第 41 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 41, No. 1
2015 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA January, 2015

一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用

李雪冰 [1] 马 莉 [1] 丁世宏 [1]

摘 要 二阶滑模作为高阶滑模的特殊情形, 不仅具有传统滑模鲁棒性强、对外界干扰不敏感的特点, 而且能够有效地消弱传统一阶滑模中存在的 "抖振" 现象. 本文设计了一种新的二阶滑模控制算法. 该算法的优点是假设不确定性是由非负函数限制而不是由常数限定. 因此, 该算法在实际应用中具有更广的应用范围. 此外, 算法中的加幂积分技术保证了系统在有限时间内稳定, 而不是传统二阶滑模中普遍存在的有限时间收敛, 并给出了严格的数学证明. 最后, 在倒立摆控制中的应用验证了该算法的有效性.

关键词 二阶滑模, 有限时间稳定, 加幂积分, 倒立摆

引用格式 李雪冰, 马莉, 丁世宏. 一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用. 自动化学报, 2015, **41**(1): 193−202

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140263

A New Second-order Sliding Mode Control and Its Application to Inverted Pendulum

LI Xue-Bing[1] MA Li[1] DING Shi-Hong[1]

Abstract Second-order sliding mode, as a special case of high-order sliding mode, not only has strong robustness and insensitiveness to external disturbance, but also eliminates the chattering phenomenon existing in the traditional first-order sliding mode. A new second-order sliding mode control algorithm is developed in this paper. The advantage of the algorithm lies in that it can be used to handle the uncertainty bounded by a known positive function rather than a positive constant. Consequently, the algorithm can be applied to a more general class of systems. In addition, the adding a power integrator technique guarantees the global finite-time stability rather than the finite-time convergence. Finally, the application to control of an inverted pendulum shows the effectiveness of the algorithm.

Key words Second-order sliding mode, finite-time stability, adding a power integrator, invented pendulum

Citation Li Xue-Bing, Ma Li, Ding Shi-Hong. A new second-order sliding mode control and its application to inverted pendulum. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 193−202

滑模控制法是苏联学者 Emeleyanov 等在 20 世纪 60 年代提出的一种控制方法, 本质上是一类特殊的非线性控制方法, 其非线性表现为控制的不连续性[1]. 基于该方法得到的

收稿日期 2014-04-16 录用日期 2014-07-18
Manuscript received April 16, 2014; accepted July 18, 2014
国家自然科学基金 (61203054), 江苏省高校优势学科建设工程资助项目 (PAPD, 苏政办发 (2011)6 号), 江苏省自然科学基金 (BK2012283) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61203054), the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions (PAPD, (2011)6), and Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2012283)
本文责任编委 孙希明
Recommended by Associate Editor SUN Xi-Ming
1. 江苏大学电气信息工程学院 镇江 212013
1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013

控制算法具有设计简单、鲁棒性强等优点[2]. 目前, 滑模控制有大量的研究成果. 如时滞系统的滑模控制[3]、基于自适应 Terminal 滑模的混沌振荡控制[4]、非匹配不确定高阶非线性系统递阶 Terminal 滑模控制[5]. 在实际应用中, 滑模控制器的不连续性导致滑模控制自身存在 "抖振现象", 从而限制了其广泛应用[6]. 针对 "抖振现象", 相关文献提出了多种解决方法, 如 80 年代提出的基于 "边界层" 和 "准滑动模态" 概念的 "准滑动模态控制"[7]、高为炳提出的 "基于趋近率的滑模控制"[8] 等. 高阶滑模控制方法是传统滑模控制方法的进一步推广, 它不仅具有传统滑模的强鲁棒性优点, 而且能够用来消除低阶滑模中的抖振问题[9]. 因此, 近年来高阶滑模控制吸引了研究者们的广泛关注. 例如, Levant 在文献 [10] 中系统地提出了二阶滑模控制方法, 并对二阶滑模设计原则进行了详细的阐述. 随后, 在文献 [11] 中提出了基于输出反馈控制的高阶滑模控制算法. 针对一类单输入单输出系统, 文献 [12] 利用积分滑模和有限时间稳定性理论, 给出了一种高阶滑模控制设计方法. 此后, 高阶滑模被广泛应用到多种实际系统, 如二进制控制系统[13]、大型空间飞行器姿态控制系统[14−15]、感应电机控制系统[16]、移动机器人控制系统[17]等.

值得注意的是, 二阶滑模作为高阶滑模中的特殊情形, 以其设计相对简单、有限时间收敛等优点受到许多学者的青睐. 主要原因有两点: 1) 应用二阶滑模可以直接设计控制系统的控制器. 当滑动变量的相对阶为 2 时, 利用二阶滑模理论很容易设计出系统的控制器, 该滑模控制器可以使得闭环系统具有很好的鲁棒性, 缺点是控制器不连续. 2) 二阶滑模可以消除传统一阶滑模中普遍存在的抖振问题. 当滑动变量的相对阶为 1 时, 利用传统一阶滑模进行控制设计时, 控制器不连续. 此时, 可以将不连续的控制输入作用在滑模的二阶导数上, 使得实际控制信号为不连续反馈控制的积分, 因而大大削弱了系统切换时的抖振.

二阶滑模一直是近年来滑模研究的热点问题. 1993 年, Levant 提出了二阶滑模中著名的 Twisting 算法和 Super twisting 算法[9]. Boiko 等在文献 [18] 中提出了一种基于转移特性的 "广义最优" 二阶滑模控制算法. 但是, 此方法适用于线性系统, 对于非线性系统来说计算将变得较为复杂. 值得提出的是, 如何说明一种滑模控制算法的稳定性、可靠性也是滑模算法研究的热点问题. 文献 [19] 中, Shtessel 等就一阶滑模和二阶滑模中的稳定裕度定义问题, 使用传统和现代控制方法进行了讨论. 而文献 [20] 中, Pan 等用 Lyapunov 方法对二阶滑模的稳定性进行了分析.

值得提出的是, 上述文献中的二阶滑模控制算法都是在假设系统的不确定性由一个非负常数限定的情况下提出的. 然而, 在实际应用中, 如在寻迹跟踪的应用中, 很多情况下系统的不确定性是由一个非负函数限定的, 而该非负函数给系统的分析和设计带来很多难处. 例如, 由于非负函数与系统状态相关, 理论上无法利用常数来限定该非负函数的大小, 导致传统二阶滑模中的有限时间分析方法无法适用. 针对这一问题, 也有学者提出了相应的解决方案, 但是这些控制方案的实现需要其他的附加条件. 如文献 [21] 采用自适应控制算法和积分滑模相结合的方法实现二阶滑模控制, 其不确定性是由一个函数限定的, 但是该函数要满足的条件较难验证且滑动变量参数的选取也不易.

文献 [22] 提出了一种基于齐次方法的二阶滑模控制算法, 该方法需要寻求相应的非零函数和足够大的常数来满足一个关于系统不确定的不等式. 文献 [23] 也提出了一种可以处理不确定项由非负函数限定情况下的二阶滑模控制算法, 该方法需要系统不确定项满足所谓的径向增长 (Radial-growth) 条件. 但是, 该条件中的非负函数与控制器相关, 因此验证该条件十分不易. 此外, 很多关于二阶滑模控制算法的文献中, 一般只能给出有限时间收敛性, 而无法给出 Lyapunov 稳定性证明.

针对上述问题, 本文提出了一种新的二阶滑模控制算法. 采用加幂积分技术和嵌套饱和技术, 进行二阶滑模控制设计. 与上述方法相比, 该方法具有以下优点: 1) 许多控制问题中, 特别是跟踪控制问题中, 系统的不确定性是由非负函数限定的, 而不是非负常数, 此时已有的二阶滑模控制方法已经不能适用. 本文提出的二阶滑模控制算法能够解决这一问题, 在实际应用中具有更广的应用范围. 2) 与已有文献中利用附加条件限定系统不确定项不同, 本文只需要系统不确定项满足有界性即可, 在验证条件和参数选取方面, 该方法更具有优势. 3) 采用加幂积分技术选取 Lyapunov 函数, 不仅能够保证系统有限时间收敛, 而且还能保证系统的有限时间稳定, 因而保证闭环系统的全局有限时间稳定. 本文所提出的二阶滑模控制方法在给出的例子中得到了有效验证.

1 问题描述

考虑如下非线性控制系统

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}=f(t,x)+g(t,x)u \\ s=s(t,x) \end{array}\right. \tag{1}$$

其中, $x\in\mathbf{R}^n, u\in\mathbf{R}$ 分别为系统的状态和控制输入; $f(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 是不确定光滑函数.

定义 1[9]**.** 假设系统 (1) 在非连续动态反馈控制下构成闭环, 同时假设 $s(t,x),\cdots,s^{r-1}(t,x)$ 为连续函数, 则集合 $S_r=\{x|s(t,x)=\cdots=s^{r-1}(t,x)=0\}$ 为 "r 阶滑模集", 若该集合满足非空、在 Filippov 意义下局部可积等条件, 那么系统在 S^r 上的运动称为关于滑动变量 s 的 "r 阶滑模".

本文中, 我们假设设计的滑动变量相对阶 $r=2$, 则滑动变量 s 满足:

$$\ddot{s}=a(t,x)+b(t,x)u \tag{2}$$

式中 u 是待设计的控制器, $a(t,x)=\ddot{s}|_{u=0}, b(t,x)=\frac{\partial\ddot{s}}{\partial u}$ 为不确定项, 且满足下面的假设:

假设 1. 存在一个非负函数 $\bar{a}(x)>0$ 和一个常数 $\underline{b}>0$, 满足:

$$|a(t,x)|\le\bar{a}(x),\quad b(t,x)\ge\underline{b}$$

注 1. 关于二阶滑模的著名算法, 包括 Twisting 算法、Super-twisting 算法等, 都假设 $a(t,x)$ 由常数限定. 事实上, 该限定间接假设了系统不确定为常数有界的. 这是因为, 一般情况下滑动变量都包含了系统状态信息. 由于实际系统都具有不确定性, 从而导致系统不确定被包含在滑动变量的二阶导数中. 因而 $a(t,x)$ 的常数有界间接导致了系统不确定常数有界. 众所周知, 很多情况下系统不确定是由与状态有关的函数来限定的. 因此, 若所考虑系统的不确定不满足常数有界, 那么此时对 $a(t,x)$ 进行常数限定将会导致与系统不确定由函数限定的结论相矛盾. 若 $a(t,x)$ 用系统状态的函数

来限定, 由以上分析可知, 无论系统不确定为常数有界还是函数有界都符合系统控制要求, 更具有一般性, 因而具有一定的研究意义.

本文的控制目标为: 在假设 1 的条件下, 构造一类二阶滑模控制器 u, 使得滑动变量 $s, \dot{s}$ 在有限时间内稳定, 即, $s = \dot{s} = 0$.

最后, 我们给出后续证明需要的三个引理.

引理 1[24]**.** 设 $0 < p < 1$, 且 p 是两个奇数之比, $c > 0, d > 0$; $h(x, y)$ 是任意的非负函数, 则对于任意的 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 满足:

$$
\begin{aligned}
&|x^p - y^p| \le 2^{1-p}|x - y|^p \\
&|x|^c|y|^d \le \\
&\quad \frac{c}{c+d}h(x,y)|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}h(x,y)^{-\frac{c}{d}}|y|^{c+d}
\end{aligned}
$$

引理 2[24]**.** 设 $p \in \mathbf{R}, 0 < p < 1$, 则对于任意的 $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \cdots, m$, 下面的不等式成立:

$$
(|x_1| + \cdots + |x_m|)^p \le |x_1|^p + \cdots + |x_m|^p
$$

2　主要结果

本节我们将给出本文的主要结果. 在给出主要结果之前, 定义

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = 1 \\
&\gamma_2 = \gamma_1 + \tau \\
&\gamma_3 = \gamma_2 + \tau, \quad -\frac{1}{2} < \tau < 0
\end{aligned}
$$

其中, $\tau = -\tau_1/\tau_2$ 是在 $(-1/2, 0)$ 范围内的有理数, 且 τ_1 为偶数, τ_2 为奇数.

定理 1. 针对系统 (1), 在假设 1 的条件下, 若二阶滑模控制器设计为

$$
\begin{aligned}
u = &-\beta_2\left[\sigma\left(\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\right)\right]^{\gamma_3} - \\
&\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\mathrm{sgn}\left(\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中, 饱和函数 $\sigma(x)$ 定义为

$$
\sigma(x) = \begin{cases} \varepsilon\mathrm{sgn}(x), & |x| > \varepsilon \\ x, & |x| \le \varepsilon \end{cases}, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{4}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 > 1 \\
&\beta_2 > \max\left\{\frac{\gamma_2}{\underline{b}}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}(1+\beta_1)^{2-\frac{1}{\gamma_2}},\right. \\
&\left.\frac{2^{\frac{-4\tau}{1+\tau}}\left(\frac{1-\tau}{\beta_1}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} + 2^{-\tau}\beta_1^{\frac{1}{1+\tau}} + (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}}{\underline{b}}\right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

则滑动变量 $s, \dot{s}$ 在有限时间内稳定.

注 2. 此处, τ 的选取可以使得 γ_i 具有奇数之比的形式. 设 $\tau = -\tau_1/\tau_2$, 则 $\gamma_2 = (\tau_2 - \tau_1)/\tau_2, \gamma_3 = (\tau_2 - 2\tau_1)/\tau_2$. 由于 τ_1 为偶数, τ_2 为奇数, 所以 $\tau_2 - \tau_1$ 和 $\tau_2 - 2\tau_1$ 都为奇数. 因此 γ_2 和 γ_3 都可以写成奇数与奇数相除的形式. 事实上, 此处 τ 可以是 $(-1/2, 0)$ 范围内所有实数, 此时只需要将控制器中的 $(\cdot)^{\gamma_i}$ 改为 $\mathrm{sgn}(\cdot)|\cdot|^{\gamma_i}$ 即可. 类似情况参见文献 [25]. 本文为了简化主定理的证明, 对 τ 的选择进行了限定.

上述定理的证明分三步:

1) 证明在满足式 (5) 条件时, 控制器 (3) 保证系统状态在有限时间内收敛并停留在区域

$$
Q = \{(s, \dot{s}) : |\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)| \le \varepsilon\}
$$

2) 进一步证明系统状态将会收敛到区域

$$
B = \{(s, \dot{s}) : |\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)| \le \varepsilon, |s| \le \varepsilon\}
$$

3) 证明在区域 B 内, 系统状态将会有限时间稳定到零.

注 3. 控制器的控制作用体现在两方面: 1) 饱和控制保证滑动变量收敛到区域 B. 注意到滑动变量必须首先收敛到区域 Q, 这样才能使得控制器中非线性项 $\dot{s}^{1/\gamma_2} + \beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)$ 发挥作用, 进而继续收敛到区域 B. 2) 在区域 B 内, 所有的饱和作用失效, 恢复到非饱和情形, 控制器驱动滑动变量有限时间稳定到零. 事实上, 区域 Q 与控制器的控制作用有很大关系. 在区域 Q 之外, 控制器中的饱和函数为一个常数, 这时候控制器的镇定作用无法体现. 只有在区域 Q 内, 饱和函数退化为非饱和函数后才能够起到控制作用, 进一步将滑动变量控制到零点.

下面给出详细的证明.

证明.

步骤 1. 存在有限时刻 T, 使得当 $t \ge T$ 时,

$$
(s(t), \dot{s}(t)) \in Q
$$

首先, 证明存在有限时刻 T, 使得 $(s(T), \dot{s}(T)) \in Q$.

利用反证法, 假设上述命题不成立, 则对于任意的 $t \ge 0$, 都有:

$$
\left|\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\right| > \varepsilon
$$

成立. 也即下面的两种情形之一成立

情形 1.

$$
\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s) > \varepsilon, \quad \forall t \ge 0 \tag{6}
$$

情形 2.

$$
\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s) < -\varepsilon, \quad \forall t \ge 0 \tag{7}
$$

下面证明情形 1 不可能成立.

将控制器 (3) 带入式 (2) 中, 得:

$$
\begin{aligned}
\ddot{s}(t) = &a(t,x) + b(t,x)u = \\
&a(t,x) - b(t,x)\times \\
&\left[\beta_2\left(\sigma\left(\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\right)\right)^{\gamma_3} + \right. \\
&\left.\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\mathrm{sgn}\left(\dot{\mathrm{s}}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(\mathrm{s})\right)\right]
\end{aligned} \tag{8}
$$

由式 (6) 可知 $\mathrm{sgn}\left(\dot{s}^{1/\gamma_2} + \beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)\right) > 0$. 结合 $\sigma(\cdot)$ 的定义 (4) 可知 $\sigma\left(\dot{s}^{1/\gamma_2} + \beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)\right) = \varepsilon$. 所以

$$
\left(\sigma\left(\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\right)\right)^{\gamma_3} = \varepsilon^{\gamma_3} \tag{9}
$$

那么, 式 (8) 可简化为

$$\ddot{s}(t)=a(t,x)-b(t,x)\left(\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}+\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\right) \tag{10}$$

由假设 1, $|a(t,x)|\le\bar{a}(x), b(t,x)\ge\underline{b}$. 那么

$$\begin{aligned}\ddot{s}(t)\le a(t,x)-\underline{b}\left(\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}+\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\right)\le\\ \bar{a}(x)-\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}-\underline{b}\times\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\le\\ -\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}\end{aligned} \tag{11}$$

对上式两边积分可得:

$$\dot{s}(t)\le\dot{s}(0)-\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}t \tag{12}$$

将式 (12) 带入式 (6), 则:

$$\begin{aligned}\varepsilon<\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}}+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)<\\ (\dot{s}(0)-\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}t)^{\frac{1}{\gamma_2}}+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)\end{aligned} \tag{13}$$

由 $\sigma(\cdot)$ 的定义可知 $|\sigma(\cdot)|\le\varepsilon$, 所以

$$\varepsilon<(\dot{s}(0)-\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}t)^{\frac{1}{\gamma_2}}+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\varepsilon \tag{14}$$

观察上式, 注意到当 t 趋于无穷大时, $\dot{s}(0)-\underline{b}\beta_2\varepsilon^{\gamma_3}t$ 为负无穷大. 而 $1/\gamma_2$ 是奇数相除的形式, $\beta_1^{1/\gamma_2}\varepsilon$ 为常数. 因此当 t 趋于无穷大时, 不等式 (14) 右端也趋于负无穷大, 即当 $t\to\infty,\varepsilon<-\infty$. 这显然与 $\varepsilon>0$ 矛盾. 类似地, 我们可以证明情形 2 也不成立. 因此, 存在有限时刻 T, 使得$(s(T),\dot{s}(T))\in Q$.

下面证明当 $\forall\, t\ge T$ 时, $(s(t),\dot{s}(t))\in Q$.

令 $s_1=\dot{s}^{1/\gamma_2}+\beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)$, 并对 s_1 求导可得:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1\ =&\frac{1}{\gamma_2}\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}-1}\Big\{a(t,x)-b(t,x)\Big[\beta_2(\sigma(s_1))^{\gamma_3}+\\ &\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\mathrm{sgn}\,(s_1)\Big]\Big\}+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\dot{\sigma}(s)\end{aligned} \tag{15}$$

假设当 $\forall\, t\ge T$ 时, $(s,\dot{s})$ 会从区域 Q 逃离. 一种可能为穿过边界曲线 $s_1=\varepsilon$ (如图 1 所示); 另一种可能是穿越边界曲线 $s_1=-\varepsilon$.

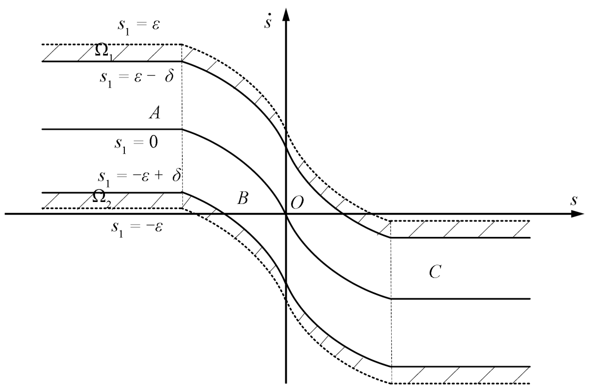

图 1 $s-\dot{s}$ 相平面图

Fig. 1 Phase plot of $s-\dot{s}$

由图 1 可知

$$Q=A\cup B\cup C$$

其中

$$A=\{(s,\dot{s}):(s,\dot{s})\in Q\}\cap\{(s,\dot{s}):s<-\varepsilon\}$$

$$B=\{(s,\dot{s}):(s,\dot{s})\in Q\}\cap\{(s,\dot{s}):|s|\le\varepsilon\}$$

$$C=\{(s,\dot{s}):(s,\dot{s})\in Q\}\cap\{(s,\dot{s}):s>\varepsilon\}$$

由 $s_1=\dot{s}^{1/\gamma_2}+\beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)$ 可知, $\dot{s}^{1/\gamma_2}=s_1-\beta_1^{1/\gamma_2}\sigma(s)$. 则有 $|\dot{s}^{1/\gamma_2}|\le|s_1|+\beta_1^{1/\gamma_2}|\sigma(s)|$, 即 $|\dot{s}|\le(|s_1|+\beta_1^{1/\gamma_2}|\sigma(s)|)^{\gamma_2}$. 当 $(s,\dot{s})\in Q$ 时, 易知 $|s_1|\le\varepsilon$. 结合引理 1, 对不等式 $|\dot{s}|\le(|s_1|+\beta_1^{1/\gamma_2}|\sigma(s)|)^{\gamma_2}$ 进行放缩可得:

$$\begin{aligned}|\dot{s}|\ &\le(|s_1|+|\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)|)^{\gamma_2}\le\\ &(\varepsilon+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\varepsilon)^{\gamma_2}=\\ &\varepsilon^{\gamma_2}(1+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}})^{\gamma_2}\le\\ &(1+\beta_1)\varepsilon^{\gamma_2}\end{aligned} \tag{16}$$

定义

$$\Omega_1=\{(s,\dot{s}):\varepsilon-\delta\le s_1<\varepsilon\}$$

其中, $\delta<\varepsilon$ 为任意小的待确定非负常数. 因此, 当 $\forall(s,\dot{s})\in\Omega_1\cap(A\cup C)$ 时, 有 $|\sigma(s)|=\varepsilon$. 当 $\forall(s,\dot{s})\in\Omega_1\cap B$ 时, 有 $\sigma(s)=s$. 注意到对任意 $(s,\dot{s})\in\Omega_1\cap(A\cup C)$, 有 $\dot{s}\ne0$. 由假设 1 可知 $|a(t,x)|\le\bar{a}(x), b(t,x)\ge\underline{b}$. 则由式 (15) 可得, 当 $\forall(s,\dot{s})\in\Omega_1\cap(A\cup C)$ 时,

$$\begin{aligned}&\dot{s}_1=\\ &\frac{1}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}\left[a(t,x)-b(t,x)\left(\beta_2 s_1^{\gamma_3}+\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\right)\right]\le\\ &\frac{1}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}\left[\bar{a}(x)-b(t,x)\left(\beta_2 s_1^{\gamma_3}+\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\right)\right]\le\\ &-\frac{1}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}\underline{b}\beta_2(\varepsilon-\delta)^{\gamma_3}<0\end{aligned} \tag{17}$$

当 $\forall(s,\dot{s})\in\Omega_1\cap B\setminus\{(s,\dot{s}):|s|=\varepsilon\}$ 时, 由假设 1 易知:

$$\begin{aligned}&\dot{s}_1\le\\ &\frac{1}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}\left[\bar{a}(x)-\underline{b}\left(\beta_2 s_1^{\gamma_3}+\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\right)\right]+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\dot{s}=\\ &-\frac{\underline{b}\beta_2}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}s_1^{\gamma_3}+\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\dot{s}\end{aligned} \tag{18}$$

将式 (16) 带入上式, 可得:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1\le&-\frac{\underline{b}\beta_2}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}(\varepsilon-\delta)^{\gamma_3}+\\ &\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}((1+\beta_1)\varepsilon^{\gamma_2})^{2-\frac{1}{\gamma_2}}=\\ &\frac{\underline{b}}{\gamma_2}|\dot{s}|^{\frac{1}{\gamma_2}-1}(\varepsilon-\delta)^{\gamma_3}\times\\ &\left[-\beta_2+\frac{\gamma_2}{\underline{b}}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}(1+\beta_1)^{2-\frac{1}{\gamma_2}}\frac{\varepsilon^{\gamma_3}}{(\varepsilon-\delta)^{\gamma_3}}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

由条件 (5), 可知:

$$\beta_2>\frac{\gamma_2}{\underline{b}}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}(1+\beta_1)^{2-\frac{1}{\gamma_2}}$$

因此存在足够小的 δ, 使得 $\dot{s_1} \le 0$. 即, 当 $\forall (s,\dot{s}) \in \Omega_1 \cap B \setminus \{(s,\dot{s}) : |s| = \varepsilon\}$ 时,

$$\dot{s_1} \le 0 \tag{20}$$

由式 (17) 和 (20) 可知:

$$\dot{s}_1 \le 0, \quad \forall (s,\dot{s}) \in \Omega_1 \setminus \{(s,\dot{s}) : |s| = \varepsilon\} \tag{21}$$

类似于得到式 (21), 也可得到:

$$\dot{s}_1 \ge 0, \quad \forall (s,\dot{s}) \in \Omega_2 \setminus \{(s,\dot{s}) : |s| = -\varepsilon\} \tag{22}$$

其中, $\Omega_2 = \{(s,\dot{s}) : -\varepsilon < s_1 \le -\varepsilon + \delta\}$. 注意到当 $s \in Q \cap \{(s,\dot{s}) : |s| = \varepsilon\}$ 时, 总有 $\dot{s} \ne 0$, 也即系统状态不会停留在线段 $|s| = \varepsilon$ 上. 因此, 由式 (21) 和 (22) 可知:

$$(s,\dot{s}) \in Q, \quad \forall\ t \ge T$$

步骤 2. 系统状态 $(s,\dot{s})$ 进一步收敛到区域

$$B = \{(s,\dot{s}) : |\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s)| \le \varepsilon, |s| \le \varepsilon\}$$

由步骤 1 知道, 若 $(s,\dot{s}) \in Q$, 有:

$$-\varepsilon \le \dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\sigma(s) \le \varepsilon$$

考虑当 $(s,\dot{s}) \in A$ 时, $\sigma(s) = -\varepsilon$, 所以,

$$-\varepsilon \le \dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} - \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\varepsilon \le \varepsilon$$

即

$$\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} \ge (\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}} - 1)\varepsilon$$

由条件 (5) 知, $\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}} > 1$, 所以 $\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} > 0$.

因此, 得到:

$$\dot{s} > 0, \quad \forall (\dot{s}, s) \in A \tag{23}$$

类似地, 也有:

$$\dot{s} < 0, \quad \forall (\dot{s}, s) \in C \tag{24}$$

结合式 (23) 和式 (24) 可知 $(s,\dot{s})$ 在有限时间内收敛并停留在区域 B 内.

步骤 3. $(s,\dot{s})$ 在有限时间内收敛到零.

当 $(s,\dot{s}) \in B$ 时, 可知控制器 (3) 退化为

$$\begin{aligned} u \ &= -\beta_2\left(\dot{s}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}s\right)^{\gamma_3} - \\ &\frac{\bar{a}(x)}{\underline{b}}\mathrm{sgn}\left(\dot{\mathrm{s}}^{\frac{1}{\gamma_2}} + \beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\mathrm{s}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

令 $y_1 = s, y_2 = \dot{s}$, 系统 (2) 可以转化为

$$\begin{aligned} &\dot{y_1} = y_2 \\ &\dot{y_2} = a(t,x) + b(t,x)u \end{aligned} \tag{26}$$

下面利用加幂积分技术[24, 26] 证明在控制器 (25) 的作用下系统 (26) 全局有限时间稳定.

取 $V_1(y_1) = y_1^{2-\tau}/(2-\tau)$, 并对 $V_1(y_1)$ 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V_1}(y_1) \ &= y_1^{1-\tau}y_2 = \\ &y_1^{1-\tau}y_2^* + y_1^{1-\tau}(y_2 - y_2^*) \end{aligned} \tag{27}$$

其中, y_2^* 为待设计的虚拟控制器. 令

$$y_2^* = -\beta_1 y_1^{1+\tau}$$

于是式 (27) 变为

$$\dot{V_1}(y) = -\beta_1 y_1^2 + y_1^{1-\tau}(y_2 - y_2^*) \tag{28}$$

取 Lypunov 函数

$$V_2(y_1,y_2) = V_1(y_1) + \int_{y_2^*}^{y_2}(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}} - {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}})^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu$$

则有下列命题成立, 该命题的证明类似于文献 [24] 中命题 B.1 和 B.2 的证明, 详细证明见附录.

命题 1. 函数 $V_2(y_1,y_2)$ 为可导、正定且径向无界的.

由命题 1, 对 $V_2(y_1,y_2)$ 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V_2}(y_1,y_2) \ &\le -\beta_1 y_1^2 + y_1^{1-\tau}(y_2 - y_2^*) + \\ &|y_2 - y_2^*|\left|\xi_2^{-2\tau}\frac{\partial {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}y_2\right| + \xi_2^{1-2\tau}\dot{y_2} \end{aligned} \tag{29}$$

式中, $\xi_2 = y_2^{1/\gamma_2} - {y_2^*}^{1/\gamma_2}$. 由引理 1 (取 $p = \gamma_2, h(x,y) = \frac{\beta_1}{2^{2-\gamma_2(1-\tau)}}, c = 1-\tau, d = \gamma_2$) 可知:

$$\begin{aligned} &y_1^{1-\tau}(y_2 - y_2^*) = \\ &\quad y_1^{1-\tau}\left[(y_2^{\frac{1}{\gamma_2}})^{\gamma_2} - ({y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}})^{\gamma_2}\right] \le \\ &\quad 2^{-\tau}|y_1|^{1-\tau}|\xi_2|^{\gamma_2} \le \\ &\quad \frac{\beta_1}{4}y_1^2 + \frac{1+\tau}{2^{\gamma_2}}\left(\frac{2^{2-\gamma_2(1-\tau)}}{\beta_1}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\xi_2^2 \le \\ &\quad \frac{\beta_1}{4}y_1^2 + 2^{\frac{-4\tau}{1+\tau}}\left(\frac{1-\tau}{\beta_1}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\xi_2^2 \end{aligned} \tag{30}$$

注意到 $\frac{\partial {y_2^*}^{1/\gamma_2}}{\partial y_1} = -\beta_1^{1/\gamma_2}$, $|y_2 - y_2^*| \le 2^{1-\gamma_2}|\xi_2|^{\gamma_2}$. 那么

$$|y_2 - y_2^*|\left|\xi_2^{-2\tau}\frac{\partial {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}y_2\right| \le 2^{1-\gamma_2}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}|\xi_2|^{1-\tau}|y_2| \tag{31}$$

此外, 因为 $y_2 = (y_2^{1/\gamma_2})^{\gamma_2} = (\xi_2 + {y_2^*}^{1/\gamma_2})^{\gamma_2}$, 所以有 $|y_2| \le |\xi_2|^{\gamma_2} + |y_2^*|$. 故式 (31) 可以进一步化为

$$\begin{aligned} &|y_2 - y_2^*|\left|\xi_2^{-2\tau}\frac{\partial {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}y_2\right| \le \\ &\quad 2^{1-\gamma_2}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}|\xi_2|^{1-\tau}(|\xi_2|^{\gamma_2} + |y_2^*|) \le \\ &\quad 2^{1-\gamma_2}\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}|\xi_2|^2 + 2^{1-\gamma_2}\beta_1^{1+\frac{1}{\gamma_2}}|\xi_2|^{1-\tau}|y_1|^{\gamma_2} \end{aligned} \tag{32}$$

再次利用引理 1 (取 $h(x,y) = 1/(2^{1-\gamma_2}\beta_1^{1/\gamma_2}\gamma_2), c = \gamma_2, d =$

$1-\tau)$, 可得:

$$
\begin{aligned}
&2^{1-\gamma_2}\beta_1^{1+\frac{1}{\gamma_2}}|\xi_2|^{1-\tau}|y_1|^{\gamma_2} \le \\
&\frac{1}{2}\beta_1 y_1^2 + 2^{1-\gamma_2}\frac{1-\tau}{2}\beta_1^{1+\frac{1}{\gamma_2}} \times \\
&\left(2^{1-\gamma_2}(1+\tau)\beta_1^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\xi_2^2 \le \\
&\frac{1}{2}\beta_1 y_1^2 + (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}\xi_2^2
\end{aligned}
\tag{33}
$$

将式 (33) 带入不等式 (32) 中, 有:

$$
\begin{aligned}
&|y_2 - y_2^*|\left|\xi_2^{-2\tau}\frac{\partial y_2^{*\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}y_2\right| \le \\
&\frac{1}{2}\beta_1 y_1^2 + \left[2^{-\tau}\beta_1^{\frac{1}{1+\tau}} + (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}\right]\xi_2^2
\end{aligned}
\tag{34}
$$

综上所述, 有:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(y_1,y_2) \quad &\le -\frac{\beta_1}{4}y_1^2 + \left[2^{\frac{-4\tau}{1+\tau}}\left(\frac{1-\tau}{\beta_1}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} + \right.\\
&\left. 2^{-\tau}\beta_1^{\frac{1}{1+\tau}} + (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}\right]\xi_2^2 + \\
&\xi_2^{1-2\tau}(a(t,x)+b(t,x)u)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

注意到 $\dot{s}^{1/\gamma_2} + \beta_1^{1/\gamma_2}s = y_2^{1/\gamma_2} - y_2^{*1/\gamma_2} = \xi_2$. 将控制器 (25) 代入上面的不等式中, 根据假设 1, 可知:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(y_1,y_2) \quad &\le -\frac{\beta_1}{4}y_1^2 - \left[\underline{b}\beta_2 - 2^{\frac{-4\tau}{1+\tau}}\left(\frac{1-\tau}{\beta_1}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} - \right.\\
&\left. 2^{-\tau}\beta_1^{\frac{1}{1+\tau}} - (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}\right]\xi_2^2 - \\
&\bar{a}(x)|\xi_2|^{1-2\tau} + \xi_2^{1-2\tau}a(t,x)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

令 $\bar{\gamma} = \min\{\beta_1/4, \underline{b}\beta_2 - 2^{\frac{-4\tau}{1+\tau}}(\frac{1-\tau}{\beta_1})^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} - 2^{-\tau}\beta_1^{1/(1+\tau)} - (1-\tau)\beta_1^{\frac{3-\tau^2}{1-\tau^2}}\}$. 由条件 (5) 可知, $\bar{\gamma} > 0$. 结合上面的不等式 (36) 得到:

$$
\dot{V}_2(y_1,y_2) \le -\bar{\gamma}y_1^2 - \bar{\gamma}\xi_2^2 \tag{37}
$$

综上, 根据 $V_2(y_1,y_2)$ 和引理 1, 有:

$$
\begin{aligned}
V_2(y_1,y_2) \le &\frac{1}{2-\tau}y_1^{2-\tau} + 2^{1-\gamma_2}\xi_2^{2-\tau} \le \\
&2(y_1^{2-\tau} + \xi_2^{2-\tau})
\end{aligned}
$$

令 $c = 2^{-\frac{2}{2-\tau}}\bar{\gamma}$, $\alpha = 2/(2-\tau)$. 可以得到:

$$
\dot{V}_2(y_1,y_2) + cV_2^{\alpha}(y_1,y_2) \le 0
$$

注意到 $0 < \alpha < 1$, 根据文献 [27] 中的有限时间稳定性定理, 易知系统 (25) 和 (26) 是有限时间稳定的. □

注 4. 当 $a(t,x)$ 为函数限定时, 主要有两种控制方法. 第一种方法是文献 [23] 中基于径向增长 (Radial-growth) 条件的二阶滑模控制方法. 该方法需要系统不确定项满足径向增长条件, 即不确定项 $a(t,x)$ 需要满足 $|a(t,x)| \le \Phi(x,u)$, 且

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1,x_2,u_1,u_2 \quad \text{s.t.}\ \|x_1\| > \|x_2\|, \|u_1\| > \|u_2\| \\
&\implies \Phi(x_1,u_1) > \Phi(x_2,u_2)
\end{aligned}
$$

由该条件可见, 不确定函数的上界与控制器相关, 因此验证该条件十分不易. 值得指出的是, 文中所考虑的滑模系统中不确定项 $a(t,x)$ 并不一定满足文献 [23] 中的径向增长条件, 因而文献 [23] 中的方法无法应用于系统 (2). 另外, 文献 [22] 利用系统的齐次性质提出了一种二阶滑模控制方法. 该方法需要存在一个局部有界的 Lebesgue 可测非零函数 $\Psi(t,x)$, 使得对任意的正数 d, 有一个足够大的常数 κ 使得:

$$
\kappa \cdot b(t,x) \cdot \Psi(t,x) \ge d + |a(t,x)|
$$

在满足上述条件下, 控制器可以设计为

$$
u = -\kappa\Psi(t,x)\frac{|\dot{s}| + \kappa_0|s|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}(s)}{|\dot{s}| + \kappa_0|s|^{\frac{1}{2}}}, \quad \kappa_0 > 0 \tag{38}
$$

文献 [22] 中只给出了 $\Psi(t,x)$ 和 κ 的存在性, 并没有说明如何具体地选取 $\Psi(t,x)$ 和 α. 因此, 实际应用起来很不方便, 且控制性能受 $\Psi(t,x)$ 和 κ 的影响较大. 相对于文献 [22−23] 中方法的条件来说, 本文中的条件验证非常简单, 只需要知道 $|a(t,x)|$ 的上界和 $b(t,x)$ 的下界即可.

下面我们将给出一个例子, 说明二阶滑模控制是如何避免抖振现象的.

例 1. 考虑如下非线性控制系统

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\dot{x_1} = x_2 \\
&\dot{x_2} = f(t,x) + g(t,x)u \\
&s = s(t,x)
\end{aligned}
\right.
\tag{39}
$$

其中, $f(t,x) = \mathrm{e}^{x_2}\cos(x_1)$, $g(t,x) = 1 + \sin^2(t), s(t,x) = x_2 - \sin(t)$. 则

$$
\begin{aligned}
\ddot{s} \ =\ &\dot{f}(t,x) + \dot{g}(t,x)u + g(t,x)\dot{u} + \sin(t) = \\
&\mathrm{e}^{2x_2}\cos^2(x_1) + \sin(t) - \mathrm{e}^{x_2}x_2\sin(x_1) + \\
&\left(\sin(2t) + \mathrm{e}^{x_2}\cos(x_1)(1+\sin^2(t))\right)u + \\
&(1+\sin^2(t))\dot{u} = \\
&a(t,x) + b(t,x)v
\end{aligned}
$$

其中, $a(t,x) = \mathrm{e}^{2x_2}\cos^2(x_1) + \sin(t) - \mathrm{e}^{x_2}x_2\sin(x_1) + \left(\sin(2t) + \mathrm{e}^{x_2}\cos(x_1)(1+\sin^2(t))\right)u$, $b(t,x) = 1 + \sin^2(t)$, $v = \dot{u}$.

控制目标为: 在有限时间内使得 $s = \dot{s} = 0$, 也就是说 x_2 在有限时间跟踪上曲线 $\sin(t)$.

一般情况下, 控制器的执行机构总存在控制受限, 此处, 限定 $|u| \le 5$. 因此, $|a(t,x)| \le \mathrm{e}^{2x_2} + 1 + \mathrm{e}^{x_2}|x_2| + 5\left(1 + 2\mathrm{e}^{x_2}\right), b(t,x) \ge 1$. 故取

$$
\bar{a}(x) = \mathrm{e}^{2x_2} + 1 + \mathrm{e}^{x_2}|x_2| + 5\left(1 + 2\mathrm{e}^{x_2}\right), \quad \underline{b} = 1
$$

令 $\tau = -2/9$, $\varepsilon = 1$, $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 15$. 根据定理 1, 虚拟控制器可以设计为

$$
\begin{aligned}
v = &-15\left[\sigma(\dot{s}^{\frac{9}{7}} + 1.5^{\frac{9}{7}}\sigma(s))\right]^{\frac{5}{9}} - \\
&\bar{a}(x)\mathrm{sgn}(\dot{\mathrm{s}}^{\frac{9}{7}} + 1.5^{\frac{9}{7}}\sigma(\mathrm{s}))
\end{aligned}
\tag{40}
$$

实际控制器为

$$u = -15\int_0^t \left[\sigma(\dot{s}^{\frac{9}{7}} + 1.5^{\frac{9}{7}}\sigma(s))\right]^{\frac{5}{9}} \mathrm{d}t - \int_0^t \bar{a}(x)\mathrm{sgn}(\dot{s}^{\frac{9}{7}} + 1.5^{\frac{9}{7}}\sigma(s))\mathrm{d}t \tag{41}$$

在控制器 (41) 作用下, 系统 (39) 的仿真结果如图 2～4 所示. 由图 2 可知状态 x_1 能够有效地跟踪曲线 $\sin(t)$. 图 3 为虚拟控制 v, 图 4 为实际控制器 u. 由图 4 可知, 实际控制量为连续的.

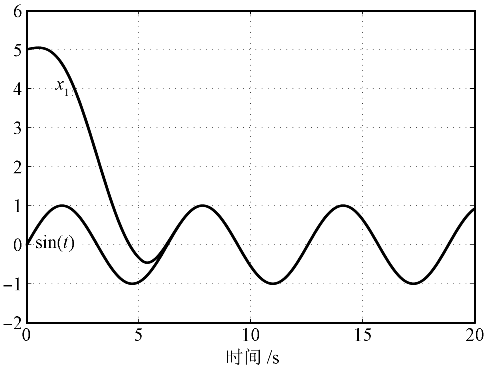

图 2　系统状态跟踪曲线

Fig. 2　Tracking curve of system state

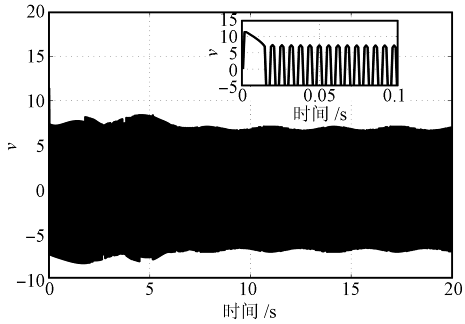

图 3　虚拟控制器 (40) 的响应曲线

Fig. 3　Response curve of virtual controller (40)

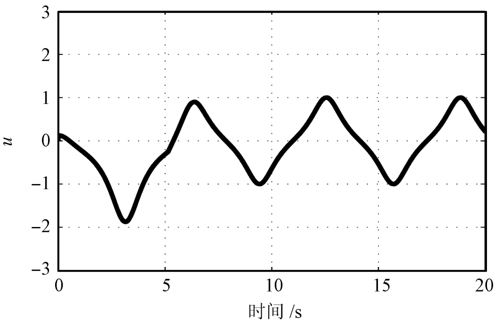

图 4　控制器 (41) 的响应曲线

Fig. 4　Response curve of controller (41)

3　倒立摆控制系统设计

倒立摆控制系统是一个复杂的、不稳定的非线性系统. 对倒立摆系统的研究能有效地反映控制中的许多典型问题: 如非线性问题、鲁棒性问题、镇定问题、随动问题以及跟踪问题等. 通过对倒立摆的控制, 用来检验新的控制方法是否有较强的处理非线性和不稳定性问题的能力[28].

倒立摆的控制问题就是使摆杆尽快地达到一个平衡位置, 并且使之没有大的振荡和过大的角度和速度. 当摆杆到达期望的位置后, 系统能克服随机扰动而保持稳定的位置[29].

二阶倒立摆模型一般可由如下形式的数学模型描述[30]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{J}u - \dfrac{MgL}{2J}\sin(x_1) - \dfrac{V_s}{J}x_2 + \rho \end{cases} \tag{42}$$

其中, x_1 和 x_2 分别为摆角和摆速; g 是重力加速度; M 为摆杆质量; L 为摆长; $J = ML^2$ 为单摆的转动惯量; V_s 是粘滞摩擦系数; ρ 为小于 1 的外部扰动.

控制任务为: 设计控制器使得摆角和摆速尽快趋近零, 即 $x_1 \to 0, x_2 \to 0$.

为此, 选择控制输出 $s = x_1$, 则

$$\dot{s} = x_2, \ddot{s} = \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \rho$$

若采用传统的二阶滑模控制算法, 需要对 $a(t,x) = -\frac{MgL}{2J}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \rho$ 进行常数限定. 由于此处 x_2 的信息未知, 故只能采取较大的常数 M 来压制, 可取 $|a(t,x)| \le M$. 基于传统的 Twisting 算法[9], 控制器可以设计为

$$u = -\lambda_1\mathrm{sgn}(s) - \lambda_2\mathrm{sgn}(\dot{s}),\quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0 \tag{43}$$

其中, $(\lambda_1+\lambda_2)\frac{1}{J} > (\lambda_1-\lambda_2)\frac{1}{J} + 2M, (\lambda_1-\lambda_2)\frac{1}{J} > M$.

另外, 取 $\kappa = 5, \kappa_0 = 2$ 及 $\Psi(t,x) = x_2^2 + 1$, 基于文献 [22] 中的齐次方法, 也可以设计控制器为

$$u = -5(x_2^2+1)\frac{|\dot{s}| + 2|s|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sgn}(s)}{|\dot{s}| + 2|s|^{\frac{1}{2}}} \tag{44}$$

与此同时, 选择 $\bar{a}(x) = \frac{MgL}{2J} + \frac{V_s}{J}|x_2| + 1$, $\underline{b} = 1/J$. 取 $\tau = -2/7, \varepsilon = 1$, 所以有 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 5/7, \gamma_3 = 3/7$. 由条件 (5), 可取 $\beta_1 = 1.1, \beta_2 = 10$. 所以, 根据定理 1, 控制器可以设计为

$$u = -10\left[\sigma(\dot{s}^{\frac{7}{5}} + 1.1^{\frac{7}{5}}\sigma(s))\right]^{\frac{3}{7}} - \left(\frac{MgL}{2} + V_s|x_2| + J\right)\mathrm{sgn}(\dot{s}^{\frac{7}{5}} + 1.1^{\frac{7}{5}}\sigma(s)) \tag{45}$$

设 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}, V_s = 0.18, M = 1.1\,\mathrm{kg}, L = 1\,\mathrm{m}$. 初始状态设为 $(x_1(0), x_2(0)) = (-\pi/3, 2)$, 外部干扰 $\rho = 0.5\sin(2t) + 0.5\cos(5t)$, 并记 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. 为了比较的公平性, 控制量限幅统一设置为 $|u| \le 15$.

对控制器 (43) 来说, 若取 $|a(t,x)| \le M = 5$, 经过计算可知其参数范围为 $\lambda_1 > 11, \lambda_2 > 5.5$. 取 $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 6$. 在控制器 (43) 作用下, 系统 (42) 的仿真结果如图 5 和图 6 所示.

由图 5 可知, Twisting 算法的 Twisting 特性导致系统的动态性能较差, 且收敛速度较慢. 此外, 对 $a(t,x)$ 的估计也是一个问题. 若对 $a(t,x)$ 的估计过大, 会导致控制量长期处于饱和状态, 势必影响系统动态性能. 若对 $a(t,x)$ 的估计过小, 将导致闭环系统不稳定, 滑动变量无法收敛. 例

如, 当取 $M=2$ 时, 可选取 $\lambda_1=5, \lambda_2=3$, 若初始状态为 $(x_1(0), x_2(0))=(-\pi/3, 100)$, 则系统状态不会收敛. 因此, 利用传统二阶滑模方法时, 对 $a(t,x)$ 的估计非常重要.

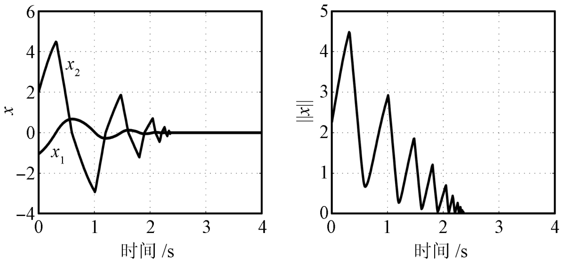

图 5 控制器 (43) 作用下系统状态 x_1 和 x_2 的响应曲线

Fig. 5 Response curves of the system states x_1 and x_2 under controller (43)

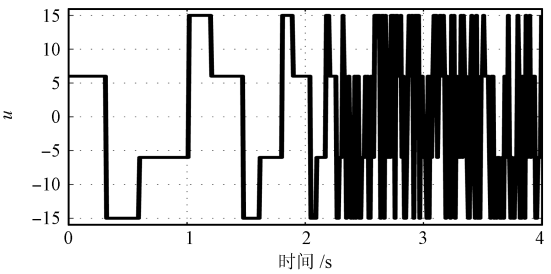

图 6 控制器 (43) 的响应曲线

Fig. 6 Response curve of controller (43)

控制器 (44) 下得到的仿真结果如图 7 和 8 所示. 图 7 是状态的响应曲线, 图 8 是控制器 u 的响应曲线. 需要注意的是, 此处由于没有给出 κ 和 $\Psi(t,x)$ 的具体范围, 因而很难

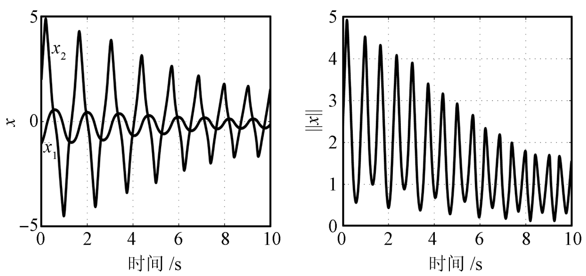

图 7 控制器 (44) 作用下系统状态 x_1 和 x_2 的响应曲线

Fig. 7 Response curves of the system states x_1 and x_2 under controller (44)

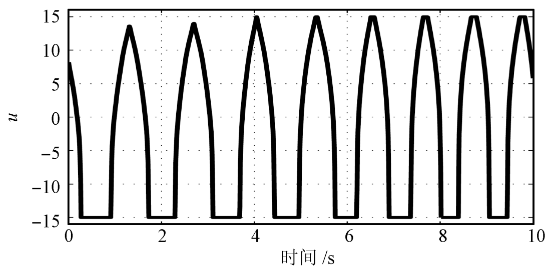

图 8 控制器 (44) 的响应曲线

Fig. 8 Response curve of controller (44)

选择. 经过作者验证, 多数情况下, 选择好的 κ 和 $\Psi(t,x)$ 使得系统动态性能很差, 系统状态的振动现象非常明显. 但是, 增加 κ 的值总能够使得系统稳定. 文献 [22] 的仿真中也有类似现象.

在控制器 (45) 下得到的仿真结果如图 9～11 所示. 图 9 是状态的响应曲线, 图 10 是控制器 u 的响应曲线. 图 11 是滑动变量的相平面图. 从图 9 中可以看到, x_1, x_2 能够快速收敛到零, 而图 11 反映了滑动变量相平面运动轨迹.

综上, 控制器 (44) 及控制器 (45) 总能够保证滑动变量的收敛性, 而在控制器 (43) 下滑动变量可能不收敛. 另外, 在控制器 (43) 和 (44) 作用下, 系统状态的振动很大, 而在本文控制器 (45) 作用下没有类似情况发生, 且收敛速度较快. 因此, 与控制器 (43) 和 (44) 相比, 控制器 (45) 具有更好的控制效果.

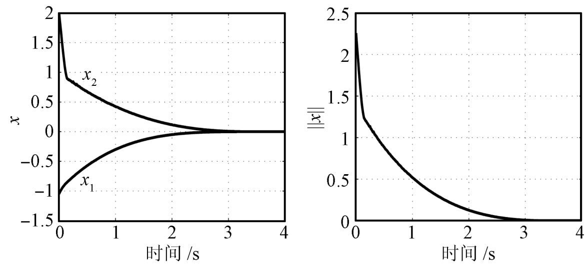

图 9 控制器 (45) 作用下系统状态 x_1 和 x_2 的响应曲线

Fig. 9 Response curves of the system states x_1 and x_2 under controller (45)

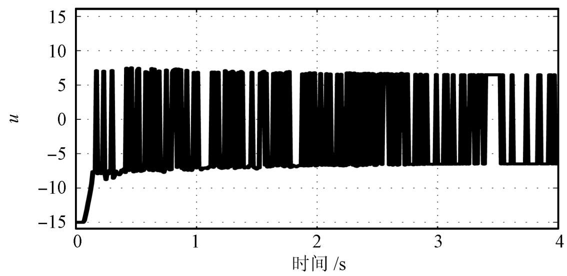

图 10 控制器 (45) 的响应曲线

Fig. 10 Response curve of controller (45)

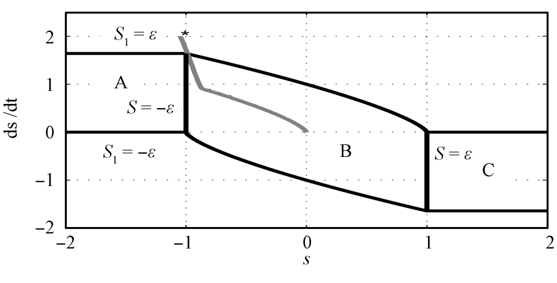

图 11 滑动变量 s 和 $\dot{s}$ 的相平面图

Fig. 11 The phase plot of the slide mode variables s and $\dot{s}$

4 结论

本文提出了一种新的二阶滑模控制方法. 与已有二阶滑模控制方法相比, 文中所提出的方法假设不确定性限定在一个非负函数下, 因而该方法具有更为广泛的应用范围. 同时,

与一般二阶滑模只给出有限时间收敛性相比, 我们还证明了闭环二阶滑模控制系统的有限时间稳定性. 两个例子验证了该方法的有效性. 关于下一步的工作, 我们拟打算从以下两个方面进行深入研究: 1) 设计观测器对滑动变量 $\dot{s}$ 进行在线估计; 2) 尝试将该算法推广到高阶滑模.

附录 命题 1 的证明

证明. 若要证明 $V_2(y_1,y_2)$ 为可导、正定且径向无界的函数, 只需证明 $W(y_1,y_2)=\int_{y_2^*}^{y_2}\left(\mu^{1/\gamma_2}-y_2^{*1/\gamma_2}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu$ 为可导、正定且径向无界的函数即可.

我们首先证明 $W(y_1,y_2)$ 为可导的. 一方面, 有 $\frac{\partial W}{\partial y_2}=\xi_2^{1-2\tau}$. 另一方面, 经过计算有:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\to 0}\frac{W(y_1+\Delta,y_2)-W(y_1,y_2)}{\Delta}=\\
&\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_{y_2^*(y_1+\Delta)}^{y_2^*(y_1)}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu}{\Delta}+\\
&\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_{y_2^*(y_1)}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu}{\Delta}-\\
&\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_{y_2^*(y_1)}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}d\mu}{\Delta}=\\
&\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_{y_2^*(y_1+\Delta)}^{y_2^*(y_1)}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu}{\Delta}-\\
&(1-2\tau)\frac{\partial {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}\int_{y_2^*(y_1)}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{-2\tau}\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

易验证

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_{y_2^*(y_1+\Delta)}^{y_2^*(y_1)}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu}{\Delta}\right|\le\\
&\frac{|y_2^*(y_1)-y_2^*(y_1+\Delta)|\left|(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right|^{1-2\tau}}{\Delta}=\\
&\frac{\left|(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right|}{\Delta}|y_2^*(y_1)-y_2^*(y_1+\Delta)|\times\\
&\left|(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right|^{-2\tau}
\end{aligned}$$

由于 ${y_2^*}^{1/\gamma_2}=-\beta_1^{1/\gamma_2}y_1$ 可导, 因此根据上式直接可得:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\int_{y_2^*(y_1+\Delta)}^{y_2^*(y_1)}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1+\Delta))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu}{\Delta}=0$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W(y_1,y_2)}{\partial y_1}=\\
&\quad-(1-2\tau)\frac{\partial {y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}}{\partial y_1}\int_{y_2^*(y_1)}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-(y_2^*(y_1))^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{-2\tau}\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

故 $W(y_1,y_2)$ 为可导的, 也即

$$V_2=\frac{1}{2-\tau}y_1^{2-\tau}+\int_{y_2^*}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-{y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu$$

可导. 另一方面 , 当 $y_2\ge y_2^*$ 时, 由引理 1 可知:

$$\begin{aligned}
&W(y_1,y_2)=\int_{y_2^*}^{y_2}\left(\mu^{\frac{1}{\gamma_2}}-{y_2^*}^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{1-2\tau}\mathrm{d}\mu\ge\\
&2^{\frac{\tau(1-2\tau)}{1+\tau}}\int_{y_2^*}^{y_2}(\mu-y_2^*)^{\frac{1-2\tau}{1+\tau}}\mathrm{d}\mu\ge\\
&2^{\frac{\tau(1-2\tau)}{1+\tau}}\frac{1+\tau}{2-\tau}(y_2-y_2^*)^{\frac{2-\tau}{1+\tau}}\ge 0
\end{aligned}$$

类似地, 我们也可以证明当 $y_2<y_2^*$ 时, $W(y_1,y_2)\ge 2^{\frac{\tau(1-2\tau)}{1+\tau}}\frac{1+\tau}{2-\tau}(y_2-y_2^*)^{\frac{2-\tau}{1+\tau}}\ge 0$. 因此, $W(y_1,y_2)$ 为正定且径向无界的, 从而 $V_2(y_1,y_2)$ 为正定且径向无界的. 综上, $V_2(y_1,y_2)$ 为可导、正定且径向无界的. □

References

1 Liu Jin-Kun, Sun Fu-Chun. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control. *Control Theory and Applications*, 2007, **24**(3): 407−418
(刘金琨, 孙福春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展. 控制理论及应用, 2007, **24**(3): 407−418)

2 Ding S H, Li S H. Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques. *Aerospace Science and Technology*, 2009, **13**(4−5): 256−265

3 Liu Yue, Ma Shu-Ping. A singular system approach to output feedback sliding mode control for time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 594−601
(刘月, 马树萍. 时滞系统的输出反馈滑模控制的一种奇异系统方法. 自动化学报, 2013, **39**(5): 594−601)

4 Wang He, Li Yao-Feng, Zhang Shou-Long, Dong Chen. Chaotic oscillation control based on adaptive terminal sliding mode. *Proceedings of the CSU-EPSA*, 2013, **25**(3): 152−157
(王鹤, 李耀峰, 张守龙, 董晨. 基于自适应 Terminal 滑模的混沌振荡控制. 电力系统及其自动化学报, 2013, **25**(3): 152−157)

5 Pu Ming, Wu Qing-Xian, Jiang Chang-Sheng, Dian Song-Yi, Wang Yu-Fei. Recursive terminal sliding mode control for higher-order nonlinear system with mismatched uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(11): 1777−1793
(蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 佃松宜, 王宇飞. 非匹配不确定高阶非线性系统递阶 Terminal 滑模控制. 自动化学报, 2012, **38**(11): 1777−1793)

6 Utkin V I, Lee H. The chattering analysis. In: Proceedings of the 12th International Power Electronics and Motion Control. Portoroz: IEEE, 2006. 2014−2019

7 Slotine J J, Sastry S S. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators. *International Journal of Control*, 1983, **38**(2): 465−492

8 Gao Wei-Bing. Theory and design method of variable structure control. BeiJing: Science Press, 1996.
(高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996.)

9 Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 1993, **58**(6): 1247−1263

10 Levant A. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 2007, **43**(4): 576−586

11 Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 2003, **76**(9): 924−941

12 Chen Jie, Li Zhi-Ping, Zhang Guo-Zhu. Higher-order sliding-mode controller for a class of uncertain nonlinear systems. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(5): 563−569
(陈杰, 李志平, 张国柱. 不确定非线性系统的高阶滑模控制器设计. 控制理论及应用, 2010, **27**(5): 563−569)

13 Emelyanov S V, Korovin S K, Levantovskii L V. Higher-order sliding modes in binary control systems. *Soviet Physics Doklady*, 1986, **31**(4): 291−293

14 Ma Ke-Mao. Design of higher order sliding mode attitude control laws for large-scale spacecraft. *Control and Decision*, 2013, **28**(2): 201−204
(马克茂. 大型空间飞行器的高阶滑模姿态控制律设计. 控制与决策, 2013, **28**(2): 201−204)

15 Fan Jin-Suo, Zhang He-Xin, Zhang Ming-Kuan, Zhou Xin. Adaptive second-order terminal sliding mode control for aircraft re-entry attitude. *Control and Decision*, 2012, **27**(3): 403−407
(范金锁, 张合新, 张明宽, 周鑫. 基于自适应二阶终端滑模的飞行器再入姿态控制. 控制与决策, 2012, **27**(3): 403−407)

16 Shi Hong-Yu, Feng Yong. High-order terminal sliding mode flux observer for induction motors. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(2): 288−294
(史宏宇, 冯勇. 感应电机高阶终端滑模磁链观测器的研究. 自动化学报, 2012, **38**(2): 288−294)

17 Hu Yue-Ming, Chao Hong-Min, Li Zhi-Quan, Liang Tian-Pei. High-order sliding mode control of nonlinear affine control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(2): 284−289
(胡跃明, 晁红敏, 李志权, 梁天培. 非线性仿射控制系统的高阶滑模控制. 自动化学报, 2002, **28**(2): 284−289)

18 Boiko I, Fridman L, Pisano A, Usai E. On the transfer properties of the generalized sub-optimal second-order sliding mode control algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 399−403

19 Shtessel Y B, Foreman D C, Tournes C H. Stability margins in traditional and second order sliding mode control. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and Control Conference. Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. 4604−4609

20 Pan Y D, Liu G J, Kumar K D. Robust stability analysis of asymptotic second-order sliding mode control system using Lyapunov function. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Information and Automation. Harbin, Heilongjiang, China: IEEE, 2010. 313−318

21 Zong Q, Zhao Z S, Zhang J. Brief paper: higher order sliding mode control with self-tuning law based on integral sliding mode. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(7): 1282−1289

22 Levant A, Michael A. Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19**(15): 1657−1672

23 Bartolini G, Pisano A, Usai E. Global stabilization for nonlinear uncertain systems with unmodeled actuator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(11): 1826−1832

24 Qian C, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061−1079

25 Ding S H, Li S H, Zheng W X. Nonsmooth stabilization of a class of nonlinear cascaded systems. *Automatica*, 2012, **48**(10): 2597−2606

26 Qian C J, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *Systems and Control Letters*, 2001, **42**(3): 185−200

27 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751−766

28 Wang X D. Research on Fuzzy Control Algorithm Based on Inverted Pendulum System [Master dissertation], Xidian University, China, 2012.
(王旭东. 基于倒立摆系统的模糊控制算法研究 [硕士学位论文]. 西安电子科技大学. 中国, 2012.)

29 Pei Y L. Inverted Pendulum System Stability Control Algorithm Research [Master dissertation], Chongqing University, China, 2012.
(裴月琳. 倒立摆系统稳摆控制算法研究 [硕士学位论文]. 重庆大学. 2012.)

30 Moreno J A, Osorio M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 2856−2861

李雪冰 江苏大学电气信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为滑模变结构控制理论. E-mail: lxb121619@163.com
(**LI Xue-Bing** Master student at the School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University. His main research interest is sliding mode control theory.)

马 莉 江苏大学电气信息工程学院讲师. 主要研究方向为随机系统, 滑模控制. E-mail: mali@ujs.edu.cn
(**MA Li** Lecturer at the School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University. His research interest covers stochastic system and sliding mode control.)

丁世宏 江苏大学电气信息工程学院副教授. 主要研究主向为非线性系统, 高阶滑模控制, DC-DC 控制. 本文通信作者.
E-mail: dsh@ujs.edu.cn
(**DING Shi-Hong** Associate professor at the School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University. His research interest covers nonlinear system control, high-order sliding mode, and DC-DC control. Corresponding author of this paper.)