

基于有向网络的一致性跟踪算法

周峰¹ 吴炎烜¹

摘要 研究了 leader 有控制输入且 followers 未知该输入条件下的线性多智能体一致性跟踪问题. 提出两种一致性跟踪算法, 证明两种算法在 leader 到 followers 存在一棵有向生成树且 follower 间拓扑是有向条件下, 网络就能跟踪 leader 的状态. 对于第一种算法, 节点根据相邻节点或 leader 的状态来求解其控制输入, 并基于代数 Riccati 不等式给出连续情形下算法稳定性条件. 第二种算法直接利用相邻节点或 leader 的状态, 使 followers 在上述网络条件下跟踪 leader 的状态, 同样基于代数 Riccati 不等式给出算法稳定性条件. 仿真结果验证了算法的有效性.

关键词 一致性跟踪, 一致性, 协同控制, 代数 Riccati 不等式

引用格式 周峰, 吴炎烜. 基于有向网络的一致性跟踪算法. 自动化学报, 2015, 41(1): 180–185

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140001

Consensus Tracking Algorithms with Directed Network

ZHOU Feng¹ WU Yan-Xuan¹

Abstract This paper considers consensus tracking of multi-agent systems with general linear dynamics and a leader whose control input is nonzero and unavailable to any follower. Two tracking algorithms are designed for each follower. We prove that the followers can track the leader using both algorithms if the interaction graph among them is directed and there exists a directed path from the leader to each follower. For the first algorithm, each follower calculates the neighbors' control inputs based on their states, then the stability condition is given based on the algebra Riccati inequality. The second algorithm utilizes neighbors' states directly and the followers can track the leader with the aforementioned topology based on the algebra Riccati inequality. Simulations indicate the capabilities of the algorithms.

Key words Consensus tracking, consensus, cooperative control, algebra Riccati inequality

Citation Zhou Feng, Wu Yan-Xuan. Consensus tracking algorithms with directed network. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 180–185

在多智能体系统 (Multi-agent systems) 中, 一致性是一个重要问题, 所谓一致性是一群节点 (Agent) 基于局部交互 (Local interaction) 规则关于某个物理量达成一致. 对一致性的研究始于 Jadbabaie, Olfati-Saber, Ren 等的研究工作^[1–3]. 一致性问题大致分为两种, 即无 leader 的一致性^[4–8]和 leader-following 的一致性. Leader-following 一致性也叫一致性跟踪, 一致性跟踪的具体应用很常见, 例如飞行器网络编队飞行时, 可通过一个 leader 来控制整个网络的

飞行速率、方向等参数. Leader 既可以是一架飞行器, 也可以是一个指令生成器, 它给部分 followers 传递信息, 使得全部 follower 的状态和 leader 的保持一致.

一致性跟踪问题近些年开始获得研究人员广泛关注, 文献 [9–10] 研究了一般线性动力学节点网络对 leader 的跟踪问题, 文献 [11] 研究了一般线性动力学节点网络在弱连通条件下的一致性跟踪问题, 文献 [12] 等研究了一般动力学节点网络在偶尔丢失控制输入下的一致性跟踪问题, 文献 [9–12] 的共同点是均假设 leader 的控制输入为零. 文献 [13] 提出一种不需要 leader 速度信息的一阶积分器网络一致性跟踪算法及不需要 leader 加速度信息的二阶积分器网络一致性跟踪算法, 文献 [14] 基于文献 [13] 的结论研究了多自主水下航行器系统的一致性编队跟踪控制问题. 文献 [15–16] 研究了一般线性动力学节点网络对 leader 一致性自适应跟踪问题, 文献 [17] 研究了一般动力学节点网络在不确定扰动下的一致性跟踪问题, 文献 [18] 研究了 Lipschitz 非线性动力学节点网络的一致性跟踪问题. 文献 [9–18] 的共同点是 leader 的控制输入不为零, 但均假设 followers 间通讯拓扑是无向的.

可见, 当前一致性跟踪问题的研究要么假设 leader 无控制输入, 要么假设 leader 有控制输入时, followers 间通讯拓扑是无向的. 在很多情况下, leader 需要控制输入来完成特定任务, 例如躲避障碍物等. 而假设 followers 间通讯拓扑是无向的是很强的条件, 因为传感器通讯距离不一致、环境等因素会造成通讯拓扑是有向的. 因此, 本文研究 leader 有控制输入, leader 到各个 follower 存在一条有向路径且 followers 间通讯拓扑是有向条件下的一致性跟踪问题. 提出两种跟踪算法, 第一种算法根据相邻节点或 leader 的状态求解其相应控制输入, 并基于代数 Riccati 不等式给出连续情形下的算法稳定性条件. 第二种算法直接利用相邻节点或 leader 的状态, 同样基于代数 Riccati 不等式给出算法收敛条件.

1 跟踪算法一

假设网络中有 $N+1$ 个节点, N 个 follower 和 1 个 leader, 所有 follower 具有相同的一般线性动力学模型:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$ 是状态, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 分别是系统矩阵和输入矩阵, 假设 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是可镇定的, 且式 (1) 是非冗余系统, 即 $\mathbf{B}$ 矩阵列满秩.

Leader 的动力学模型如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 是 leader 状态, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{R}^m$ 是 leader 控制输入. Leader 不接收任何一个 follower 的信息, 只有部分 follower 能接收 leader 的状态信息, 但不包括控制输入信息. Leader 到各个 follower 存在一条有向路径, followers 间的通讯拓扑是有向图.

跟踪算法:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j=0}^N (a_{ij}\mathbf{u}_j) - \frac{1}{d_i} K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3)$$

其中, a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ 表示邻接矩阵的元素, 当网络中第 i 个 follower 能接收 leader 信息时, a_{i0} , $i = 1, 2, \dots, N$ 是正数, 否则是 0, d_i 是第 i 个 follower 的入度, $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$

收稿日期 2014-01-03 录用日期 2014-09-10
Manuscript received January 3, 2014; accepted September 10, 2014
航空科学基金 (2013ZC72006) 资助
Supported by Aeronautical Science Foundation of China (2013ZC72006)

本文责任编辑 曾志刚

Recommended by Associate Editor ZENG Zhi-Gang

1. 北京理工大学机电学院 北京 100081

1. School of Electromechanical, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

是待设计的反馈增益矩阵. $\mathbf{u}_j$ 是第 i 个 follower 的相邻 follower 或 leader 的控制输入, 由于式 (1) 是非冗余系统, 因此 $\mathbf{u}_j$ 可通过 $\mathbf{u}_j = (B^T B)^{-1} B^T (\dot{\mathbf{x}}_j - A\mathbf{x}_j)$ 来计算得到唯一解.

设整个 leader-follower 网络结构图用 $\mathcal{G}_{lf}$ 表示, $\bar{L} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ 是同 $\mathcal{G}_{lf}$ 相关的 Laplacian 矩阵, follower 间的结构图用相关的 Laplacian 矩阵, follower 间的结构图用 $\mathcal{G}$ 表示, $L \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是同 $\mathcal{G}$ 相关的 Laplacian 矩阵.

定义 1 (信息交换矩阵). 令 $H = L + D$, $H \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是信息交换矩阵, $D = \text{diag}\{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{N0}\}$.

由于 leader 不接收任何 follower 的信息, 因此 $\bar{L}$ 可划分为:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times N} \\ b_{N \times 1} & H \end{bmatrix}$$

其中, $\mathbf{b} = (-a_{10}, -a_{20}, \dots, -a_{N0})^T$.

引理 1^[3]. 当 leader 到各个 follower 均存在一条有向路径时, 信息交换矩阵 H 是满秩的.

对于连续系统式 (1) 和跟踪算法式 (3), 有如下结论:

定理 1. 对 leader-follower 网络式 (1) 和式 (2), leader 到各个 follower 存在一条有向路径, followers 间的通讯拓扑是有向图. 应用跟踪算法式 (3), 当 $K = B^T P$ 时, 其中, P 是一个对称正定矩阵, 满足代数 Riccati 不等式 (4), 所有 follower 均能跟踪 leader 的状态.

$$A^T P + PA - 2PBB^T P < 0 \quad (4)$$

证明. 令 $\delta_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \sum_{j=0}^N a_{ij} (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) = \\ &= \sum_{j=0}^N a_{ij} (A\mathbf{x}_i + B\mathbf{u}_i - A\mathbf{x}_j - B\mathbf{u}_j) = \\ &= A\delta_i + B \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \end{aligned} \quad (5)$$

由式 (3) 可得:

$$\begin{aligned} B \left(d_i \mathbf{u}_i - \sum_{j=0}^N (a_{ij} \mathbf{u}_j) \right) &= -BK \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ B \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) &= -BK \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (6)$$

将式 (6) 代入式 (5) 可得:

$$\dot{\delta}_i = (A - BK) \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

因此研究式 (1) 和式 (3) 的稳定性转化为研究式 (7) 的稳定性. 构造李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \delta^T (I_N \otimes P) \delta \quad (8)$$

其中, $\delta = [\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_N^T]^T$. 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \delta^T \left[(I_N \otimes (A - BK))^T (I_N \otimes P) \right] \delta - \\ &= \delta^T [(I_N \otimes P) (I_N \otimes (A - BK))] \delta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\delta^T \left[I_N \otimes (A^T P + PA) - I_N \otimes (PBK + K^T B^T P) \right] \delta = \\ &\delta^T \left[I_N \otimes (A^T P + PA) - 2I_N \otimes (PBB^T P) \right] \delta \end{aligned} \quad (9)$$

因此, 式 (9) ≤ 0 的条件是满足式 (4). 又因为

$$\delta = (H \otimes I_n) \mathbf{x} + (\mathbf{a}_0 \otimes I_n) \mathbf{x}_0 \quad (10)$$

其中, $\mathbf{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{N0})^T$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T)^T$. $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta \rightarrow 0$, 由引理 1 可知 H 满秩, $\mathbf{x} \rightarrow -(H^{-1} \otimes I_n) (\mathbf{a}_0 \otimes I_n) \mathbf{x}_0$, 因为 $(H \otimes I_n) (\mathbf{1}_N \otimes I_n) + (\mathbf{a}_0 \otimes I_n) = 0$, 则 $\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{1}_N \otimes I_n) \mathbf{x}_0$. 因此跟踪算法式 (3) 全局渐近稳定的条件是满足式 (4). $\square$

注 1. 算法式 (3) 的限制条件之一是只能应用于非冗余系统, 加这个限制条件的目的是在利用状态信息计算 $\mathbf{u}_j$ 时有唯一解. $\mathbf{u}_j$ 的计算利用了状态微分信息 $\dot{\mathbf{x}}_j$, 在实际应用时, $\dot{\mathbf{x}}_j$ 可通过状态差分求解. 当然 $\mathbf{u}_j$ 也可通过通信的方式直接得到, 这时就不需加这个限制条件, 但也会相应增加网络的通信负荷.

2 跟踪算法二

研究对象仍然是式 (1) 和式 (2), 但假设条件与跟踪算法一有区别, 这里假设 (A, B) 是可镇定的, leader 的控制输入满足 $\|\mathbf{u}_0\|_\infty \leq \eta$, 其中 η 是正的常数.

一致性跟踪算法:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -c_i K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \\ &= \rho \text{sgn} \left(K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right) \\ \dot{c}_i &= \left(\sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right)^T \Gamma \left(\sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ 表示邻接矩阵的元素, 当网络中某个节点 i 能接收 leader 信息时, a_{i0} , $i = 1, 2, \dots, N$ 是正数, 否则是 0, ρ 是正的常数, $\text{sgn}(\cdot)$ 是按列定义的符号函数, c_i 是自适应权重满足 $c_i(0) \geq 1$, $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和 $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是待设计的常增益矩阵.

在证明算法式 (11) 的稳定性之前, 先给出下面两条引理.

引理 2^[19]. 当 leader 到各个 follower 均存在一条有向路径时, 存在一个正的向量 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$, 满足 $\mathbf{q} = H^{-1} \mathbf{1}_N$ 和 $Q = P'H + H^T P' > 0$, 其中 $P' = \text{diag}\{\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_N}\}$.

引理 3. 设 $L \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是与任意一个图相关的 Laplacian 矩阵, 对于任意一个列向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{nN}$, 均满足

$$\mathbf{x}^T (L \otimes I_n) \text{sgn}(\mathbf{x}) \geq 0$$

证明. $L \otimes I_n$ 仍然是一个 Laplacian 矩阵, 令 $L' = L \otimes I_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (L \otimes I_n) \text{sgn}(\mathbf{x}) &= \\ \mathbf{x}^T L' \text{sgn}(\mathbf{x}) &= \\ \sum_{i=1}^{nN} x_i a_{ij} \sum_{j=1}^{nN} [\text{sgn}(x_i) - \text{sgn}(x_j)] & \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{nN} a_{ij} \sum_{j=1}^{nN} [|x_i| - x_i \operatorname{sgn}(x_j)] \geq 0$$

其中, a_{ij} 是 L' 对应的图的邻接矩阵元素. $\square$

对于算法式 (11), 有如下结论:

定理 2. 对 leader-follower 网络式 (1) 和式 (2), leader 到各个 follower 存在一条有向路径, followers 间的通讯拓扑是有向图. 应用跟踪算法式 (11), 当 $\rho \geq \eta$, $K = B^T P$, $\Gamma = PBB^T P$ 时, 其中, P 是个对称正定矩阵, 满足代数 Riccati 不等式 (12). 所有 follower 均能跟踪 leader 的状态.

$$A^T P + PA - PBB^T P < 0 \quad (12)$$

证明. 将式 (11) 代入式 (1) 可得

$$\dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{x}_i + B \left[-c_i K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \right. \\ \left. \rho \operatorname{sgn} \left(K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, 式 (13) 变为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = A\boldsymbol{\varepsilon}_i - c_i BK \sum_{j=0}^N a_{ij} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_j) \times \\ \rho B \operatorname{sgn} \left(K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_j) \right) - B\mathbf{u}_0, \\ i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T, \boldsymbol{\varepsilon}_2^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N^T]^T$, 式 (14) 写成紧凑形式

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (I_N \otimes A - \hat{C}H \otimes BK) \boldsymbol{\varepsilon} \times \\ \rho (I_N \otimes B) \operatorname{sgn}((H \otimes K) \boldsymbol{\varepsilon}) - (1_N \otimes B) \mathbf{u}_0 \quad (15)$$

其中, H 是信息交换矩阵, $\hat{C} = \operatorname{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$. 将式 (15) 两边同乘以 $\hat{C}^2 H \otimes I_n$ 可得

$$(\hat{C}^2 H \otimes I_n) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \\ (\hat{C}^2 H \otimes I_n) (I_N \otimes A - \hat{C}H \otimes BK) \boldsymbol{\varepsilon} - \\ \rho (\hat{C}^2 H \otimes B) \operatorname{sgn}((H \otimes K) \boldsymbol{\varepsilon}) - \\ (\hat{C}^2 H 1_N \otimes B) \mathbf{u}_0 \quad (16)$$

令 $\boldsymbol{\xi} = (\hat{C}H \otimes I_n) \boldsymbol{\varepsilon}$, 因为 $\hat{C}$ 一直是正定的, 结合引理 1 可知 $\hat{C}H \otimes I_n$ 是满秩的, 式 (16) 变为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{C}^{-1} \hat{C} \otimes I_{2n}) \boldsymbol{\xi} + (\hat{C} \otimes A - \hat{C}^2 H \otimes BK) \boldsymbol{\xi} - \\ \rho (\hat{C}^2 H \otimes B) \operatorname{sgn}((\hat{C}^{-1} \otimes K) \boldsymbol{\xi}) - \\ (\hat{C}^2 H 1_N \otimes B) \mathbf{u}_0 \quad (17)$$

由于 $\hat{C}^{-1}$ 是正定的, 式 (17) 等价于

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{C}^{-1} \hat{C} \otimes I_{2n}) \boldsymbol{\xi} + (\hat{C} \otimes A - \hat{C}^2 H \otimes BK) \boldsymbol{\xi} - \\ \rho (\hat{C}^2 H \otimes B) \operatorname{sgn}((I_N \otimes K) \boldsymbol{\xi}) - \\ (\hat{C}^2 H 1_N \otimes B) \mathbf{u}_0 \quad (18)$$

此时, c_i 满足 $\dot{c}_i = \frac{1}{c_i^2} \boldsymbol{\xi}_i^T \Gamma \boldsymbol{\xi}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

构造李雅普诺夫函数:

$$V_2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2q_i c_i^2} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i + \frac{\lambda_1}{4} \sum_{i=1}^N (c_i - \alpha^2)^2 \quad (19)$$

其中, q_i 在引理 2 中定义, P 是一个正定矩阵, λ_1 是 $P'H + H^T P'$ 最小的特征值, α 是一个正的常数, 在下面确定, 显然, $V_2 \geq 0$.

对 V_2 求导:

$$\dot{V}_2 = \frac{\frac{1}{2q_i} \sum_{i=1}^N 2c_i^2 \boldsymbol{\xi}_i^T P \dot{\boldsymbol{\xi}}_i - \frac{1}{2q_i} \sum_{i=1}^N 2c_i \dot{c}_i \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i}{c_i^4} + \\ \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^N (c_i - \alpha^2) \dot{c}_i = \\ \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i c_i^2} \boldsymbol{\xi}_i^T P \dot{\boldsymbol{\xi}}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i + \\ \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^N (c_i - \alpha^2) \dot{c}_i \quad (20)$$

令 $K = B^T P$, 代入式 (20) 前两项可得

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i c_i^2} \boldsymbol{\xi}_i^T P \dot{\boldsymbol{\xi}}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i = \\ \boldsymbol{\xi}^T (\hat{C}^{-2} P' \otimes P) \dot{\boldsymbol{\xi}} - \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i = \\ \boldsymbol{\xi}^T (\hat{C}^{-2} P' \otimes P) \left[(\hat{C}^{-1} \hat{C} \otimes I_{2n}) \boldsymbol{\xi} + \right. \\ \left. (\hat{C} \otimes A - \hat{C}^2 H \otimes BK) \boldsymbol{\xi} - \right. \\ \left. \rho (\hat{C}^2 H \otimes B) \operatorname{sgn}((I_N \otimes K) \boldsymbol{\xi}) - \right. \\ \left. (\hat{C}^2 H 1_N \otimes B) \mathbf{u}_0 \right] - \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i = \\ \boldsymbol{\xi}^T (\hat{C}^{-1} P' \otimes PA - P'H \otimes BK) \boldsymbol{\xi} - \\ \rho \boldsymbol{\xi}^T (P'H \otimes PB) \operatorname{sgn}((I_N \otimes K) \boldsymbol{\xi}) - \\ \boldsymbol{\xi}^T (P'H 1_N \otimes PB) \mathbf{u}_0 + \\ \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\dot{c}_i}{q_i c_i^3} \boldsymbol{\xi}_i^T P \boldsymbol{\xi}_i \leq \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) - \right. \\ \left. \lambda_1 I_N \otimes PBB^T P \right] \boldsymbol{\xi} -$$

$$\begin{aligned} & \rho \xi^T (P' L \otimes PB) \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) - \\ & \rho \xi^T (P' D \otimes PB) \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) - \\ & \xi^T (P' L \mathbf{1}_N \otimes PB) \mathbf{u}_0 - \xi^T (P' D \mathbf{1}_N \otimes PB) \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 中的最后一个不等式可由引理 2 得到.
令 $\Gamma = PBB^T P$, 因为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) - \right. \\ & \quad \left. \lambda_1 I_N \otimes PBB^T P \right] \xi + \frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^N (c_i - \alpha^2) \dot{c}_i = \\ & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) \right] \xi - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_1 \left(1 - \frac{1}{c_i} + \frac{\alpha^2}{c_i^2} \right) \xi_i^T PBB^T P \xi_i \leq \\ & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) \right] \xi - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_1 \frac{2\alpha - 1}{c_i} \xi_i^T PBB^T P \xi_i = \\ & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) - \right. \\ & \quad \left. \lambda_1 (2\alpha - 1) \hat{C}^{-1} \otimes PBB^T P \right] \xi \end{aligned} \quad (22)$$

再令 α 充分大, 使得 $\lambda_1 (2\alpha - 1) \geq \max[p_1, p_2, \dots, p_N]$, 所以由式 (22) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) - \right. \\ & \quad \left. \lambda_1 (2\alpha - 1) \hat{C}^{-1} \otimes PBB^T P \right] \xi \leq \\ & \frac{1}{2} \xi^T \left[\hat{C}^{-1} P' \otimes (PA + A^T P) - \right. \\ & \quad \left. P' \hat{C}^{-1} \otimes PBB^T P \right] \xi = \\ & \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{q_i} \xi_i^T (PA + A^T P - PBB^T P) \xi_i \end{aligned} \quad (23)$$

当式 (12) 成立时, 式 (23) ≤ 0 .

再由引理 3 可知,

$$\begin{aligned} & -\rho \xi^T (P' L \otimes PB) \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) = \\ & -\rho \xi^T (I_N \otimes PB) (P' L \otimes I_m) \times \\ & \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

由 Laplacian 矩阵的性质可得

$$-\xi^T (P' L \mathbf{1}_N \otimes PB) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (25)$$

又因为

$$\begin{aligned} & -\rho \xi^T (P' D \otimes PB) \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) - \\ & (P' D \mathbf{1}_N \otimes B) \mathbf{u}_0 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\rho \xi^T (I_N \otimes PB) (P' D \otimes I_m) \times \\ & \operatorname{sgn} \left((I_N \otimes B^T P) \xi \right) - \xi^T (P' D \mathbf{1}_N \otimes PB) \mathbf{u}_0 \leq \\ & -\rho \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i} d_i \left\| \xi_i^T P' B \right\|_1 + \\ & \left\| \mathbf{u}_0 \right\|_\infty \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i} d_i \left\| \xi_i^T P' B \right\|_1 \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $D = \operatorname{diag}\{d_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, D 在定义 1 中定义.
由于 $\rho \geq \eta$, 因此式 (26) ≤ 0 .

由式 (20) ~ (26) 可知,

$$\dot{V}_2 \leq \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{q_i} \xi_i^T (PA + A^T P - PBB^T P) \xi_i := R(\xi) \quad (27)$$

这意味着 $\dot{V}_2 \leq 0$, V_2 是单调递减函数. 由于其下界是 0, 且由式 (20) 可知其微分关于时间是一致连续的, 因此, 根据 Barbalat 引理, $\dot{V}_2 \rightarrow 0$, 随着 $t \rightarrow \infty$, 所以 $R(\xi) \geq 0$, 再根据式 (23) 可知 $R(\xi) \leq 0$, 最后可得 $R(\xi) \rightarrow 0$, 随着 $t \rightarrow \infty$, 即 $\xi \rightarrow 0$, 随着 $t \rightarrow \infty$. 又因为 $\xi = (\hat{C}H \otimes I_n) \varepsilon$, 所以 $\varepsilon \rightarrow 0$, 随着 $t \rightarrow \infty$, 命题得证. $\square$

注 2. 因为 $\dot{V}_2 \leq 0$, 所以 $V_2(t) \leq V_2(0)$, 再根据 $\dot{c}_i(t)$ 的定义, $c_i(t)$ 是单调递增的, 因此各个 follower 的自适应权重都会收敛到有限值.

注 3. 算法式 (11) 中自适应权重的作用是为了使算法的设计不依赖于网络的特征结构, 只要 leader 到各个 follower 均存在一条有向路径, 算法就能收敛. 文献 [15–18] 采用了类似的自适应算法, 但这些文献均假设 follower 间的通讯拓扑是无向图. 本文主要创新点之一就是首次将自适应跟踪算法应用于有向图.

注 4. 算法式 (3) 和算法式 (11) 共同点是均包含同一反馈项 $K \sum_{j=0}^N a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, 当 leader 无控制输入时, 有这一项就足够; 当 leader 有控制输入时, 需要其他项来抵消 leader 控制输入的影响. 算法式 (3) 是通过求解控制输入来抵消, 算法式 (11) 是通过一个不连续非线性项来抵消.

注 5. 算法式 (3) 和算法式 (11) 是应用互补关系, 有各自的优缺点. 算法式 (3) 只能应用于非冗余系统, 算法式 (11) 既可应用于冗余系统, 也可应用于非冗余系统; 算法式 (3) 不需要每个 follower 知道 leader 控制输入的上界, 算法式 (11) 则需要. 所以实际应用时, 可根据各自特点选用不同算法.

3 仿真

考虑一个飞行器编队, 由 1 个 leader 和 5 个 follower 组成, 为了保持编队, follower 的状态需要和 leader 的保持一致. 这里讨论纵向通道状态, 即空速、迎角、俯仰角和俯仰角速率. 纵向线性化小扰动后的系统矩阵和输入矩阵分别为 $(A, B)^{[20]}$.

容易验证 (A, B) 是可镇定的. 假定网络拓扑是图 1, 其中, 节点 1 是 leader. 假设 leader 的控制输入:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \cos(0.01t) \\ 0.05 \sin(0.01t) \end{bmatrix}$$

其中, 控制输入是油门量和升降舵偏转角, 这里是任意给定的, 主要是为了检验 follower 是否能跟踪 leader 的状态.

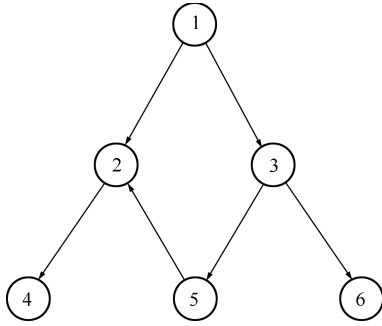


图 1 网络拓扑

Fig. 1 The network topology

仿真初始条件是: $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 1, 1]^T$, $\mathbf{x}_2 = [2, -2, -1, 1]^T$, $\mathbf{x}_3 = [2, 2, 0, 1]^T$, $\mathbf{x}_4 = [2, -2, 0, 1]^T$, $\mathbf{x}_5 = [2, -2, 1, 1]^T$, $\mathbf{x}_6 = [0, -2, 0, 1]^T$. 由于 (A, B) 是非冗余系统, 因此根据定理 1 可求得满足条件的 P_1 和 K_1 .

图 2 是基于算法 (3) 的 follower 和 leader 状态的均方误差 (Mean square error, MSE) 曲线, 即 $\sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 \|x_i - x_1\|^2}$.

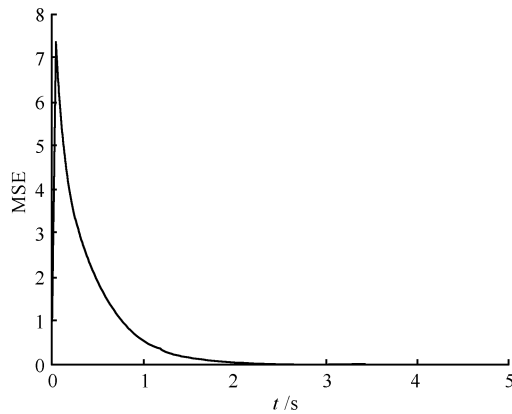


图 2 基于算法 (3) 的均方误差曲线

Fig. 2 The MSE curve base on (3)

图 3 是基于算法式 (11) 的 follower 和 leader 状态的均方误差曲线. 图 4 是基于算法式 (11) 的自适应权重曲线.

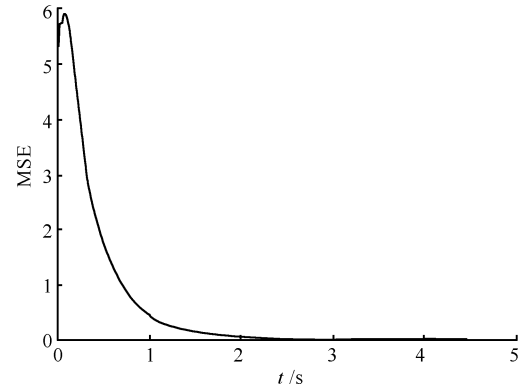


图 3 基于算法式 (11) 的均方误差曲线

Fig. 3 The MSE curve base on (11)

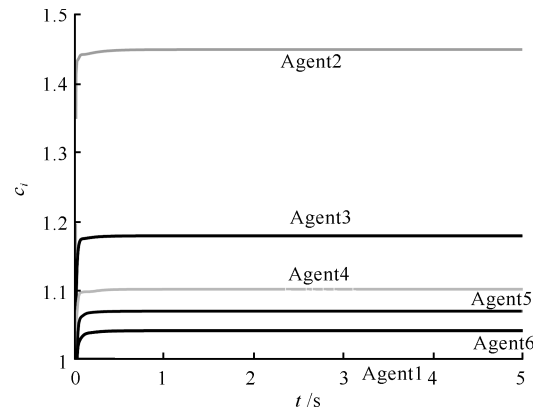


图 4 自适应权重曲线

Fig. 4 The adaptive weight curves

$$A = \begin{bmatrix} -2.0244 \times 10^{-2} & 7.8761 & -3.2169 \times 10^{-1} & -6.5020 \times 10^{-1} \\ -2.5373 \times 10^{-4} & -1.0189 & 0 & 9.0484 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7.9472 \times 10^{-11} & -2.4982 & 0 & -1.3861 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5.6270 & 4.3827 \\ -5.1891 & 3.0736 \\ 0 & 0 \\ 3.7734 & 4.6335 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.6693 & 1.1496 & -8.6714 & -1.5173 \\ 1.1496 & 1.6198 & -7.4521 & -1.2425 \\ -8.6714 & -7.4521 & 80.5722 & 11.3330 \\ -1.5173 & -1.2425 & 11.333 & 2.4385 \end{bmatrix}, K_1 = B^T P_1 = \begin{bmatrix} -2.2972 & -6.6249 & 32.6389 & 7.1114 \\ 3.8193 & 4.2595 & -8.3970 & 0.8302 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.5082 & 0.8950 & -7.8103 & -1.4268 \\ 0.8950 & 1.1010 & -5.5075 & -0.9564 \\ -7.8103 & -5.5075 & 72.2265 & 9.9098 \\ -1.4268 & -0.9564 & 9.9098 & 2.1052 \end{bmatrix}, K_2 = B^T P_2 = \begin{bmatrix} -1.1514 & -4.2856 & 22.0236 & 4.8778 \\ 2.7500 & 2.8753 & -5.2403 & 0.5616 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 9.9385 & 14.5129 & -48.3584 & -5.9743 \\ 14.5129 & 26.6339 & -109.4525 & -19.2897 \\ -48.3584 & -109.4525 & 512.4985 & 104.4835 \\ -5.9743 & -19.2897 & 104.4835 & 24.1084 \end{bmatrix}$$

4 结论

本文研究了 leader 有控制输入且 follower 未知该输入条件下的线性多智能体一致性跟踪问题, 提出两种一致性跟踪算法。对于第一种算法, 节点根据相邻节点或 leader 的状态来求解其控制输入, 并基于代数 Riccati 不等式给出算法的稳定性条件; 第二种算法直接利用相邻节点或 leader 的状态, 同样基于代数 Riccati 不等式给出算法的稳定性条件。两种跟踪算法均不依赖网络结构特征, 只要 leader 到各个 follower 存在一条有向路径, 所有 follower 均能跟踪 leader 的状态。

References

- Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001
- Olfati-Saber R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
- Li X, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging. *Systems & Control Letters*, 2004, **53**(1): 65–78
- Rong L N, Xu S Y, Zhang B Y. Accelerating average consensus by using the information of second-order neighbours with communication delays. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(6): 1181–1188
- Zeng Li, Hu Guang-Da. Consensus of linear multi-agent systems with communication and input delays. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 1133–1140
- Cao Xi-Bin, Guo Hai-Bo, Zhang Shi-Jie. Information topology-independent consensus criteria for second-order systems under directed graph. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 995–1002
- Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Movement consensus of complex fractional-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 489–496 (杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性. 自动化学报, 2014, **40**(3): 489–496)
- Ni W, Cheng D Z. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(3–4): 209–217
- Zhang H W, Lewis F L, Das A. Optimal design for synchronization of cooperative systems: state feedback, observer and output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(8): 1948–1952
- Qin J H, Yu C B, Gao H J. Coordination for linear multiagent systems with dynamic interaction topology in the leader-following framework. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(5): 2412–2422
- Wen G H, Hu G Q, Yu W W, Cao J D, Chen G R. Consensus tracking for higher-order multi-agent systems with switching directed topologies and occasionally missing control inputs. *Systems & Control Letters*, 2013, **62**(12): 1151–1158
- Cao Y C, Ren W. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(1): 33–48
- Wang Yin-Tao, Yan Wei-Sheng. Consensus formation tracking control of multiple autonomous underwater vehicle systems. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(3): 379–384 (王银涛, 严卫生. 多自主水下航行器系统的一致性编队跟踪控制. 控制理论与应用, 2013, **30**(3): 379–384)
- Li Z K, Liu X D, Ren W. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(2): 518–523
- Li Z K, Ren W, Liu X D, Xie L H. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols. *Automatica*, 2013, **49**(7): 1986–1995
- Li Z K, Duan Z S, Lewis F L. Distributed robust consensus control of multi-agent systems with heterogeneous matching uncertainties. *Automatica*, 2014, **50**(3): 883–889
- Zhao Y, Li Z K, Duan Z S. Distributed consensus tracking of multi-agent systems with nonlinear dynamics under a reference leader. *International Journal of Control*, 2013, **86**(10): 1859–1869
- Qu Z H. *Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles*. London: Springer-Verlag, 2009. 167–169
- Wu Sen-Tang, Fei Yu-Hua. *Flight Control System*. Beijing: Press of Beihang University, 2005. 103–104 (吴森堂, 费玉华. 飞行控制系统. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005. 103–104)

周 峰 北京理工大学机电学院博士研究生. 主要研究方向为多自主体分布式控制. E-mail: summitzhou@163.com

(ZHOU Feng Ph.D. candidate at the School of Electromechanical, Beijing Institute of Technology. His research interest covers distributed control of multi-agent systems.)

吴炎炬 北京理工大学机电学院讲师. 主要研究方向为多自主体分布式控制. 本文通信作者. E-mail: alexwxy@bit.edu.cn

(WU Yan-Xuan Lecturer at the School of Electromechanical, Beijing Institute of Technology. His research interest covers distributed control of multi-agent systems. Corresponding author of this paper.)