广义马氏跳变系统在一般转移速率下的控制器设计

王国良 [1] 薄海英 [1]

摘 要 针对转移概率不能精确获得并且部分未知的广义马氏跳变系统, 分别讨论在模态依赖控制器和模态独立控制器条件下的系统镇定问题. 与现有结果相比, 所提研究方法具有较小的保守性, 能够有效地解决实际问题. 首先, 运用自由权矩阵方法, 得到了广义马氏跳变系统在转移速率满足上述一般条件时系统随机容许的充分条件. 在此基础上, 以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的形式分别给出了模态依赖和模态独立控制器的求解条件. 最后, 通过数值算例验证设计方法的有效性和优越性.

关键词 广义马氏跳变系统, 不确定切换率, 转移概率部分未知, 线性矩阵不等式

引用格式 王国良, 薄海英. 广义马氏跳变系统在一般转移速率下的控制器设计. 自动化学报, 2015, **41**(1): 215−220

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140370

Stabilization of Singular Markovian Jump Systems with General Switching

WANG Guo-Liang[1] BO Hai-Ying[1]

Abstract This paper considers the stabilization of singular Markovian jump systems with general switching, where the transition rate matrix is uncertain and partially unknown. Compared with the existing results, the methods proposed in this paper are less conservative and are very suitable to deal with many practical problems. First, a new condition of stochastic admissibility for singular Markovian jump systems with general switching is obtained by exploiting the slack variable method. Then, several conditions for the existence of mode-dependent and mode-independent controllers are developed in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example is given to show the effectiveness and advantages of the design methods.

Key words Singular Markovian jump systems, uncertain switching probability, partially unknown transition rate matrix, linear matrix inequality (LMI)

Citation Wang Guo-Liang, Bo Hai-Ying. Stabilization of singular Markovian jump systems with general switching. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 215−220

1961 年, Krasovskii 和 Lidskii 首次提出马尔科夫跳变系统 (马氏跳变系统)[1]. 这类系统通常由两部分组成: 1) 在由离散事件形成有限集合内取值的马尔科夫跳变参数, 即系统模态; 2) 随着时间连续变化的状态变量. 这类系统因为自身的特殊性及复杂性能够非常方便地描述实际中的许多系统[2−8], 如电力系统、制造系统, 太阳能接收系统、飞机控制系统等.

广义系统又称奇异系统, 比正常系统更具广泛形式. 当这类系统遭受到环境的突变、子系统间关联方式的改变等情况时, 广义马尔科夫跳变系统 (广义马氏跳变系统)[9−11] 能更好地描述这一现象. 近年来, 越来越多的学者热衷于广义马氏跳变系统的研究[12−16].

近些年, 针对广义马氏跳变系统的研究主要集中在转移概率完全已知的情况. 然而, 这是一种理想化的情况. 在许多实际系统分析中, 精确测得所有转移速率的成本十分昂贵, 甚至有些时候不可能得到完整的信息, 例如在通信网络中, 数据传输通道的延迟或数据信息的遗失都是随机的, 精确获得系统转移速率矩阵中的所有信息将十分困难[17−21]. 因此, 从理论研究意义和实际应用方面来说, 研究马氏系统在转移概率含有不确定性并且部分未知的相关问题[22−27] 具有重要意义.

本文研究了广义马氏跳变系统在上述一般转移速率条件下的控制器设计问题. 为了解决这一实际问题并得到保守性较小的结果, 通过引入自由权矩阵和添减项的等价处理方法, 得到了广义马氏跳变系统在转移速率含有不确定性和部分未知时系统的随机容许性条件. 在此基础上, 建立了模态依赖控制器与模态独立控制器线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的求解条件. 最后, 通过数值仿真算例验证了所得结果的有效性与优势.

本文中, $\mathbf{R}^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维空间, $\deg(f(x))$ 表示 $f(x)$ 多项式的次数, $\det(\cdot)$ 表示行列式的值, $*$ 表示对称矩阵块中相应位置的转置, $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵, $\mathrm{Rank}(M)$ 表示矩阵 M 的秩, $M^\star = M + M^{\mathrm{T}}$.

1 问题描述

考虑如下一类广义马氏跳变系统:

$$E\dot{x}(t) = A(r_t)\boldsymbol{x}(t) + B(r_t)u(t) \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u(t)\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 为控制输入. 矩阵 $A(r_t)$, $B(r_t)$ 为适当维数的系统矩阵. 导数项系数矩阵为 $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 且 $\mathrm{Rank}(E)=r<n$. $r_t\in\mathbf{S}=\{1,2,\cdots,N\}$ 表示系统的跳变信号. 广义马氏跳变系统的转移速率矩阵 $\Pi = (\pi_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足如下条件:

$$Pr\{\eta_{t+h}=j|r_t=i\} = \begin{cases}\pi_{ij}h+o(h), & j\neq i\\ 1+\pi_{ii}h+o(h), & j=i\end{cases} \tag{2}$$

其中, $\lim_{h\to 0^+}(o(h)/h)=0$ $(h>0)$, π_{ij} 表示转移速率, 当 $i \neq j$ 时, $\pi_{ij}>0$ 且 $\pi_{ii}=-\sum_{j\neq i}\pi_{ij}$. 为了方便讨论, $A(r_t) = A_i$, 其余类似.

定义 1. 当 $u(t)=0$ 时, 称广义马氏跳变系统:

1) 正则, 如果 $\det(sE-A_i)\neq 0$, $\forall i\in\mathbf{S}$;

2) 无脉冲, 如果 $\det(sE-A_i)=\mathrm{Rank}(E)$, $\forall i\in\mathbf{S}$;

3) 随机稳定, 如果对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$, $r_0\in\mathbf{S}$, 存在正实数 $M(\boldsymbol{x}_0,r_0)$, 使得

$$\mathscr{E}\left\{\int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s|\boldsymbol{x}_0,r_0\right\}\leq M(\boldsymbol{x}_0,r_0)$$

收稿日期 2014-05-23 录用日期 2014-06-30
Manuscript received May 23, 2014; accepted June 30, 2014
国家自然科学基金 (61104066, 61374043), 中国博士后科学基金 (2012M521086), 辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (LJQ2013040), 辽宁省自然科学基金 (2014020106) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61104066, 61374043), China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (2012M521086), the Program for Liaoning Excellent Talents in University (LJQ2013040), and Natural Science Foundation of Liaoning Province (2014020106)
本文责任编委 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院 抚顺 113001
1. School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun 113001

4) 随机容许, 如果系统正则、稳定、无脉冲.

本文的目的是在转移概率部分未知且具有不确定性的情况下分别设计模态依赖控制器:

$$u(t) = K_i\boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

和模态独立控制器:

$$u(t) = K\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

其中, K_i 和 K 分别是控制器的控制增益. 并且 $\Pi = (\pi_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足如下一般形式:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \bar\pi_{11}+\Delta\bar\pi_{11} & ? & ? & \cdots & ? \\ ? & ? & \bar\pi_{23}+\Delta\bar\pi_{23} & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \bar\pi_{N3}+\Delta\bar\pi_{N3} & \cdots & \bar\pi_{NN}+\Delta\bar\pi_{NN} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中, “?” 代表转移速率矩阵中未知的元素, 对任意 $i \in \mathbf{S}$, 定义 $\mathbf{S}^i = \mathbf{S}^i_k \cup \mathbf{S}^i_{\bar k}$, 其中 $j \in \mathbf{S}$, $\mathbf{S}^i_k = \{j : \pi_{ij}\text{已知}, j \in \mathbf{S}\}$, $\mathbf{S}^i_{\bar k} = \{j : \pi_{ij}\text{未知}, j \in \mathbf{S}\}$. 进一步可表示为, $\mathbf{S}^i_k = \{k^i_1, \cdots, k^i_m\}$ 和 $\mathbf{S}^i_{\bar k} = \{\bar k^i_1, \cdots, \bar k^i_{N-m}\}$. 其中 $k^i_j \in \mathbf{Z}^+$ 表示 Π 中第 i 行第 m 列已知的元素, $\bar k^i_{N-j} \in \mathbf{Z}^+$ 是指 Π 中第 i 行第 $(N-m)$ 列未知的元素. 定义估计误差 $\Delta\bar\pi_{ij} = \pi_{ij} - \bar\pi_{ij}$, 其中 $\bar\pi_{ij}$ 是 π_{ij} 的估计值, $\Delta\bar\pi_{ij} \in [-\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}]$, $j \neq i$. 令 $\alpha_{ij} = \bar\pi_{ij} - \epsilon_{ij}$, 进而得到 $|\Delta\bar\pi_{ii}| \le -\epsilon_{ii}$ 并且有以下两种情况存在: 1) 当 $i \in \mathbf{S}^i_k$ 时, $\bar\pi_{ij} - \epsilon_{ij} \ge 0$ $(\forall j \in \mathbf{S}^i_k, j \neq i)$, $\bar\pi_{ii} + \epsilon_{ii} \le 0$, $\sum_{j\in\mathbf{S}^i_k} \bar\pi_{ij} \le 0$; 2) 当 $i \in \mathbf{S}^i_{\bar k}$ 时, $\bar\pi_{ij} - \epsilon_{ij} \ge 0$ $(\forall j \in \mathbf{S}^i_k)$. 另外, 令 $\tau = \min_{i\in\mathbf{S}^i_{\bar k}}\{\pi_{ii}\}$.

1.1 主要内容

首先考虑随机容许性问题. 当 $u(t) = 0$ 时, 有如下定理.

定理 1. 系统 (1) 是随机容许的, 如果存在矩阵 $H_i > 0$, $W_i > 0$, $G_i > 0$, P_i, M_i, S_i, T_i, 使下列线性矩阵不等式成立:

$$E^{\mathrm T}P_i = P_i^{\mathrm T}E \ge 0, \quad i \in \mathbf{S} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} (A_i^{\mathrm T}P_i)^\star + \Phi_{i1} & M_i & \Phi_{i2} \\ * & -H_i & 0 \\ * & * & \Phi_{i3} \end{bmatrix} < 0, \ \ i \in \mathbf{S}^i_k \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} (A_i^{\mathrm T}P_i)^\star + \Phi_{i4} & \Phi_{i5} \\ * & \Phi_{i6} \end{bmatrix} < 0, \ \ i \in \mathbf{S}^i_{\bar k} \tag{8}$$

$$E^{\mathrm T}P_j - E^{\mathrm T}P_i - M_i \le 0, \quad i \in \mathbf{S}, \ \ j \in \mathbf{S}^i_{\bar k}, \ \ j \neq i \tag{9}$$

$$E^{\mathrm T}P_j - E^{\mathrm T}P_i - M_i - S_j \le 0 \qquad i \in \mathbf{S}^i_k, \ \ j \in \mathbf{S}^i_k, \ \ j \neq i \tag{10}$$

$$E^{\mathrm T}P_j - E^{\mathrm T}P_i - M_i - T_j \le 0 \qquad i \in \mathbf{S}^i_{\bar k}, \ \ j \in \mathbf{S}^i_k, \ \ j \neq i \tag{11}$$

其中

$$\Phi_{i1} = \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k}^{N} \alpha_{ij}E^{\mathrm T}P_j - \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k}^{N} \alpha_{ij}M_i + \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k, j\neq i}^{N} \epsilon_{ij}S_j + \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k, j\neq i}^{N} \frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2 G_j - \epsilon_{ii}M_i + \frac{1}{4}\epsilon_{ii}^2 H_i$$

$$\Phi_{i2} = [S_1 \cdots S_{i-1}\ S_{i+1} \cdots S_N]$$

$$\Phi_{i3} = -\operatorname{diag}\{G_1, \cdots, G_{i-1}, G_{i+1}, \cdots, G_N\}$$

$$\Phi_{i4} = \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k, j\neq i}^{N} \alpha_{ij}(E^{\mathrm T}P_j - E^{\mathrm T}P_i - M_i) + \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k, j\neq i}^{N} \epsilon_{ij}T_j + \sum_{j\in\mathbf{S}^i_k, j\neq i}^{N} \frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2 W_j - \tau M_i$$

$$\Phi_{i5} = [T_1 \cdots T_{i-1}\ T_{i+1} \cdots T_N]$$

$$\Phi_{i6} = -\operatorname{diag}\{W_1, \cdots, W_{i-1}, W_{i+1}, \cdots, W_N\}$$

证明. 首先证明系统的正则无脉冲特性. 如果条件 (6) 和

$$(A_i^{\mathrm T}P_i)^\star + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}E^{\mathrm T}P_j < 0 \tag{12}$$

成立, 则系统 (1) 正则无脉冲. 针对系统 (1), 总是存在非奇异矩阵 M 和 N, 使下式满足

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \ MA_iN = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i3} & A_{i4} \end{bmatrix}$$

$$M^{-\mathrm T}P_iN = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ P_{i3} & P_{i4} \end{bmatrix}$$

分别用 $N^{\mathrm T}$ 和 N 左乘及右乘式 (6), 可以得到 $P_{i2} = 0$. 同理, 式 (12) 等价于

$$\begin{bmatrix} ※ & ※ \\ ※ & (A_{i4}^{\mathrm T}P_{i4})^\star \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

其中, ※ 代表在文中不被使用的式子. 由式 (13) 可知, A_{i4} 是非奇异矩阵. 从而, 系统 (1) 是正则无脉冲的. 选取如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}P_i\boldsymbol{x}(t) \tag{14}$$

对式 (14) 取弱无穷小算子. 求解如下:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V(t) = {} & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}P_i\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}P_i\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm T}P_j\boldsymbol{x}(t) = \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\left[(A_i^{\mathrm T}P_i)^\star + \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm T}P_j\right]\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{15}$$

若要使系统随机稳定, 则有

$$(A_i^{\mathrm T}P_i)^\star + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ij}E^{\mathrm T}P_j < 0 \tag{16}$$

当转移速率含有不确定性且部分未知时, $\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j$ 等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j=\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j-\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}M_i=\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\pi_{ij}(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i)+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,j\neq i}^{N}(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i)-\pi_{ii}M_i\end{aligned}\tag{17}$$

结合式 (17) 可知, 式 (16) 可由

$$E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i\leq 0,\quad i\in\mathbf{S},\ j\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,\ j\neq i\tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}&(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\pi_{ij}(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i)-\\&\quad\pi_{ii}M_i<0,\quad i\in\mathbf{S}_k^i\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\pi_{ij}(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i)-\\&\quad\tau M_i<0,\quad i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i\end{aligned}\tag{20}$$

得到, 其中式 (18) 与式 (9) 等价.

同时, 为了进一步解决转移速率带有不确定性的问题, 式 (19) 等价于

$$\begin{aligned}&(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}M_i+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}(\Delta\tilde{\pi}_{ij}+\epsilon_{ij})(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i-S_j)+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}(\Delta\tilde{\pi}_{ij}+\epsilon_{ij})S_j-(\Delta\tilde{\pi}_{ii}+\epsilon_{ii})M_i\leq\\&\quad(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}M_i+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\epsilon_{ij}S_j+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}(\frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2G_j+S_jG_j^{-1}S_j)-\\&\quad\epsilon_{ii}M_i+\frac{1}{4}\epsilon_{ii}^2H_i+M_iH_i^{-1}M_i+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}(\Delta\tilde{\pi}_{ij}+\epsilon_{ij})(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-\\&\quad M_i-S_j)\leq 0,\quad i\in\mathbf{S}_k^i\end{aligned}\tag{21}$$

可由

$$\begin{aligned}&E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i-S_j\leq 0\\&\qquad i\in\mathbf{S}_k^i,\ j\in\mathbf{S}_k^i,\ j\neq i\end{aligned}\tag{22}$$

和

$$\begin{aligned}&(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}M_i+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\epsilon_{ij}S_j+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\left(\frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2G_j+S_jG_j^{-1}S_j\right)-\\&\quad\epsilon_{ii}M_i+\frac{1}{4}\epsilon_{ii}^2H_i+M_iH_i^{-1}M_i\leq 0,\quad i\in\mathbf{S}_k^i\end{aligned}\tag{23}$$

导出. 同理, 式 (20) 可由

$$\begin{aligned}&E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i-T_j\leq 0\\&\qquad i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,\ j\in\mathbf{S}_k^i,\ j\neq i\end{aligned}\tag{24}$$

和

$$\begin{aligned}&(A_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\alpha_{ij}(E^{\mathrm{T}}P_j-E^{\mathrm{T}}P_i-M_i)+\\&\quad\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\epsilon_{ij}T_j+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\left(\frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2W_j+T_jW_j^{-1}T_j\right)-\\&\quad\tau M_i<0,\quad i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i\end{aligned}\tag{25}$$

导出. 最后根据 Schur 引理, 可知式 (23)、(25)、(22) 和 (24) 分别等价于式 (7)、(8)、(10) 和 (11). □

下面考虑模态依赖控制器 (3) 的设计问题. 基于定理 1, 有如下定理.

定理 2. 系统 (1) 存在模态依赖控制器 (3), 使相应闭环系统是随机容许的, 如果存在矩阵 $\hat{P}_i>0$, $H_i>0$, $W_i>0$, $G_i>0$, $\hat{Q}_i$, X_i, M_i, S_i, T_i, Y_i, 满足下列线性矩阵不等式:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(A_iX_i+B_iY_i)^{\star}+\Phi_{i7} & M_i & \Phi_{i2} & \Psi_{i1}\\ * & -H_i & 0 & 0\\ * & * & \Phi_{i3} & 0\\ * & * & * & \Psi_{i2}\end{bmatrix}<0\\&\qquad k_r^i=i\in\mathbf{S}_k^i\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}(A_iX_i+B_iY_i)^{\star}+\Phi_{i8} & \Phi_{i5} & \bar{\Psi}_{i1}\\ * & \Phi_{i6} & 0\\ * & * & \bar{\Psi}_{i2}\end{bmatrix}<0,\ \ k_r^i=i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i\tag{27}$$

$$\begin{bmatrix}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i & X_i^{\mathrm{T}}E_R\\ * & -E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_jE_R\end{bmatrix}\leq 0,\quad i\in\mathbf{S},\ j\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,\ j\neq i\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i-S_j & X_i^{\mathrm{T}}E_R\\ * & -E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_jE_R\end{bmatrix}\leq 0\\&\qquad i\in\mathbf{S}_k^i,\ j\in\mathbf{S}_k^i,\ j\neq i\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i-T_j & X_i^{\mathrm{T}}E_R\\ * & -E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_jE_R\end{bmatrix}\leq 0\\&\qquad i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,\ j\in\mathbf{S}_k^i,\ j\neq i\end{aligned}\tag{30}$$

其中

$$\Phi_{i7}=\alpha_{ii}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i}^{N}\alpha_{ij}M_i+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\epsilon_{ij}S_j+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2G_j-\epsilon_{ii}M_i+\frac{1}{4}\epsilon_{ii}^2H_i$$

$$\Phi_{i8}=-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\alpha_{ij}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\alpha_{ij}M_i+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\epsilon_{ij}T_j+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\frac{1}{4}\epsilon_{ij}^2W_j-\tau M_i$$

$$\Psi_{i1}=\Big[\sqrt{\alpha_{ik_1^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\cdots,\sqrt{\alpha_{ik_{r-1}^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\sqrt{\alpha_{ik_{r+1}^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\cdots,\sqrt{\alpha_{ik_m^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R\Big]$$

$$\Psi_{i2}=-\operatorname{diag}\Big\{E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_1^i}E_R,\cdots,E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_{r-1}^i}E_R,E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_{r+1}^i}E_R,\cdots,E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_m^i}E_R\Big\}$$

$$\bar{\Psi}_{i1}=\Big[\sqrt{\alpha_{ik_1^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R,\cdots,\sqrt{\alpha_{ik_m^i}}X_i^{\mathrm{T}}E_R\Big]$$

$$\bar{\Psi}_{i2}=-\operatorname{diag}\Big\{E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_1^i}E_R,\cdots,E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_{k_m^i}E_R\Big\}$$

$$X_i=\hat{P}_iE^{\mathrm{T}}+U\hat{Q}_iV$$

此时, 模态依赖控制器 (3) 的增益为

$$K_i=Y_iX_i^{-1}\tag{31}$$

证明. 对于由模态依赖控制器 (3) 所形成闭环系统采取相同 Lyapunov 函数, 并进行弱无穷运算可得:

$$\mathscr{L}V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[(A_i^{\mathrm{T}}P_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\star}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j\Big]\boldsymbol{x}(t)\tag{32}$$

令

$$P_i=\bar{P}_iE+V^{\mathrm{T}}\bar{Q}_iU^{\mathrm{T}}$$

其中, $\bar{P}_i>0$, $|\bar{Q}_i|\neq 0$, $V\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 和 $U\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$ 分别满足 $EU=0$ 和 $VE=0$, 奇异矩阵 E 分解为 $E=E_LE_R^{\mathrm{T}}$, 可知 $E^{\mathrm{T}}P_i=P_i^{\mathrm{T}}E\geq 0$ 恒成立. 所以, 若要使系统随机稳定, 只要

$$\Big(A_i^{\mathrm{T}}P_i+K_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i\Big)^{\star}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j<0\tag{33}$$

成立. 令 $X_i=P_i^{-1}$, 进一步可得

$$X_i=P_i^{-1}=\hat{P}_iE^{\mathrm{T}}+U\hat{Q}_iV\tag{34}$$

其中, $\hat{P}_i>0$, $|\hat{Q}_i|\neq 0$ 并且 $E_L^{\mathrm{T}}\bar{P}_iE_L=(E_R^{\mathrm{T}}\hat{P}_iE_R)^{-1}$. 对式 (33) 左乘 X_i^{T}, 右乘 X_i, 并令 $Y_i=K_iX_i$, 得

$$(A_iX_i+B_iY_i)^{\star}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P_jX_i<0\tag{35}$$

可由

$$(A_iX_i+B_iY_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\pi_{ij}(X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P_jX_i-X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i)-\pi_{ii}M_i<0,\quad i\in\mathbf{S}_k^i\tag{36}$$

$$(A_i^{\mathrm{T}}X_i+B_iY_i)^{\star}+\sum_{j\in\mathbf{S}_k^i,j\neq i}^{N}\pi_{ij}(X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P_jX_i-X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i)-\tau M_i<0,\quad i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i\tag{37}$$

和

$$X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P_jX_i-X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-M_i<0,\quad i\in\mathbf{S},\ j\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i,\ j\neq i\tag{38}$$

导出, 其中式 (38) 等价于式 (28). 其余与定理 1 的证明类似. □

当系统模态信号不能实时可获得时, 可设计模态独立控制器 (4).

定理 3. 系统 (1) 存在模态独立控制器 (4), 使相应闭环系统是随机容许的, 如果存在矩阵 $\hat{P}_i>0$, $H_i>0$, $W_i>0$, $G_i>0$, $\hat{Q}_i$, X_i, M_i, S_i, T_i, Y, G 满足条件 (28) ∼ (30) 和如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}(A_iX_i+B_iY)^{\star}+\Phi_{i7} & \Phi_{i9} & M_i & \Phi_{i2} & \Psi_{i1}\\ * & -(G)^{\star} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -H_i & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{i3} & 0\\ * & * & * & * & \Psi_{i2}\end{bmatrix}<0,\quad k_r^i=i\in\mathbf{S}_k^i\tag{39}$$

$$\begin{bmatrix}(A_iX_i+B_iY)^{\star}+\Phi_{i8} & \Phi_{i9} & \Phi_{i5} & \bar{\Psi}_{i1}\\ * & -(G)^{\star} & 0 & 0\\ * & * & \Phi_{i6} & 0\\ * & * & * & \bar{\Psi}_{i2}\end{bmatrix}<0,\quad k_r^i=i\in\mathbf{S}_{\bar{k}}^i\tag{40}$$

其中

$$\Phi_{i9}=B_iY+X_i^{\mathrm{T}}-G^{\mathrm{T}}$$

此时, 模态独立控制器 (4) 的增益为

$$K=YG^{-1}\tag{41}$$

证明. 当模态独立控制器为 $u(t)=K\boldsymbol{x}(t)$, 则有

$$\Big(A_i^{\mathrm{T}}P_i+K^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}P_i\Big)^{\star}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}E^{\mathrm{T}}P_j<0\tag{42}$$

同理

$$(A_iX_i+B_iKX_i)^{\star}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}X_i^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P_jX_i<0\tag{43}$$

令 $Y=KG$, 式 (43) 等价于

$$\begin{bmatrix} \Phi_{i10} & \Phi_{i9} \\ * & -(G)^\star \end{bmatrix} < 0 \tag{44}$$

其中

$$\Phi_{i10} = (A_iX_i + B_iY)^\star + \sum_{j=1}^{N} \pi_{ij} X_i^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P_j X_i$$

因为转移速率带有不确定性且部分未知, 用定理 1 和定理 2 的方法处理 Φ_{i10}, 证明过程类似于定理 1 和定理 2, 在此忽略. □

2 仿真算例

考虑 3 个模态的广义马尔科夫跳变系统 (1), 系统参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 + d_{11} & -1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.6 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

其中, $d_{11} \geq 0$. 奇异矩阵和转移速率矩阵分别为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \bar\pi_{11} + \Delta\bar\pi_{11} & \bar\pi_{12} + \Delta\bar\pi_{12} & \bar\pi_{13} + \Delta\bar\pi_{13} \\ \bar\pi_{21} + \Delta\bar\pi_{21} & ? & ? \\ ? & ? & \bar\pi_{33} + \Delta\bar\pi_{33} \end{bmatrix}$$

其中, $\bar\pi_{11} = -0.8$, $\bar\pi_{12} = 0.3$, $\bar\pi_{13} = 0.5$, $\bar\pi_{21} = 0.5$, $\bar\pi_{33} = -0.7$, $|\Delta\bar\pi_{ij}| \leq \epsilon_{ij} = 0.1\bar\pi_{ij}$.

根据定理 1, 可知当 $d_{11} \leq d_{11}^* = 1.73$ 时, 其中 d_{11}^* 表示 d_{11} 的最大值, 定理 1 存在可行解. 利用文献 [22] 的方法, 可知当 $d_{11} \leq d_{11}^* = 1.58$ 时, 系统存在可行解. 通过比较可知, 本文的可变参数 d_{11} 的范围更大, 因此有更小的保守性.

另外, 当 $A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 + d_{12} \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$, 其中 $d_{12} \geq 0$, 其他参数不变. 令 d_{12}^* 为 d_{12} 的最大值, 通过求解可分别得到 $d_{12} \leq d_{12}^*$ 时定理 1 与文献 [22] 存在可行解的条件. 通过对比可知, 本文中 d_{12}^* 仍然较大, 更进一步验证了本文结果的保守性更小. 综上, 相关参数对比结果见表 1.

表 1 可变参数上界的比较

Table 1 Comparison of upper bound of the variable parameters

	d_{11}^*	d_{12}^*
定理 1	1.73	0.86
文献 [22]	1.58	0.79

当 $d_{11} = 1.72$ 时, 利用定理 2, 可得模态依赖控制器增益如下:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -9.8549 & 0.2389 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 26.6007 & 0.8433 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.6847 & 1.8527 \end{bmatrix}$$

将上述控制器应用到原系统, 取初始条件为

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

可得系统状态响应曲线, 如图 1 所示. 由图 1 可以看出, 所设计模态依赖控制器是有效的.

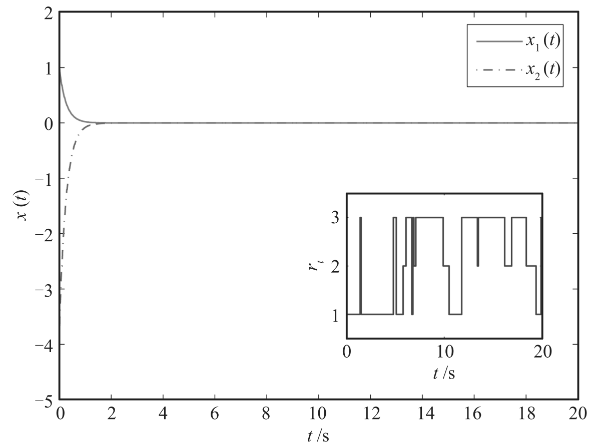

图 1 系统状态响应曲线

Fig. 1 The state response of system

同理, 当 $d_{11} = 1.2$ 时, 根据定理 3, 可得模态独立控制增益如下:

$$K = \begin{bmatrix} -1.4752 & 0.8488 \end{bmatrix}$$

3 结论

针对广义马氏跳变系统在转移速率同时满足含有不确定性和部分未知的一般情况, 分别讨论模态依赖和模态独立控制器的设计问题. 首先, 通过运用自由权矩阵和加减项的等价处理方法, 得到了系统在上述一般转移速率条件下的随机容许性条件. 所得结果与现有方法相比具有较小的保守性. 在此基础上, 进一步得到了模态依赖和模态独立控制器存在的线性矩阵不等式求解条件. 仿真算例验证了所得结果的有效性和优越性.

References

1 Krasovskii N M, Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes. *Automation and Remote Control*, 1961, **22**(1−3): 1021−1025, 1141−1146, 1289−1294

2 Boukas E K, Liu Z K. *Deterministic and Stochastic Time-delay Systems*. Boston: Birkhauser, 2002.

3 Liu Fei, Cai Yin. Constrained predictive control of Markov jump linear systems based on terminal invariant sets. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(4): 496−499
(刘飞, 蔡胤. 基于终端不变集的 Markov 跳变系统约束预测控制. 自动化学报, 2008, **34**(4): 496−499)

4 Mariton M. Control of nonlinear systems with Markovian parameter changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(2): 233−238

5 Li Y Y, Zhong M Y. On optimal fault detection for discrete-time Markovian jump linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 926−932

6 Kong S L, Zhang Z S. Optimal control of stochastic system with Markovian jumping and multiplicative noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **38**(7): 1113−1118

7 Zhao Shun-Yi, Liu Fei. Bayesian filtering of linear nonhomogeneous Markov jump system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 485−490
(赵顺毅, 刘飞. 非线性非齐次 Markov 跳变系统的贝叶斯滤波. 自动化学报, 2012, **38**(3): 485−490)

8 Wang Y Y, Shi P, Wang Q B, Duan D P. Exponential H_∞ filtering for singular Markovian jump systems with mixed mode-dependent time-varying delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I*, 2013, **60**(9): 2440−2452

9 Xu S Y, Lam J. *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

10 Boukas E K. *Control of Singular Systems with Random Abrupt Changes*. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

11 Wu Z G, Su H Y, Chu J. Robust exponential stability of uncertain singular Markovian jump time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(4): 558−563

12 Sheng Li, Yang Hui-Zhong. Stabilization control of a class of discrete-time Markov jump singular systems. *Control and Decision*, 2010, **2**(8): 1189−1194
(盛立, 杨慧中. 一类离散 Markov 跳变奇异系统的镇定控制. 控制与决策, 2010, **2**(8): 1189−1194)

13 Wu Z G, Su H Y, Chu J. Delay-dependent H_∞ control for singular Markovan jump systems with time delay. *Optimal Control Applications and Methods*, 2008, **30**(5): 443−461

14 Wang G L, Zhang Q L, Yang C Y. Dissipative control for singular Markovian jump systems with time delay. *Optimal Control Applications and Methods*, 2012, **33**(4): 415−432

15 Wang G L, Zhang Q L. Robust control of uncertain singular stochastic systems with Markovian switching via proportional-derivative state feedback. *IET Control Theory and Applications*, 2012, **6**(8): 1089−1096

16 Shi Shu-Hui. H_∞ output feedback control for a class of switched singular systems. *Control Engineering of China*, 2013, **20**(2): 357−361
(史书慧. 切换广义系统的 H_∞ 输出反馈控制. 控制工程, 2013, **20**(2): 357−361)

17 Krtolica R, Ozguner U. Stability of linear feedback systems with random communication delays. *International Journal of Control*, 1994, **59**(4): 925−953

18 Seiler P, Sengupta R. An H_∞ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 356−364

19 Zhang L, Shi Y, Chen T, Huang B. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(8): 1177−1181

20 Zhang L X. H_∞ estimation for piecewise homogeneous Markov jump linear systems. *Automatica*, 2009, **45**(11): 2570−2576

21 Zhang L X, Gao H J, Kaynak O. Network-induced constraints in networked control system — a survey. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2013, **9**(1): 403−416

22 Kao Y G, Xie J, Wang C, Karimi H R. Stabilisation of singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2014, **59**(9): 2604−2610

23 Zhang L X, Boukas E K. Mode-dependent filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Automatica*, 2009, **45**(6): 1462−1467

24 Karan M, Shi P, Kaya C Y. Transition probability bounds for the stochastic stability robustness of continuous and discrete-time Markovian jump linear systems. *Automatica*, 2006, **42**(12): 2159−2168

25 Xiong J L, Lam J. On robust stabilization of Markovian jump systems with uncertain switching probabilities. *Automatica*, 2005, **41**(5): 897−903

26 Zhang L X, Lam J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of Markov jump linear systems with incomplete transition descriptions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(7): 1695−1701

27 Zhang L X, Boukas E K, Lam J. Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(10): 2458−2464

王国良 辽宁石油化工大学副教授. 主要研究方向为广义马尔科夫跳变系统的分析与控制. 本文通信作者. E-mail: glwang985@163.com
(**WANG Guo-Liang** Associate professor at Liaoning Shihua University. His research interest covers analysis and control of singular Markovian jump systems (SMJS). Corresponding author of this paper.)

薄海英 辽宁石油化工大学硕士研究生. 主要研究方向为广义系统, 鲁棒控制. E-mail: bohaiying123@163.com
(**BO Hai-Ying** Master student at Liaoning Shihua University. Her research interest covers singular systems and robust control.)