol{\eta}(t+M-1) \tag{45}$$

对式 (45) 左右两端在线性流形 $(\boldsymbol{z}(t),\boldsymbol{z}(t-1),\cdots,\boldsymbol{z}(0))$ 上取射影, 可得式 (43). 用式 (45) 减去式 (43), 可得预报误差方程为

$$\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t)=(\tilde{\Phi}(t+M-1)-\bar{\Phi})\boldsymbol{\varsigma}(t+M-1)+\bar{\Phi}\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M-1|t)+\tilde{D}(t+M-1)\boldsymbol{\eta}(t+M-1) \tag{46}$$

将上式代入 M $(M>1)$ 步预报误差方差阵 $P(t+M|t)=\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t)\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}^{\mathrm{T}}(t+M|t)]$ 中, 由于 $\boldsymbol{\varsigma}(t+M-1)\perp\boldsymbol{\eta}(t+M-1)$, $\tilde{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M-1)\perp\boldsymbol{\eta}(t+M-1)$, $\mathrm{E}[\tilde{\Phi}(t+M-1)-\bar{\Phi}]=0$, 且根据式 (16) 和式 (17), 则式 (44) 成立.

□

2.4 最优线性平滑器

定理 3. 在假设 1 和假设 2 下, 系统式 (5) 和式 (6) 有 $M(M<0)$ 步固定滞后平滑器

$$\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t)=\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t-1)+G_s(t+M|t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \tag{47}$$

$$G_s(t+M|t)=\Omega(t)\bar{C}^{\mathrm{T}}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(t) \tag{48}$$

$$\Omega(t)=\Omega(t-1)[\bar{\Phi}-G_P(t-1)\bar{C}]^{\mathrm{T}} \tag{49}$$

$$P(t+M|t)=P(t+M|t-1)-G_s(t+M|t)Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)G_s^{\mathrm{T}}(t+M|t) \tag{50}$$

其中, $G_s(t+M|t)$ 为 M 步平滑器增益. 初值 $\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t+M|t+M)$, $\Omega(t)=P(t+M|t+M-1)$ 和 $P(t+M|t+M)$ 由定理 1 计算.

定理 3 可类似文献 [10] 证明. 这里细节略.

推论 1. 系统式 (1) ∼ (3) 的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 的最优线性估值器为 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+M)=[\,I_n\quad 0\,]\hat{\boldsymbol{\varsigma}}(t|t+M)$, 估计误差方差阵为 $p(t|t+M)=[\,I_n\quad 0\,]P(t|t+M)[\,I_n\quad 0\,]^{\mathrm{T}}$.

3 稳态估值器

根据式 (12), 我们定义如下矩阵 A:

$$A=\Phi_0\otimes\Phi_0+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_0\otimes\Phi_k+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_k\otimes\Phi_0+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_k\Phi_k\otimes\Phi_k+\sum_{k=1}^{d}\bar{\theta}_kQ_{\gamma}N_k\otimes N_k+Q_{\beta}\Phi_{\Xi}\otimes\Phi_{\Xi} \tag{51}$$

其中, $\otimes$ 是 Kronecker 乘积.

定理 4. 若 $\rho(A)<1$, 其中 $\rho(A)$ 表示矩阵 A 的谱半径, 则在任意初始条件 $g(0)\geq 0$ 时, 方程式 (11) 的解 $g(t)$ 收敛到如下方程的唯一半正定解 g:

$$g=F(g)+\bar{Q}_{\boldsymbol{\eta}} \tag{52}$$

即 $g=\lim_{t\to\infty}g(t)$, 且有 $F(g)=\lim_{t\to\infty}F(g(t))$, $\breve{Q}=\lim_{t\to\infty}\breve{Q}(t)$, $\breve{S}=\lim_{t\to\infty}\breve{S}(t)$, $\breve{R}=\lim_{t\to\infty}\breve{R}(t)$. $\breve{Q}$, $\breve{S}$ 和 $\breve{R}$ 的定义如式 (27), 其中的 $g(t)$ 由极限 g 代替.

进一步, 如果 $(\bar{\Phi},\bar{C})$ 是可检对, 且 $(\bar{\Phi}-\breve{S}\breve{R}^{-1}\bar{C},U)$ 是可稳对, 其中 $UU^{\mathrm{T}}=\breve{Q}-\breve{S}\breve{R}^{-1}\breve{S}^{\mathrm{T}}$, 则在任意初始条件 $P(0|-1)\geq 0$ 下, 方程式 (25) 的解 $P(t+1|t)$ 收敛到如下方程的唯一半正定解 P:

$$P=(\bar{\Phi}-G_P\bar{C})P(\bar{\Phi}-G_P\bar{C})^{\mathrm{T}}+\breve{Q}-G_P\breve{S}^{\mathrm{T}}-\breve{S}G_P^{\mathrm{T}}+G_P\breve{R}G_P^{\mathrm{T}} \tag{53}$$

即 $P=\lim_{t\to\infty}P(t|t-1)$, 且有 $G_P=\lim_{t\to\infty}G_P(t)$, $G_f=\lim_{t\to\infty}G_f(t)$, $Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}=\lim_{t\to\infty}Q_{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$. 稳态一步预报器:

$$\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_s(t+1|t)=(\bar{\Phi}-G_P\bar{C})\hat{\boldsymbol{\varsigma}}_s(t|t-1)+G_P\boldsymbol{z}(t) \tag{54}$$

是渐近稳定的.

定理 4 可类似文献 [12] 证明. 这里细节略.

注 4. 由稳态一步预报器可以得到相应的稳态滤波器、稳态多步预报器和稳态平滑器.

注 5. 由模型式 (3) 可知: 当某时刻估值器没有收到数据时, 本文没有做任何补偿. 而文献 [10] 采用上一时刻收到的数据进行补偿. 但文献 [10] 只能处理一步滞后和丢包系统的估计问题, 且没有考虑系统的随机参数不确定性. 另外, 当滞后 $d=1$ 时, 本文的稳态滤波器的计算量为 $\mathrm{O}((n+m)^2)$, 而文献 [10] 的稳态滤波器的计算量为 $\mathrm{O}((n+3m)^2)$. 可见本文算法计算量更小.

4 仿真研究

考虑如下带有随机状态和观测乘性噪声的系统

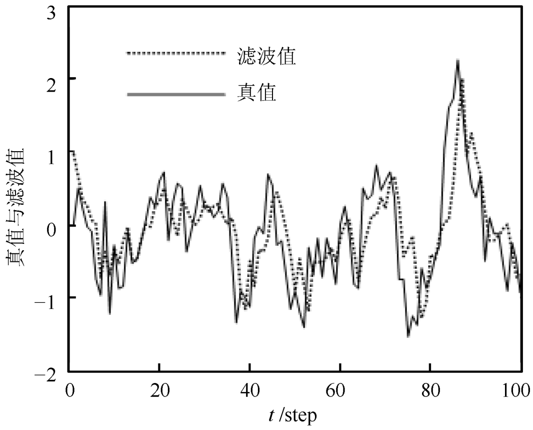
$$\boldsymbol{x}(t+1)=\left(\begin{bmatrix}0.8&0\\2&0.6\end{bmatrix}+\beta(t)\begin{bmatrix}0.1&0.05\\0.2&0.5\end{bmatrix}\right)\times\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0.5\\3\end{bmatrix}\boldsymbol{w}(t) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=([\,1\quad 1\,]+\gamma(t)[\,0.1\quad 0.1\,])\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{56}$$

其中, 白噪声 $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 相关, 且 $\boldsymbol{v}(t) = c\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{u}(t)$, 相关系数 $c = 0.5$. 白噪声 $\boldsymbol{u}(t)$ 独立于 $\boldsymbol{w}(t)$, 二者均值为 0, 方差分别为 $Q_{\boldsymbol{w}} = 1$, $Q_{\boldsymbol{u}} = 1$. 乘性噪声 $\beta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的方差为 $Q_\beta = 0.1$, $Q_\gamma = 0.2$. 仿真中取 100 个采样数据, 并取滞后的上界 $d = 2$, 且 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.8$. 任选初值 $\hat{\boldsymbol{x}}(0|-1) = [1,1]^{\mathrm{T}}$, $P_0 = 0.1I_2$. 求最优线性滤波器 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$, 两步预报器 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t-2)$ 和一步平滑器 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+1)$.

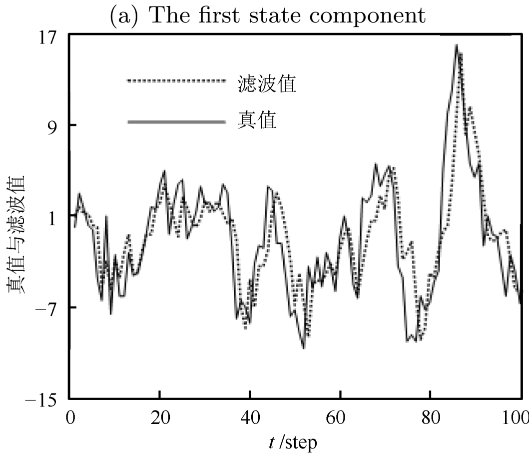
由式 (51) 可得 $\rho(A) = 0.6746 < 1$. 易验证系统是可检可稳的. 因而存在稳态滤波. 当 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.8$ 时, 可计算按时接收率为 $\alpha_0 = 0.2$, 一步滞后率为 $\tau_1 = (1-\alpha_0)^2\alpha_1 = 0.32$, 两步滞后率为 $\tau_2 = (1-\alpha_0)^2(1-\alpha_1)\alpha_2 = 0.256$, 丢包率为 $\sigma = 1 - \alpha_0 - \tau_1 - \tau_2 = 0.224$.

最优线性滤波器如图 1 所示. 可见所设计的滤波器具有良好的跟踪效果, 且具有渐近稳定性.



(a) 第一状态分量

(a) The first state component



(b) 第二状态分量

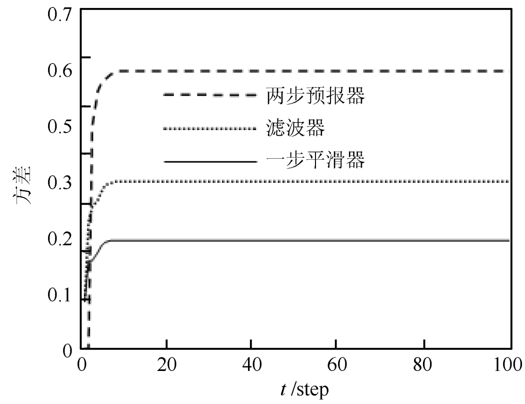
(b) The second state component

图 1 最优线性滤波器

Fig. 1 Optimal linear filter

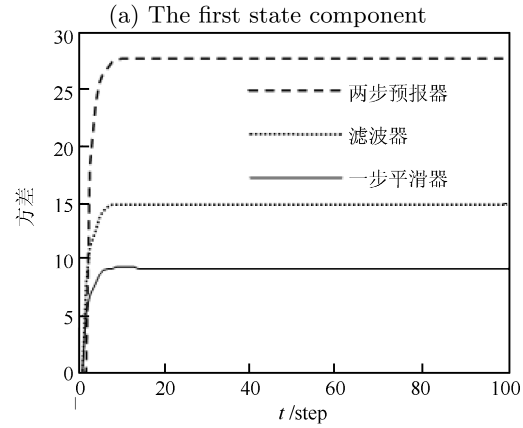
图 2 是滤波器、两步预报器和一步平滑器的误差方差比较图. 可见, 一步平滑器精度最高, 其次是滤波器, 而预报器的精度最低. 经过一段时间后, 它们的估计误差方差都趋于常值, 这体现了估值器的稳态特性.

图 3 是状态和观测乘性噪声方差 Q_β 和 Q_γ 变化时, 状态滤波误差方差的变化情况. 从图 3 可见, 乘性噪声的方差越大, 滤波误差方差越大. 这说明随机乘性噪声的存在, 影响了滤波器的精度.



(a) 第一状态分量

(a) The first state component

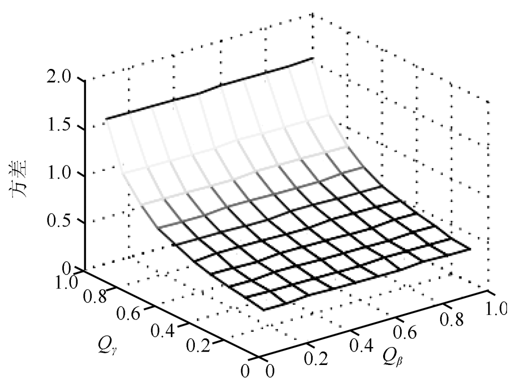


(b) 第二状态分量

(b) The second state component

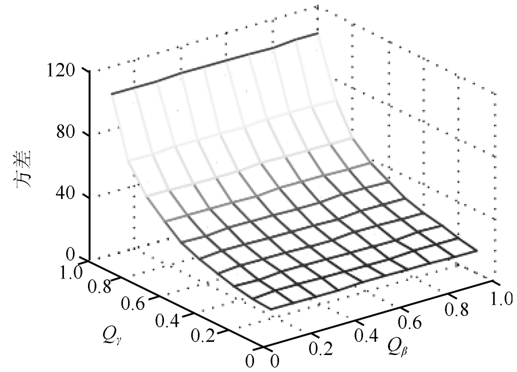
图 2 滤波器、两步预报器、一步平滑器的误差方差比较图

Fig. 2 Comparisons of variances of filter, two-step predictor and one-step smoother



(a) 第一状态分量

(a) The first state component



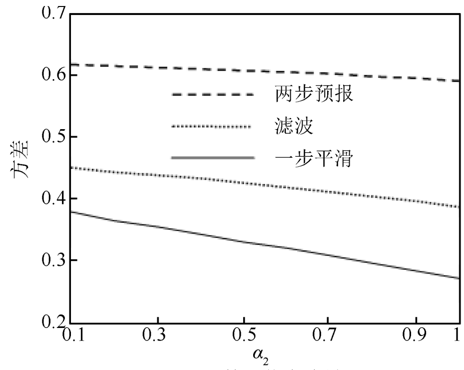
(b) 第二状态分量

(b) The second state component

图 3 $0.1 \leq Q_\gamma \leq 1$, $0.1 \leq Q_\beta \leq 1$ 时的滤波误差方差

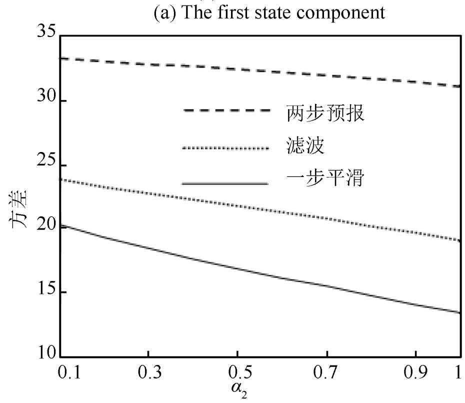
Fig. 3 Filtering error variances with $0.1 \leq Q_\gamma \leq 1$, $0.1 \leq Q_\beta \leq 1$

取 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.1$, $0.1 \leq \alpha_2 \leq 1$, 可计算接收率 $\alpha_0 = 0.2$ 和一步滞后率 $\tau_1 = 0.064$, 易知两步滞后率 τ_2 随 α_2 的增大而增加, 丢包率随 α_2 的增加而减小. 图 4 说明了当接收率和一步滞后率固定, 两步滞后率增大, 丢包率减小时, 估值器方差也随之减小.



(a) 第一状态分量

(a) The first state component



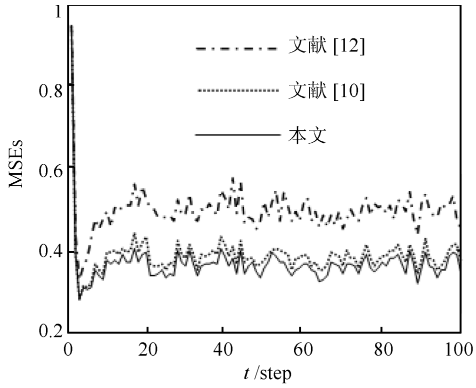
(b) 第二状态分量

(b) The second state component

图 4 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.1$, $0.1 \leq \alpha_2 \leq 1$ 时最优估值器的估计误差方差

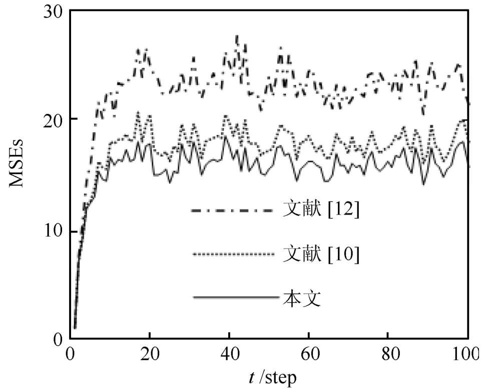
Fig. 4 Estimation error variances of the optimal estimators with $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.1$, $0.1 \leq \alpha_2 \leq 1$

图 5 是随机滞后 $d = 1$ 且 $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.5$ 时, 本文所设计的滤波器与文献 [10] 和文献 [12] 依靠概率所设计滤波器的 MSE 比较图. 取 Monte Carlo 仿真次数为 1 000. 从图 5 中可以看出, 本文滤波器的 MSE 曲线在最下面, 说明本文设计的滤波器的精度比文献 [10] 和文献 [12] 的依靠概率所设计的滤波器的精度高. 这是因为文献 [10] 和文献 [12] 没有考虑可能存在的乘性噪声参数不确定性, 此时文献 [10] 和文献 [12] 所设计的滤波器已失去了最优性. 而文献 [10] 的滤波器的精度要高于文献 [12], 这主要是由于文献 [10] 存在丢包补偿. 但从计算量上比较, 由注 3 和注 5 可知此时文献 [12] 具有更小的计算负担.



(a) 第一状态分量

(a) The first state component



(b) 第二状态分量

(b) The second state component

图 5 在 $d = 1$ 时本文滤波器与文献 [10] 和文献 [12] 的滤波器的均方误差比较

Fig. 5 Comparisons of mean square errors of our filter, filters in literatures [10] and [12] under $d = 1$

5 结论

对带有随机乘性噪声参数不确定性、数据传输具有多丢包和滞后的网络化系统, 应用新息分析方法设计了在线性最小方差意义下的最优线性估值器, 包括滤波器、预报器和平滑器. 所设计的估值器通

过求解一个 Lyapunov 方程和一个 Riccati 方程获得. 它们依赖于随机参数的统计特性. 分析了算法的稳态特性, 并给出了稳态存在的充分条件. 将文献 [12] 的结果推广到了带乘性噪声的随机参数不确定系统. 仿真研究验证了系统在存在随机参数不确定性时, 文献 [12] 的算法已失去了最优性. 而本文算法提供了最优线性估计.

References

1 Heemels W P M H, Teel A R, van de Wouw N, Nesic D. Networked control systems with communication constraints: tradeoffs between transmission intervals, delays and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1781−1796

2 HesPanha J P, Naghshtabrizi P, Xu Y G. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 138−162

3 Li Hong-Bo, Sun Zeng-Qi, Sun Fu-Chun. Networked control systems: an overview of state-of-the-art and the prospect in future research. *Control Theory & Applications*, 2010, **27**(2): 238−243
(李洪波, 孙增圻, 孙富春. 网络控制系统的发展现状及展望. 控制理论与应用, 2010, **27**(2): 238−243)

4 You Ke-You, Xie Li-Hua. Survey of recent progress in networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(2): 101−118
(游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述. 自动化学报, 2013, **39**(2): 101−118)

5 Wang Shuai, Yang Wen, Shi Hong-Bo. Consensus-based filtering algorithm with packet-dropping. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(12): 1689−1696
(王帅, 杨文, 侍洪波. 带丢包一致性滤波算法研究. 自动化学报, 2010, **36**(12): 1689-1696)

6 Zhang H S, Feng G, Han C Y. Linear estimation for random delay systems. *Systems & Control Letters*, 2011, **60**(7): 450−459

7 Su X J, Shi P, Wu L, Song Y D. A novel approach to filter design for T-S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, **20**(6): 1114−1129

8 Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal H_2 filtering in networked control systems with multiple packet dropout. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(8): 1508−1513

9 Liang Y, Chen T W, Pan Q. Optimal linear state estimator with multiple packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(6): 1428−1433

10 Sun Shu-Li. Optimal linear estimation for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 349−356
(孙书利. 具有一步随机滞后和多丢包的网络系统的最优线性估计. 自动化学报, 2012, **38**(3): 349−356)

11 Li Xiu-Ying, Wang Jin-Yu, Sun Shu-Li. Filter design for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 155−160
(李秀英, 王金玉, 孙书利. 具有一步随机时滞和多丢包的网络系统 H_∞ 滤波器设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 155−160)

12 Sun S L. Optimal linear filters for discrete-time systems with randomly delayed and lost measurements with/without time stamps. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1551−1556

13 Wang Z D, Yang F W, Ho D W C, Liu X H. Robust finite-horizon filtering for stochastic systems with missing measurements. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, **12**(6): 437−440

14 Wang Z D, Yang F W, Ho D W C, Liu X H. Robust H_∞ filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(7): 2579−2587

15 Hounkpevi F O, Yaz E E. Robust Minimum variance linear state estimators for multiple sensors with different failure rates. *Automatica*, 2007, **43**(7): 1274−1280

16 Liang H Y, Zhou T. Robust state estimation for uncertain discrete-time stochastic systems with missing measurements. *Automatica*, 2011, **47**(7): 1520−1524

17 Ma J, Sun S L. Centralized fusion estimators for multisensor systems with multiplicative noises and missing measurements. *Journal of Networks*, 2012, **7**(10): 1538−1545

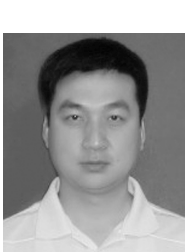
18 Santis A D, Germani A, Raimondi M. Optimal quadratic filtering of linear discrete-time non-Gussian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(7): 1274−1278

19 Carravetta F, Germani A, Raimondi M. Polynomial filtering for discrete-time stochastic linear systems with multiplicative state noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1106−1126

20 Anderson B D O, Moore J B. *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.

李 娜 黑龙江大学电子工程学院硕士研究生. 主要研究方向为状态估计.
E-mail: sanguanyoulan@163.com
(**LI Na** Master student at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. Her research interest covers the state estimation.)

马 静 黑龙江大学数学科学学院副教授. 主要研究方向为传感器网络和信息融合滤波. E-mail: jingma427@ 163.com
(**MA Jing** Associate professor at the School of Mathematical Science, Heilongjiang University. Her research interest covers the sensor networks and information fusion filtering.)



孙书利 黑龙江大学电子工程学院教授. 主要研究方向为网络系统滤波, 多传感器信息融合. 本文通信作者.
E-mail: sunsl@hlju.edu.cn
(**SUN Shu-Li** Professor at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. His research interest covers the networked systems filtering and multi-sensor fusion. Corresponding author of this paper.)