

时滞扩散性复杂网络同步保性能控制

罗毅平^{1,2} 周笔锋^{1,2}

摘 要 针对节点扩张的时滞复杂网络系统, 在节点扩张的条件下, 讨论此类系统的同步保性能控制问题. 首先采用自适应控制方法, 利用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论, 结合矩阵不等式的凸优化问题处理方法, 得出了时滞复杂网络系统保性能控制器存在的充分条件; 当系统节点的扩张后, 在原有自适应控制器不能使系统同步稳定的条件下, 设计脉冲控制器, 利用牵制控制原理使系统达到稳定同步. 所设计的自适应动态反馈控制器在保证系统的渐近稳定条件下使系统性能指标满足一定的要求. 最后给出一个数值仿真说明其有效性.

关键词 扩散性复杂网络, 同步, 保性能控制, 时滞

引用格式 罗毅平, 周笔锋. 时滞扩散性复杂网络同步保性能控制. 自动化学报, 2015, 41(1): 147–156

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140202

Guaranteed Cost Synchronization Control of Diffusible Complex Network Systems with Time Delay

LUO Yi-Ping^{1,2} ZHOU Bi-Feng^{1,2}

Abstract The problem of guaranteed cost synchronization control is investigated, mainly aiming at nodes expanding in complex dynamical networks with time delay. Firstly, with the method of the adaptive dynamic feedback controller, the sufficient conditions for the existence of the guaranteed cost controller with time delay in complex network are obtained based on the Lyapunov's stability theory and the method of matrix inequality. Then, an impulse controller is designed to achieve synchronization with the principle of pinning control when the system nodes are expanding under the condition that the original adaptive controller cannot make the synchronization of the system. The designed adaptive dynamic feedback controller makes the performance index of the system meet certain requirements under the condition of ensuring the asymptotic stability of the system. Finally, a numerical example is given to demonstrate the feasibility of proposed method.

Key words Diffusible complex networks, synchronization, guaranteed cost control, time delay

Citation Luo Yi-Ping, Zhou Bi-Feng. Guaranteed cost synchronization control of diffusible complex network systems with time delay. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 147–156

复杂网络广泛存在于自然界与人类社会的各种现象中. 近十年来, 由于研究方法的不断突破, 使得复杂网络的理论与应用研究已经成为当前国内外的一个前沿课题.

在复杂网络系统中, 复杂网络节点间同步^[1–15]一直是该领域所研究的热点课题. 事实上, 同步是自然界中最典型的集体行为和基本运动^[1–2]. 为了实现同步, 自适应控制方法^[3–6]、脉冲控制^[7–11]以及它们之间的组合^[12–13]被广泛运用于复杂网络系统.

另一方面, 大部分复杂网络呈现扩散性, 如社会网络中节点随着社会的发展迅速增加, 当复杂网络系统的节点扩张, 原有控制系统已不能使扩张后的复杂网络稳定时, 怎样找到一种恰当的控制方法是我们要解决的一个重要的课题. 而在复杂网络系统的控制研究中, 对这个问题鲜有人进行讨论. 针对扩散性复杂网络, 现有的方法是针对每个增加的节点, 添加控制器, 但许多网络膨胀迅速 (如流行病初期的迅速扩散), 这种对每个节点添加控制器的方法是一件投资非常大且难以实现的事情. 因此, 针对迅速扩张的复杂网络, 我们拟利用牵制控制来使新系统稳定. 对于一个实际的系统, 我们的控制通常不仅希望系统稳定, 而且希望闭环系统的性能指标达到某种要求. 所以闭环系统的保性能控制也得到了广泛的研究^[14–18]. 因此, 在复杂网络控制的研究中, 针对扩散性复杂网络的同步, 同时使系统的性能指标 (如控制成本) 达到某种要求的研究有着重要的理论与实

收稿日期 2014-03-25 录用日期 2014-06-25
Manuscript received March 25, 2014; accepted June 25, 2014
国家自然科学基金 (11372107, 61174211) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11372107, 61174211)
本文责任编辑 吕金虎
Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu
1. 湖南工程学院电气信息学院 湘潭 411101 2. 湖南工程学院风电装备与电能变换协同创新中心 湘潭 411101
1. College of Electrical Information, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101 2. The Collaborative Innovation Center of Wind Power Equipment and Energy Conversion, Xiangtan Institute of Engineering, Xiangtan 411101

际意义. 此外, 由于系统的某些固有特性, 时滞对于系统是广泛存在的^[19-23], 所以研究时滞扩散性复杂网络系统的控制是非常必要的. 此外, 对复杂网络的保性能控制研究, Lee 等^[18] 设计了两种针对复杂网络同步的保性能控制器. 本文考虑的是时滞扩散性的复杂网络系统, 运用牵制控制原理讨论了系统的同步保性能控制.

本文结构上分成了两部分, 第 1 部分设计了一个自适应控制器使时滞复杂网络系统达到同步稳定; 第 2 部分在此基础上, 网络节点增加后, 先判断原有控制器是否使扩张后的系统稳定, 若稳定, 则不添加新控制; 若现有方法不能判断原有控制器使新系统同步稳定时, 则在保持原有控制器不变的情况下, 选择相对灵活的脉冲控制方法, 牵制控制系统原有的基础节点, 对系统新增加的节点不添加控制器而使系统达到同步稳定. 这样, 不但保留了原有控制器, 实现了资源节约, 并利用牵制控制原理, 牵制部分节点使系统稳定, 大量减少了控制器. 其中所设计的自适应动态反馈控制器在保证系统的渐近稳定条件下使系统的性能指标满足一定的要求. 最后给出数值仿真说明其有效性.

1 系统描述

考虑如下时滞复杂动态网络:

$$\dot{x}_i = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N G_{ij} x_j(t - \tau) + u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

其中, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 是节点 i 关于时间的状态变量; 系统的状态时滞 $\tau > 0$ 为已知标量, u_i 为节点 i 的状态控制器. 矩阵 $G = (G_{ij})_{N \times N} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 描述网络的拓扑结构, 定义如下: 若节点 i 和节点 j ($j \neq i$) 存在连接, 则 $G_{ij} = G_{ji} = 1$; 否则 $G_{ij} = G_{ji} = 0$ ($j \neq i$); 并且矩阵 G 的对角元素定义为 $G_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ji}$, $i = 1, \dots, N$.

对于光滑非线性函数 $f(\cdot)$ 满足下面 Lipschitz 条件

$$\|f(a) - f(b)\| \leq l \|a - b\| \quad (2)$$

其中, $a, b \in \mathbf{R}^n$, $\|\cdot\|$ 为欧几里得范数.

定义 1. 若一个网络达到渐近同步, 则

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (3)$$

其中, $s(t) \in \mathbf{R}^n$ 是一个孤立节点, 且满足 $\dot{s}(t) = f(s(t))$, 这样, 为了达到同步的目的, 定义下面的误差变量

差变量

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t) \quad (4)$$

本文的主要目的是运用自适应脉冲控制方法, 运用牵制控制原理使系统节点状态 x_i , $i = 1, \dots, N$ 达到同步状态, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

从式 (4) 和系统式 (1), 我们可以得到如下误差系统

$$\dot{e}_i = \hat{f}(e_i(t)) + \sum_{j=1}^N G_{ij} e_j(t - \tau) + u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

其中, $\hat{f}(e_i(t)) = f(x_i(t)) - f(s(t))$.

引理 1 (Schur complements)^[24]. 对于给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0$, 以下三个条件是等价的:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

2 牵制自适应脉冲保性能控制器设计

首先设计一个自适应控制器, 作用于所有复杂网络节点, 使系统在自适应控制器的作用下达到同步状态. 然后考虑系统节点扩张的情况, 在第 1 部分自适应控制器不能满足系统同步的条件下, 设计脉冲控制器, 利用牵制控制方法, 控制系统基础节点, 使扩张后的系统达到同步.

2.1 自适应保性能控制器设计

本节目的是设计动态反馈自适应控制器, 使误差系统式 (6) 达到渐近稳定, 即使系统式 (1) 达到同步. 其中式 (6) 可以写成下面矢量的矩阵形式:

$$\dot{e}(t) = G \otimes I_n e(t - \tau) + F(t) + u(t) \quad (7)$$

其中, $\otimes$ 表示克罗内克积,

$$\begin{aligned} e(t) &= (e_1^T(t), \dots, e_N^T(t))^T \\ F(t) &= (\hat{f}_1^T(e_1(t)), \dots, \hat{f}_N^T(e_N(t)))^T \\ u(t) &= (u_1^T(t), \dots, u_N^T(t))^T \end{aligned}$$

设计如下动态反馈控制器, 当所设计动态反馈控制器使误差系统式 (7) 达到渐近稳定时, 系统式 (1) 同步.

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A \otimes I_n \eta(t) + \\ \quad C \otimes I_n e(t) + A_a \otimes I_n e(t - \tau) \\ U(t) = K \otimes I_n \eta(t), \eta(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\eta(t) = (\eta_1^T(t), \dots, \eta_N^T(t))^T \in \mathbf{R}^{nN}$ 是状态反馈控制器的状态变量, K, A, C, A_a 均为 $N \times N$ 阶矩阵, 式 (8) 中给定的控制律 $U(t)$ 将作为控制输入 $u(t)$ 来使复杂动态网络系统式 (1) 达到同步.

为了保证复杂网络的性能, 设定二次保性能控制函数为

$$J = \int_0^\infty e^T(t)Q \otimes I_n e(t) + u^T(t)R \otimes I_n u(t)dt \quad (9)$$

其中, $Q, R \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 均为给定正定对称矩阵.

对于控制器式 (8), 将其应用于误差系统式 (7), 可得到下面的闭环系统:

$$\dot{z}(t) = H \otimes I_n z(t) + \hat{G} \otimes I_n z(t - \tau) + \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中

$$z(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2nN}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & K \\ C & A \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2N \times 2N}$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ A_a & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2N \times 2N}$$

这样, 对应的保性能函数就变成

$$J = \int_0^\infty z^T(t)\hat{Q} \otimes I_n z(t)dt \quad (11)$$

其中

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & K^T R K \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2N \times 2N}$$

考虑系统式 (1), 如果存在一个控制器 $u(t)$ 和一个正常数 J^* 使得闭环系统式 (10) 渐近稳定, 闭环系统的保性能函数 $J \leq J^*$, 这样 J^* 就是保性能, 控制器 $u(t)$ 为保性能控制器. 这里, 第一步就是要找出一个动态反馈控制器 $u(t)$ 使得闭环系统渐近稳定, 闭环系统保性能控制函数满足 $J \leq J^*$.

定理 1. 对于给定矩阵 $Q > 0, R > 0, l$ 为一常数, 若存在矩阵 $Y, W, S_{1n}, S_{2n} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为正定对称矩阵, 矩阵 $M, D, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 满

足下面矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & F^T & E^T & E^T & \Phi_3 \\ * & -S^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -(l \times l)^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & \Phi_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, S^{-1} = \begin{bmatrix} S_{1n} & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} X_1 = DC \\ X_2 = KM^T \\ X_3 = X_2^T Y + W X_1^T + M A^T D^T \\ X_4 = Y G S_{1n} + D A_a S_{1n} \end{cases} \quad (14)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & X_3 + WQ \\ * & X_1 + X_1^T + Q \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} G S_{1n} & 0 \\ X_4 & 0 \end{bmatrix}, \Phi_3 = \begin{bmatrix} W & X_2^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} -Q^{-1} & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} W & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & D^T \end{bmatrix}$$

则动态控制律式 (8) 是时滞复杂动态网络系统式 (1) 的保性能控制律. 保性能控制函数的上界为

$$J = e^T(0)Y \otimes I_n e(t) + \int_{-\tau}^0 e^T(s)S_{1n}^{-1} \otimes I_n e(s)ds = J^* \quad (15)$$

证明. 对于闭环系统, 构造李雅普洛夫函数为

$$V(z_t) = z^T(t)P \otimes I_n z(t) + \int_{t-\tau}^t z^T(s)S \otimes I_n z(s)ds \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) = & \dot{z}^T(t)P \otimes I_n z(t) + z^T(t)P \otimes I_n \dot{z}(t) + \\ & z^T(t)S \otimes I_n z(t) - z^T(t-\tau)S \otimes I_n z(t-\tau) = \\ & z^T(t)(H^T P + PH + S) \otimes I_n z(t) - \\ & z^T(t-\tau)S \otimes I_n z(t-\tau) + \\ & 2z^T(t)P\hat{G}^T \otimes I_n z(t-\tau) + \\ & 2z^T(t)P \otimes I_n \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式 (2), 可得:

$$\begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T I_{2N} \otimes I_n \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \leq \frac{z^T(t)l^2 I_{2N} \otimes I_n z(t)}{z^T(t)l^2 I_{2N} \otimes I_n z(t)}$$

所以, 有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z_t) \leq & z^T(t)(H^T P + PH + S) \otimes I_n z(t) - \\ & z^T(t-\tau)S \otimes I_n z(t-\tau) + \\ & 2z^T(t)P\hat{G}^T \otimes I_n z(t-\tau) + \\ & 2z^T(t)P \otimes I_n \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & z^T(t)l^2 I_{2N} \otimes I_n z(t) - \\ & \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T I_{2N} \otimes I_n \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H^T P + PH + S + \hat{Q} + l^2 I_{2N} \\ \hat{G}^T P \\ P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} P\hat{G} & P \\ -S & 0 \\ 0 & -I_{2N} \end{bmatrix} \otimes I_n \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \\ & z^T(t)\hat{Q} \otimes I_n z(t) \end{aligned}$$

所以, 若存在不等式

$$\begin{bmatrix} H^T P + PH + S + \hat{Q} + l^2 I_{2N} & P\hat{G} & P \\ \hat{G}^T P & -S & 0 \\ P & 0 & -I_{2N} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

成立, 则:

$$\dot{V}(z_t) < -z^T(t)\hat{Q} \otimes I_n z(t) < 0 \quad (18)$$

若由矩阵不等式 (17) 求解控制器, 其控制器参数 A, C, K 均包含在矩阵 H 中不能被求出, 且保性能函数上界 J^* 不能很好的表达, 所以, 接下来我们要求解控制器参数及保性能函数上界 J^* .

首先, 将矩阵 P, S 分区, 定义:

$$P_a = \begin{bmatrix} Y & D \\ D^T & T_c \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} W & M \\ M^T & N \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} S_{1n} & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{bmatrix}$$

其中, $Y, W, S_{1n}, S_{2n} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是正定对称矩阵, $D, M \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是可逆矩阵, 且 $PP^{-1} = I$.

$$MD^T = I - WY \quad (20)$$

定义两个矩阵:

$$E = \begin{bmatrix} W & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad F_a = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & D^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

可得:

$$PE = F, \quad E^T PE = E^T F = \begin{bmatrix} W & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

对式 (17) 左右两边分别左乘 $\begin{bmatrix} E^T & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 和

右乘 $\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$, 有:

$$\begin{bmatrix} E^T H^T F + F^T H E + E^T (S + \hat{Q} + l^2 I_{2N}) E & * & * \\ * & F^T \hat{G} S^{-1} & F^T \\ * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & -I_{2N} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

由式 (19)~(23), 根据 Schur 补定理, 并令:

$$X_1 = DC$$

$$X_2 = KM^T$$

$$X_3 = X_2^T Y + W X_1^T + M A^T D^T$$

$$X_4 = Y G S_{1n} + D A_a S_{1n}$$

同时, 将矩阵分块, 即可得定理 1 中矩阵不等式 (12).

另一方面, 对式 (18) 两边同时从 0 到 T 积分, 可得:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T z^T(t) \hat{Q} \otimes I_n z(t) dt > z^T(T) P \otimes I_n z(T) - \\ & z^T(0) P \otimes I_n z(0) + \int_{T-\tau}^T z^T(s) S \otimes I_n z(s) ds - \\ & \int_{-\tau}^0 z^T(s) S \otimes I_n z(s) ds \end{aligned} \quad (24)$$

由于闭环系统式 (10) 渐近稳定, 可得:

$$\begin{aligned} & z^T(T) P \otimes I_n z(T) + \\ & \int_{T-\tau}^T z^T(s) S \otimes I_n z(s) ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此, 有:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty z^T(t) \hat{Q} \otimes I_n z(t) dt \leq \\ & z^T(0) P \otimes I_n z(0) + \\ & \int_{-\tau}^0 z^T(s) S \otimes I_n z(s) ds = \\ & e^T(0) Y \otimes I_n e(0) + \\ & \int_{-\tau}^0 e^T(s) S_{1n}^{-1} \otimes I_n e(s) ds = \\ & J^* \end{aligned}$$

由此, 定理 1 得证. $\square$

2.2 牵制自适应脉冲控制器设计

对于节点数为 N 的复杂网络, 经过扩张, 节点增加为 Z , 原有网络占现有网络的比例为 $N = [\rho Z]$, $[\cdot]$ 代表函数取整数. 下面考虑利用牵制自适应脉冲方法控制.

设计脉冲控制的离散时间点 t_i 满足:

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_k, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty \quad (25)$$

则脉冲控制器的间隔时间为: $\xi_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$).

通过将脉冲控制器应用于误差系统式 (6), 我们

可以得到控制模型为

$$\begin{cases} \dot{e}_i = \hat{f}(e_i(t)) + \sum_{j=1}^N G_{ij} e_j(t - \tau) + u_a, \\ i = 1, \dots, Z, a = 1, \dots, N, t \neq t_k \\ e_i(t_k^+) = e_i(t_k^-) + b_{ik} e_i(t_k^-), i = 1, \dots, N \\ e_i(t_k^+) = e_i(t_k^-), i = N + 1, \dots, Z, \\ t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (26)$$

其中, $\hat{f}(e_i(t)) = f(x_i(t)) - f(s(t))$, $e_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} e_i(t)$, $e_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} e_i(t)$. u_a 为自适应控制器, 应用于 N 个节点; $G_Z = (G_{ij}) \in \mathbf{R}^{Z \times Z}$ 为扩张后系统的耦合矩阵; $b_{ik} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ 表示第 i 个节点第 k 次脉冲时的脉冲增益. 一般情况下, 有 $e_i(t_k^-) = e_i(t_k)$, $i = 1, \dots, Z$. 同时, 将脉冲控制作用于自适应控制系统式 (8), 得到下面模型:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A \otimes I_n \eta(t) + C_Z \otimes I_n e(t) + \\ A_{aZ} \otimes I_n e(t - \tau), t \neq t_k \\ \eta(t_k^+) = \eta(t_k^-) + C_k \eta(t_k^-), t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ U = K \otimes I_n \eta(t), \eta(0) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

其中, $\eta_t = (\eta_1^T, \dots, \eta_N^T)^T \in \mathbf{R}^{nN}$, $C_k = \text{diag}\{c_{1k}, \dots, c_{Nk}\} \in \mathbf{R}^{nN \times nN}$, c_{ik} 为脉冲系统对节点 i 的自适应控制系统的第 k 次的控制增益.

事实上, 对于系统式 (26), 我们将其与控制器式 (27) 结合, 经过整合, 可以得到下面系统:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = H_Z \otimes I_n z(t) + \hat{G}_Z \otimes I_n z(t - \tau) + \begin{bmatrix} F_z(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + B_k z(t_k^-) \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned} F_z(t) &= (f^T(e_1(t)), \dots, f^T(e_Z(t)))^T \\ z(t) &= \begin{bmatrix} e(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n(N+Z)} \\ H_Z &= \begin{bmatrix} 0 & K_Z \\ C_Z & A \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N+Z) \times (N+Z)} \\ \hat{G}_Z &= \begin{bmatrix} G_Z & 0 \\ A_{aZ} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N+Z) \times (N+Z)} \\ C_Z &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{N \times Z} \\ A_{aZ} &= \begin{bmatrix} A_a & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{N \times Z} \\ K_Z &= \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Z \times N} \end{aligned}$$

$$B_k = \text{diag}\{b_{1k}, \dots, b_{Nk}, 0, \dots, 0, c_{1k}, \dots, c_{Nk}\} \in \mathbf{R}^{n(N+Z) \times n(N+Z)}$$

下面考虑系统扩张后的情况. 当系统节点扩张到 Z 后, 在原有控制器的条件下, 对于前面给的 V 函数, 类似地构造新系统的 V_C 为

$$V_C(z_t) = z^T(t)P_C \otimes I_n z(t) + \int_{t-\tau}^t z^T(s)S_C \otimes I_n z(s)ds \quad (29)$$

当存在 P_C, S_C , 使下列矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} H_Z^T P_C + P_C H_Z + S_C + l^2 I & P_C \hat{G}_Z & P_C \\ \hat{G}_Z^T P_C & -S_C & 0 \\ P_C & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

成立时, 则说明新系统在原控制器作用下仍然是稳定的. 此时, 不设计新的控制器. 否则, 就对新系统添加新的控制. 下面给出设计新控制器的方法.

对于系统式 (28), 当其渐近稳定时, 即代表扩张后的复杂网络系统在原自适应控制器和脉冲控制作用下达到同步.

定理 2. 在假设 1 的条件下, 对于复杂网络系统式 (26), 运用定理 1 所得到的控制器参数, 同时在脉冲控制器作用于原有节点条件下, 运用牵制控制方法, l 为一常数, 若且存在 P_Z, S_Z 为正定对称矩阵, 如果满足下列条件:

1) 对于所有的 $t \in (t_{k-1}, t_k]$, 存在常数 γ 使得

$$\begin{bmatrix} H_Z^T P_Z + P_Z H_Z + S_Z + l^2 I - \gamma P_Z & P_Z \hat{G}_Z & P_Z \\ \hat{G}_Z^T P_Z & -S_Z & 0 \\ P_Z & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (31)$$

2) 对于所有的 $k = 1, 2, \dots$, 有

$$\ln \beta_{kf}^2 + \gamma \max(t_k - t_{k-1}) \leq -\vartheta_k \quad (32)$$

3) 对于每个 $t = t_k$ 时刻点, 存在

$$\left(\int_{t_k-\tau}^{t_k} z^T(s)(I + B_k)^T(S_Z \otimes I_n)(I + B_k)z(s)ds + z^T(t_k)(I + B_k)^T(P_Z \otimes I_n) \times (I + B_k)z(t_k) \right) / V_Z(z_{t_k}) \leq \beta_{kf}^2 \quad (33)$$

其中, $\vartheta_k > 0, 0 < \beta_{kf} < 1, k = 1, 2, \dots, \gamma > 0, V_Z(z_{t_k}), z^T(t_k)$ 分别表示函数 $V_Z(z_t), z^T(t)$ 在 t_k 时刻的值. 则误差系统式 (26) 渐近稳定, 与其所对应的复杂网络系统达到同步状态.

证明. 针对系统式 (28), 取 Lyapunov 函数为

$$V_Z(z_t) = V_1(z_t) + V_2(z_t) \quad (34)$$

其中, $V_1(z_t) = z^T(t)P_Z \otimes I_n z(t), V_2(z_t) = \int_{t-\tau}^t z^T(s)S_Z \otimes I_n z(s)ds$

类似于定理 1 的证明, 我们可以得到

$$V_Z(z_t) \leq \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_Z^T P_Z + P_Z H_Z + S_Z + l^2 I_{2N} \\ \hat{G}_Z^T P_Z \\ P_Z \end{bmatrix} \otimes I_n \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

对于 N 个节点, 控制器式 (8) 可以使系统达到同步, 但当节点从 N 增加到 Z 时, 系统不稳定.

由定理 2 中的条件 1), 可知存在一个常数 $\gamma > 0$, 满足下式

$$V_Z(z_t) - \gamma V_1(z_t) \leq \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_Z^T P_Z + P_Z H_Z + S_Z + l^2 I_{2N} - \gamma P_Z \\ \hat{G}_Z^T P_Z \\ P_Z \end{bmatrix} \otimes I_n \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-\tau) \\ F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

得:

$$V_Z(z_t) \leq \gamma V_1(z_t) \quad (37)$$

由

$$V_2(z_t) > 0 \quad (38)$$

结合式 (37), 有:

$$V_Z(z_t) \leq \gamma V_Z(z_t) \quad (39)$$

设计脉冲控制器, 牵制作用于基础节点, 使系统稳定, 当 $t = t_k$ 时, 由于 $V_Z(z_t) = z^T(t)P_Z \otimes$

$I_n z(t) + \int_{t-\tau}^t z^T(s) S_Z \otimes I_n z(s) ds$, 可得:

$$V_Z(z_k^+) \leq z^T(t_k)(I + B_k)^T(P_Z \otimes I_n)(I + B_k)z(t_k) + \int_{t_k-\tau}^{t_k} z^T(s)(I + B_k)^T(S_Z \otimes I_n)(I + B_k)z(s)ds \quad (40)$$

对于式 (40), 由定理 2 中的条件 3), 有:

$$V_Z(z_k^+) \leq \beta_{kf}^2 V_Z(z_k^-) \quad (41)$$

对于误差系统式 (26), 从式 (39), 可得:

$$V_Z(z_t) \leq V_Z(t_{k-1}^+) \exp(\gamma(t - t_{k-1})), t \in (t_{k-1}, t_k] \quad (42)$$

结合式 (41) 和式 (42), 当 $t = t_1^+$ 时, 有:

$$V_Z(t_1^+) \leq \beta_{1f}^2 V_Z(t_1) \leq \beta_{1f}^2 \exp(\gamma(t_1 - t_0)) V_Z(t_0) \quad (43)$$

同样, 当 $t = t_2^+$ 时, 有:

$$V_Z(t_2^+) \leq \beta_{2f}^2 V_Z(t_2) \leq \beta_{2f}^2 \exp(\gamma(t_2 - t_1)) V_Z(t_1^+) \leq \beta_{2f}^2 \beta_{1f}^2 \exp(\gamma(t_1 - t_0) + \gamma(t_2 - t_1)) V_Z(t_0) \quad (44)$$

一般地, 有:

$$V_Z(t_k^+) \leq \prod_{i=1}^k \beta_{if}^2 \exp\left(\sum_{i=1}^k \gamma(t_i - t_{i-1})\right) V_Z(t_0) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^k \ln \beta_{if}^2 + \gamma(t_i - t_{i-1})\right) V_Z(t_0) \quad (45)$$

通过定理 2 中的条件 2), 可得:

$$V_Z(t_k^+) \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^k \vartheta_i\right) V_Z(t_0) \quad (46)$$

由此, 定理 2 得证. $\square$

推论 1. 在假设 1 的条件下, 对于复杂网络系统式 (26), 运用定理 1 所得到的控制器参数, 同时, 脉冲控制器作用于系统所有节点, 即 $B_k = \text{diag}\{b_{1k}, \dots, b_{Zk}, c_{1k}, \dots, c_{Nk}\} \in \mathbf{R}^{n(N+Z) \times n(N+Z)}$, 运用牵制控制方法, 若 l 为一常数, 且存在 P_Z, S_Z 为正定对称矩阵, 如果满足下列条件:

1) 对于所有的 $t \in (t_{k-1}, t_k]$, 存在常数 γ 使得

$$\begin{bmatrix} H_Z^T P_Z + P_Z H_Z + S_Z + l^2 I - \gamma P_Z & P_Z \hat{G}_Z & P_Z \\ \hat{G}_Z^T P_Z & -S_Z & 0 \\ P_Z & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

2) 对于所有的 $k = 1, 2, \dots$, 有

$$\ln \beta_{kf}^2 + \gamma \max(t_k - t_{k-1}) \leq -\vartheta_k$$

3) 对于每个 $t = t_k$ 时刻点, 存在

$$(z^T(t_k)(I + B_k)^T(P_Z \otimes I_n)(I + B_k)z(t_k) +$$

$$\int_{t_k-\tau}^{t_k} z^T(s)(I + B_k)^T(S_Z \otimes I_n)(I +$$

$$B_k)z(s)ds)/V_Z(z_{t_k}) \leq \beta_{kf}^2$$

其中, $\vartheta_k > 0$, $0 < \beta_{kf} < 1$, $k = 1, 2, \dots$, $\gamma > 0$, $V_Z(z_{t_k})$, $z^T(t_k)$ 分别表示函数 $V_Z(z_t)$, $z^T(t)$ 在 t_k 时刻的值. 则误差系统式 (26) 渐近稳定, 与其所对应的复杂网络系统达到同步状态.

证明过程可参考定理 2, 此略.

3 数值示例

为了说明问题, 考虑一个包含 3 个节点的网络, 其中每个节点是 3 维线性系统, 设有界函数的最大值 $L = 5$; 耦合矩阵:

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

时滞 $\tau = 0.01$, 性能指标中的加权矩阵为 $Q = 10 \times \text{diag}\{1, 2, 1\}$; $R = 0.1 \times \text{diag}\{1, 3, 1\}$. 给定系统的初始条件, 当 $t \in (-\tau, 0]$ 时,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [0.2 \exp(0.4t) \quad \exp(-0.6t) \quad -2 \exp(0.05t)]^T \\ x_2(t) &= [3 \exp(2t) \quad 1.5 \exp(-0.3t) \quad -2.3 \exp(0.1t)]^T \\ x_3(t) &= [0.5 \exp(0.2t) \quad 3.2 \exp(-0.3t) \quad -2.8 \exp(0.5t)]^T \end{aligned}$$

当系统没有添加控制器, 系统各节点误差状态曲线图如图 1 所示.

应用定理 1 所提出的方法, 通过 Matlab 软件中的 LMI 工具箱, 可以得到控制系统参数:

$$K = \begin{bmatrix} 46.7421 & -4.3767 & -6.4549 \\ -2.4620 & 40.5611 & -3.5518 \\ -6.2997 & -6.7296 & 48.7871 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -104.9029 & 1.4817 & 1.9231 \\ 1.4222 & -111.3832 & 1.7491 \\ 1.9262 & 1.8147 & -105.0619 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 162.2977 & 3.9777 & 3.9474 \\ 3.6632 & -184.3040 & 11.5953 \\ 8.3040 & 15.1744 & -173.7223 \end{bmatrix}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} 2.5196 & -1.2556 & -1.2640 \\ -1.3521 & 1.3591 & 0.0070 \\ -1.2659 & 0.0006 & 1.2665 \end{bmatrix}$$

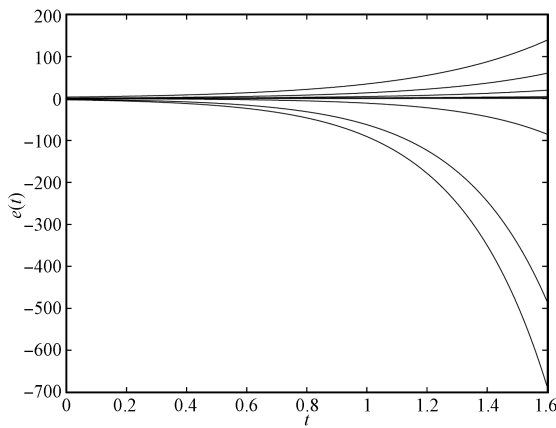
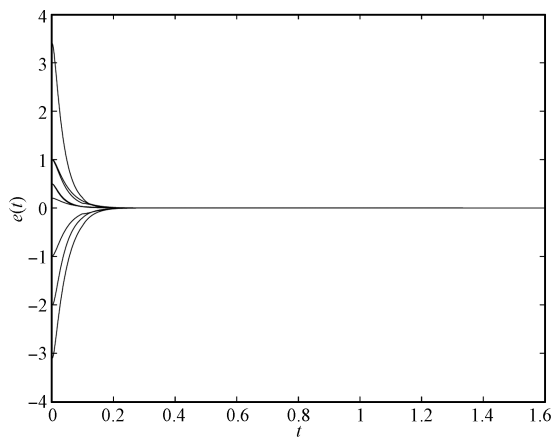


图1 节点状态误差 (无控制器作用)

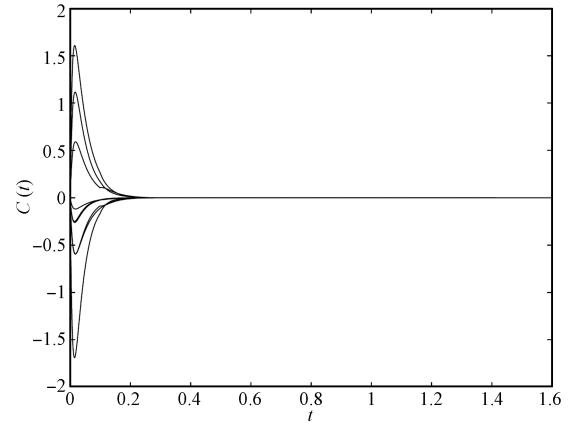
Fig. 1 The state error of node (no controller)

同时可得到相应的性能指标的上界 $J^* = 1.6068 \times 10^3$. 根据上面的数据, 添加控制器, 得系统各节点与同步状态的误差与时间的关系如图 2(a) 所示, 控制器状态与时间关系如图 2(b) 所示.



(a) 节点状态误差曲线图

(a) The state error of node



(b) 控制器状态曲线图

(b) The state of controller

图2 节点状态误差和控制状态曲线图 (无扩散)

Fig. 2 The graphs of state on node error and controller (no diffusion)

由图可知, 通过控制器控制, 经过一段时间后系统状态达到稳定值.

对于上面的系统, 其节点增加为 6 时, 其耦合矩阵为:

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

给定系统的初始条件, 当 $t \in (-\tau, 0]$ 时,

$$x_1(t) =$$

$$[0.2 \exp(0.4t) \exp(-0.6t) - 2 \exp(0.05t)]^T$$

$$x_2(t) =$$

$$[3 \exp(2t) 1.5 \exp(-0.3t) - 2.3 \exp(0.1t)]^T$$

$$x_3(t) =$$

$$[0.5 \exp(0.2t) 3.2 \exp(-0.3t) - 2.8 \exp(0.5t)]^T$$

$$x_4(t) =$$

$$[0.5 \exp(0.6t) - 2.4 \exp(-0.9t) - 1.5 \exp(0.5t)]^T$$

$$x_5(t) =$$

$$[3.7 \exp(2.3t) 1.8 \exp(-0.3t) 2.3 \exp(0.2t)]^T$$

$$x_6(t) =$$

$$[1.2 \exp(0.7t) 2.1 \exp(-0.8t) - 2.1 \exp(0.07t)]^T$$

对于该复杂网络系统, 自适应控制器参数依然为原 K, C, A, A_a , 在没有添加脉冲控制器的情况下, 其节点误差状态如图 3.

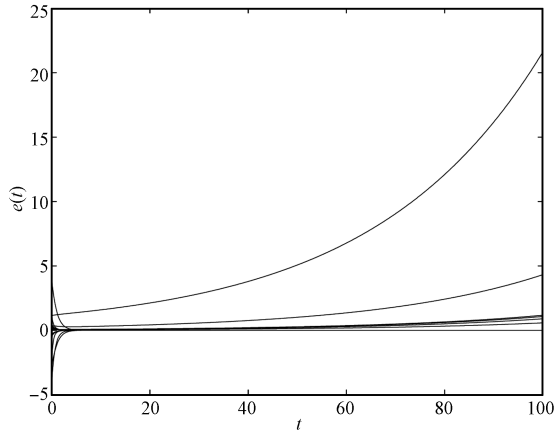


图3 节点误差状态 (无脉冲控制器作用)

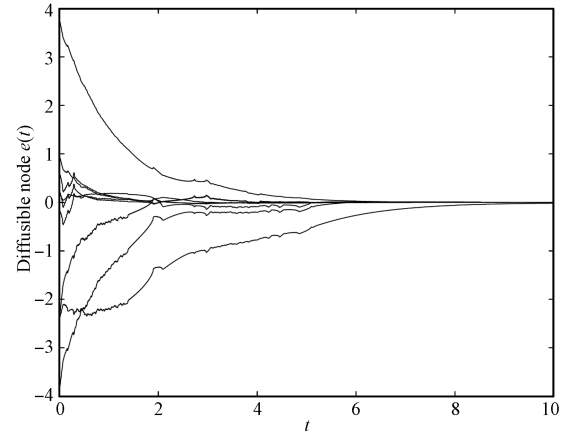
Fig.3 The state error of node (no impulse controller)

对原基础系统添加脉冲控制, 设脉冲控制发生时间间隔均为 $t_k - t_{k-1} = 0.01$, 描述状态的瞬时变量 $\beta_{kf} = 0.35$, 根据原有控制器的大小, 我们可得 $\gamma = 80$ 满足条件, 设 $\vartheta_k = 0.01$. 在原有控制器作用下, 添加脉冲控制, 可以分别得到系统原有节点与同步状态的误差与时间的关系如图 4(a), 系统扩张节点与同步状态的误差与时间的关系如图 4(b), 控制器状态与时间的关系如图 4(c).

由图可知, 通过控制器控制, 经过一段时间后系统状态达到稳定值.

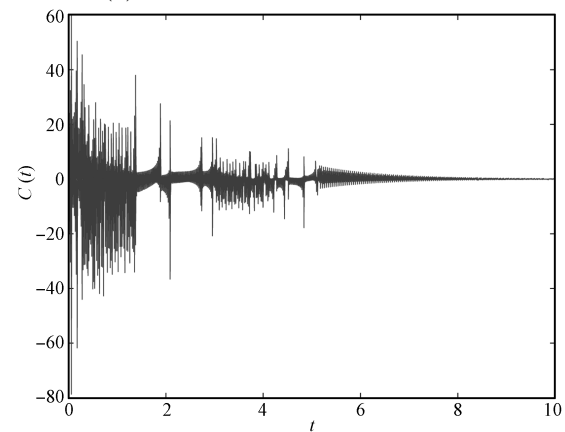
4 小结

本文针对节点扩张的具有时滞性的复杂网络系统, 在节点扩张的条件下, 讨论此类系统的同步保性能控制问题. 首先设计了一个自适应控制器使复杂网络系统达到同步稳定, 然后在上述研究的基础上, 考虑了当网络节点增加后, 先判断原有控制器是否



(b) 扩散节点状态误差曲线图

(b) The state error on diffusible node



(c) 控制器状态曲线图

(c) The state of controller

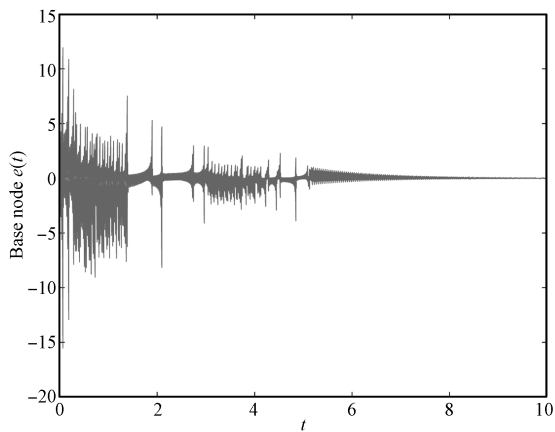
图4 基础节点、扩散节点、控制器状态曲线图 (系统扩散)

Fig.4 The graphs of state on basic node, diffusible node and controller (diffused)

使扩张后的系统稳定. 若稳定, 则不添加新控制; 若现有方法不能判断原有控制器使新系统同步稳定时, 则在保持原有控制器不变的情况下, 选择成本相对较低且灵活的脉冲控制方法, 设计脉冲控制器使系统达到同步稳定. 这样, 不但充分利用了原有控制器, 实现了资源节约, 并利用了牵制控制原理, 牵制部分节点使系统稳点, 优化了控制系统. 其中所设计的自适应动态反馈控制器在保证系统的渐近稳定条件下使系统的性能指标满足一定的要求. 最后给出数值仿真说明其有效性.

References

- 1 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*, 1998, **393**(6684): 440–442
- 2 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, **64**(8): 821–824
- 3 Zhang Y J, Gu D W, Xu S Y. Global exponential adaptive synchronization of complex dynamical networks with



(a) 基础节点状态误差曲线图

(a) The state error on basic node

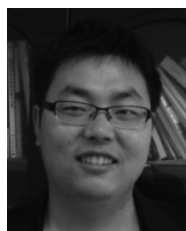
- neutral-type neural network nodes and stochastic disturbances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, **60**(10): 2709–2718
- 4 Zhou J, Lu J A, Lu J H. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(4): 652–656
 - 5 Liu H, Chen J, Lu J A, Cao M. Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2010, **389**(8): 1759–1770
 - 6 Su H S, Rong Z H, Chen M Z Q, Wang X F, Chen G R, Wang H W. Decentralized adaptive pinning control for cluster synchronization of complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, **43**(1): 394–399
 - 7 Chen Y, Yu W W, Li F F, Feng S S. Synchronization of complex networks with impulsive control and disconnected topology. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2013, **60**(5): 292–296
 - 8 Jiang H B, Bi Q S. Impulsive synchronization of networked nonlinear dynamical systems. *Physics Letters A*, 2010, **374**(27): 2723–2729
 - 9 Guan Z H, Liu Z W, Feng G, Wang Y W. Synchronization of complex dynamical networks with time-varying delays via impulsive distributed control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, **57**(8): 2182–2195
 - 10 Wang Y W, Yang M, Wang H O, Guan Z H. Robust stabilization of complex switched networks with parametric uncertainties and delays via impulsive control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2009, **56**(9): 2100–2108
 - 11 Wong W K, Zhang W B, Tang Y, Wu X T. Stochastic synchronization of complex networks with mixed impulses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, **60**(10): 2657–2667
 - 12 Li Z, Chen G R. Robust adaptive synchronization of uncertain dynamical networks. *Physics Letters A*, 2004, **324**(2–3): 166–178
 - 13 Mahdavi N, Menhaj M B, Kurths J, Lu J Q. Fuzzy complex dynamical networks and its synchronization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2013, **43**(2): 648–659
 - 14 Chen W H, Guan Z H, Lu X M. Delay-dependent output feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems. *Automatica*, 2004, **40**(7): 1263–1268
 - 15 Li Y, Jian C. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 1999, **35**(6): 1155–1159
 - 16 Dou C X, Duan Z S, Jia X B, Niu P F. Study of delay-independent decentralized guaranteed cost control for large scale systems. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2011, **9**(3): 478–488
 - 17 Xi J X, Yu Y, Liu G B, Zhong Y S. Guaranteed-cost consensus for singular multi-agent systems with switching topologies. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2014, **61**(5): 1531–1542
 - 18 Lee T H, Park J H, Ji D H, Kwon O M, Lee S M. Guaranteed cost synchronization of a complex dynamical network via dynamic feedback control. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, **218**(11): 6469–6481
 - 19 Liu Yue, Ma Shu-Ping. A singular system approach to output feedback sliding mode control for time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 594–601
(刘月, 马树萍. 时滞系统的输出反馈滑模控制的一种奇异系统方法. 自动化学报, 2013, **39**(5): 594–601)
 - 20 Su Cheng-Li, Zhao Jia-Cheng, Li Ping. Robust predictive control for a class of multiple time delay uncertain systems with nonlinear disturbance. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 644–649
(苏成利, 赵家程, 李平. 一类具有非线性扰动的多重时滞不确定系统鲁棒预测控制. 自动化学报, 2013, **39**(5): 644–649)
 - 21 Bekiaris-Liberis N, Krstic M. Compensation of state-dependent input delay for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(2): 275–289
 - 22 Liu Y R, Wang Z D, Liang J L, Liu X H. Synchronization and state estimation for discrete-time complex networks with distributed delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, **38**(5): 1314–1325
 - 23 Li Xiu-Ying, Wang Jin-Yu, Sun Shu-Li. H_∞ filter design for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 155–160
(李秀英, 王金玉, 孙书利. 具有一步随机时滞和多丢包的神经网络系统 H_∞ 滤波器设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 155–160)
 - 24 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.



罗毅平 湖南工程学院教授. 2006 年获华南理工大学博士学位. 主要研究方向为神经网络, 模式识别, 复杂网络和分布参数控制. E-mail: lyp8688@sohu.com

(**LUO Yi-Ping** Professor at Hunan Institute of Engineering. He received his Ph.D. degree from South China University of Technology in 2006. His

research interest covers neural network, pattern recognition, complex network, and distributed parameter systems control.)



周笔锋 湖南工程学院硕士研究生. 2012 年获湖南工程学院电气科学与技术专业学士学位. 主要研究方向为复杂网络和分布参数控制. 本文通信作者.

E-mail: zhoubifeng99@163.com
(**ZHOU Bi-Feng** Master student in power engineering, Hunan Institute of Engineering. He received his Bachelor

degree in electronic science and technology from Hunan Institute of Engineering in 2012. His research interest covers complex networks and distributed parameter systems control. Corresponding author of this paper.)