第 41 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 41, No. 1
2015 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA January, 2015

基于有限时间输出反馈的线性扩张状态观测器

杨 明 [1] 董 晨 [1] 王松艳 [1] 晁 涛 [1]

摘 要 为快速、准确地观测系统中的未知扰动及状态, 提出一种有限时间线性扩张状态观测器 (Finite-time linear extended state observer, FT-LESO), 它具有期望的收敛性能且结构简单、易于设计. 假设系统的状态无法量测, 观测器设计问题转化为扰动下的输出反馈控制问题. 针对该问题, 提出一种扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法, 得到控制器参数与闭环系统状态向量 2-范数间的解析关系. 在此基础上, 提出有限时间线性扩张状态观测器, 得到观测器参数与观测误差收敛速度及稳态观测误差间的解析关系, 给出一充分条件保证观测误差有限时间有界、且能以不低于指数收敛的速度收敛到给定范围内, 为观测器参数设计提供理论依据. 通过数值仿真验证提出的观测器, 仿真结果与理论分析相符, 提出的观测器是有效的.

关键词 线性扩张状态观测器, 有限时间, 输出反馈, 有限时间有界, 观测误差

引用格式 杨明, 董晨, 王松艳, 晁涛. 基于有限时间输出反馈的线性扩张状态观测器. 自动化学报, 2015, **41**(1): 59−66

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140095

Linear Extended State Observer Based on Finite-time Output Feedback

YANG Ming[1] DONG Chen[1] WANG Song-Yan[1] CHAO Tao[1]

Abstract To observe unknown disturbance and states in a system rapidly and exactly, a finite-time linear extended state observer (FT-LESO) is proposed. The observer is with desired observation performance, simple structure, and is easy to design. Suppose the states are unmeasurable, the observer design problem is transformed to an output-feedback control problem of a system with disturbance. To solve the control problem, a linear finite-time output-feedback control method is presented. An analytic relationship between the controller′s parameter and state vector′s 2-norm of the closed-loop system is derived. Based on the control method, an FT-LESO is proposed. An analytic relationship between the FT-LESO′s parameter, observation error′s convergence speed, and steady observation error is obtained. And a sufficient condition is derived to ensure the observation error is finite-time bounded and can converge to a specified range no slower than exponential convergence. This sufficient condition provides a theoretical basis for designing an FT-LESO. The FT-LESO is demonstrated by a numerical simulation. Simulation results are coincident with theoretical analysis. The proposed FT-LESO is effective.

Key words Linear extended state observer (LESO), finite-time (FT), output feedback, finite-time boundedness, observation error

Citation Yang Ming, Dong Chen, Wang Song-Yan, Chao Tao. Linear extended state observer based on finite-time output feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 59−66

扩张状态观测器 (Extended state observer, ESO) 可对系统中的不可测状态以及未知扰动进行观测, 它是自抗扰控制[1] 等非线性控制技术的重要组成部分, 在干扰估计[2−4]、故障诊断[5] 中发挥着重要作用, 被应用到很多工程领域[2−6].

按照结构不同, ESO 可分为线性扩张状态观测器 (Linear extended state observer, LESO) 与非线性扩张状态观测器 (Nonlinear extended state observer, NESO) 两类. NESO 是最先被提出的 ESO, 通过合理选择观测器中的非线性函数和相关参数, 观测器对一定范围的不确定系统有很好的扩张状态跟踪性能[7]. 二阶 NESO 的收敛性能可借助 Lyapunov 理论进行分析[8]. 对于高阶 NESO, 将观测误差系统转化为带有小扰动的渐近稳定系统, 并利用高增益消除扰动, 可以分析观测器的收敛性能[9−10]. 然而, NESO 中非线性函数的选择缺乏明确的理论依据, 大多数情况下需要依靠设计者的经验来选择. 为了便于 ESO 的设计与应用, 将 NESO 中的非线性函数替换为线性函数就得到了 LESO[11]. 可以证明, 对严重的模型不确定性及几种典型的干扰, LESO 的观测误差是有界的[12−13]. 进一步研究可知, 当系统模型已知时, 观测误差趋于零; 当系统模型未知时, 观测误差有界[14], 并得到观

收稿日期 2014-02-17 录用日期 2014-06-20
Manuscript received February 17, 2014; accepted June 20, 2014
国家自然科学基金创新研究群体 (61021002), 中央高等学校基本科研业务费专项资金 (HIT.NSRIF.2015036, HIT.NSRIF.2014036) 资助
Supported by the Innovative Team Program of National Natural Science Foundation of China (61021002) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.NSRIF.2015036, HIT.NSRIF.2014036)
本文责任编委 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 哈尔滨工业大学控制与仿真中心 哈尔滨 150080
1. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080

测误差收敛的条件, 给出观测器参数的数值设计方法[15]. 基于鲁棒控制理论也能得到 LESO 参数设计方法, 使观测误差满足二次型性能指标[16]. 区别于前述的时域方法, 可以从频域角度对 LESO 的收敛性能进行研究, 通过理论与数值方法得到 LESO 参数和观测效果的关系[17].

收敛性能是 ESO 的重要指标, 良好的收敛性能可以保证 ESO 快速、准确地估计扰动和状态, 这对于以 ESO 为基础的自抗扰控制、故障诊断等非常重要. 收敛性能同样是控制器设计的一个关键指标, 有限时间控制方法对于保证闭环系统的收敛性能有很大优势[18]. 但是, 目前少有文献从有限时间控制的角度对 ESO 的收敛性能进行研究并以此指导 ESO 设计. 借鉴有限时间输出反馈控制[19−20] 及有限时间观测器[21−22] 的思想, 本文提出一种有限时间线性扩张状态观测器 (Finite-time linear extended state observer, FT-LESO), 它除了具有 LESO 的结构简单、参数少、易于设计等优点外, 还具有有限时间特性. FT-LESO 能保证观测误差有限时间有界, 并得到时间、观测误差收敛速度、观测误差上界与观测器参数之间的解析关系式. 基于该关系式, 可以根据对观测误差收敛速度、稳态观测误差的要求设计观测器参数, 同时也能计算观测误差上界小于某一给定阈值的时间. 这对于设计具有期望收敛性能的 ESO 有重要的意义.

本文提出一种有限时间线性扩张状态观测器. 考虑系统状态无法量测的情况, 将 FT-LESO 的设计问题转化为存在扰动的观测误差系统的输出反馈控制问题. 针对这一问题, 提出一种扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法, 得到控制器参数与闭环系统状态向量 2-范数间的解析关系. 在此基础上提出 FT-LESO, 得到观测器参数与观测误差收敛速度及稳态观测误差间的解析关系, 给出一充分条件保证观测误差有限时间有界, 并且能以不低于指数收敛的速度收敛到给定范围内. 根据这一充分条件, 可计算 FT-LESO 参数, 保证观测误差的收敛速度和稳态观测误差满足要求, 使观测器获得期望的收敛性能. 利用数值仿真验证对提出的 FT-LESO 进行验证.

1 研究基础及问题描述

1.1 LESO 的一般形式

考虑一类存在扰动的 n 阶积分器链系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B[u(t) + w(t)] \\
y(t) &= C\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \boldsymbol{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \boldsymbol{0} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

其中, t 为时间, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}$ 为输入, $y(t) \in \mathbf{R}$ 为输出, $w(t) \in \mathbf{R}$ 为未知的扰动, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbf{R}^{1\times n}$ 分别为系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵.

将扰动 $w(t)$ 视为一个扩张状态, 在系统 (1) 的基础上得到状态扩张系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_E(t) &= A_1\boldsymbol{x}_E(t) + B_1u(t) + B_2\dot{w}(t) \\
y(t) &= C_1\boldsymbol{x}_E(t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中, $\boldsymbol{x}_E = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ w(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n+1}$ 为扩张的状态向量, $\dot{w}(t)$ 为扰动变化率, $A_1 \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $B_1 \in \mathbf{R}^{(n+1)\times 1}$, $B_2 \in \mathbf{R}^{(n+1)\times 1}$, $C_1 \in \mathbf{R}^{1\times(n+1)}$ 分别为

$$
A_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
C_1 = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}
$$

式中, 0 为维数恰当的零矩阵.

建立一般的 LESO

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}}(t) &= A_1\boldsymbol{z}(t) + B_1u(t) + B_2u_o(t) \\
y_o(t) &= C_1\boldsymbol{z}(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中, $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 为观测器状态向量, $u_o(t) \in \mathbf{R}$ 为观测器输入, $y_o(t) \in \mathbf{R}$ 为观测器输出. 记观测误差为 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{x}_E(t)$, 由系统 (2) 与观测器 (3) 可构造观测误差系统

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}(t) &= A_1\boldsymbol{e}(t) + B_2[u_o(t) - \dot{w}(t)] \\
y_e(t) &= C_1\boldsymbol{e}(t)
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中, $\boldsymbol{e}(t) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $y_e(t) \in \mathbf{R}$ 为观测误差系统的输出, $y_e(t) = y_o(t) - y(t)$. 当 $\boldsymbol{e}(t)$ 趋于零时, 由 $z(t)$ 即可得到状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 及扰动 $w(t)$ 的观测值.

1.2 问题描述

考察观测误差系统 (4), 观测器设计的目标是在存在未知的扰动变化率 $\dot{w}(t)$ 的情况下, 通过观测器输入 $u_o(t)$ 的控制作用使观测误差 $\boldsymbol{e}(t)$ 趋于零. 由于 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{x}_E(t)$, $\boldsymbol{x}_E(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ w(t)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}(t)$ 无法测量并且 $w(t)$ 未知, 因此无法获得系统 (4) 的状态 $\boldsymbol{e}(t)$, 故只能通过系统 (4) 的输出 $y_e(t)$ 构造控

制律. 在这种情况下, 观测器的设计问题可转化为存在未知扰动的系统 (4) 的输出反馈控制问题.

假设 1. 观测误差系统 (4) 满足 (A_1, B_2) 可控且 (A_1, C_1) 可观.

假设 2. 未知扰动 $w(t)$ 可微, 即扰动变化率 $\dot{w}(t)$ 有界, $\forall t \in \mathbf{R}_+$ 满足 $|\dot{w}(t)| \le d_2$, 其中 d_2 为大于零的实常数[11].

定义 1 (有限时间有界)[23]. 给定三个正标量 c_1, c_2, T, $c_1 < c_2$, 一个正定矩阵 R 和一类信号 W, 称线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{w}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 关于 $(c_1, c_2, W, \mathrm{T}, R)$ 有限时间有界, 如果对所有的 $\boldsymbol{w}(t) \in W$ 有 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} R \boldsymbol{x}_0 \le c_1 \Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t) \le c_2$, $\forall t \in [0, T]$.

基于以上的假设与定义, 本文研究的观测器设计问题可描述为:

问题 1. 设计输出反馈控制器

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= A_k\boldsymbol{\xi}(t) + B_k y_e(t)\\ u_o(t) &= C_k\boldsymbol{\xi}(t)\end{aligned} \tag{5}$$

其中, $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 为输出反馈控制器的状态向量, $A_k \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $B_k \in \mathbf{R}^{(n+1)\times 1}$, $C_k \in \mathbf{R}^{1\times(n+1)}$ 分别为待设计的输出反馈控制器参数矩阵.

使观测误差系统 (4) 和输出反馈控制器 (5) 构成的闭环系统满足:

1) 观测误差有限时间有界;

2) 观测误差的 2-范数以期望的速度收敛到给定的范围内.

2　有限时间线性扩张状态观测器

针对问题 1, 本节通过引理 1 及定理 1 给出扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法. 在此基础上, 通过定理 2 给出 FT-LESO 以及基于有限时间线性输出反馈的 FT-LESO 设计方法.

2.1　扰动下的有限时间线性输出反馈控制

在给出定理 1 前, 首先给出得到定理 1 所需的引理及其证明.

引理 1 (系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = J\boldsymbol{x}(t)$ 的性质). 有 n 阶线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = J\boldsymbol{x}(t)$, 系统矩阵 $J \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为具有 n 个重特征值 $\lambda \in \mathbf{R}$ 的 Jordan 阵. 设 $V(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|_2^2$, 则 $\dot{V}(t) \le 2(1+\lambda)V(t)$. 其中, $\|\cdot\|_2$ 代表向量的 2-范数.

证明. 取 Lyapunov 函数 $V(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|_2^2 \ge 0$, 则 $V(t)$ 对时间的变化率为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)J\boldsymbol{x}(t) = \\ &2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\lambda I\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\hat{I}\boldsymbol{x}(t)\right] = \\ &2\left[\lambda V(t) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

式中, I 为维数恰当的单位阵, x_i 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的第 i 个元素, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\hat{I}$ 为一上三角矩阵

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \emptyset \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \emptyset & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由于

$$\begin{aligned}V(t) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \\ &\frac{1}{2}\left[x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2\right] \ge 0\end{aligned}$$

因此, 有

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \le V(t)$$

将上式代入式 (6), 有

$$\dot{V}(t) \le 2(1+\lambda)V(t)$$

□

在引理 1 的基础上, 定理 1 给出了扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法.

定理 1 (扰动下的有限时间线性输出反馈控制). 在假设 1 与假设 2 下, 对于存在扰动的线性系统 (4) 以及实数 $\gamma > 1$, 若输出反馈控制器 (5) 满足 $A_k = A_1 + B_2C_k - B_kC_1$, $\lambda_i(A_1 + B_2C_k) = -\gamma$, $\lambda_i(A_1 - B_kC_1) = -\gamma$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$, $\lambda_i(\cdot)$ 代表矩阵的第 i 个特征值, 则闭环系统:

1) 关于 (c_1, c_2, W, T, I) 有限时间有界. 记闭环系统状态向量为 $\boldsymbol{X}(t)$, 有 $c_1 = \|\boldsymbol{X}(0)\|_2^2$, $c_2 = \kappa_2^2(Q)c_1$, $T \in \mathbf{R}_+$, W 为符合假设 2 的一类扰动的集合, $I \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$ 为单位矩阵. 并且 $\forall T \in \mathbf{R}_+$, $\|\boldsymbol{X}(T)\|$ 存在一个上界

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}(T)\|_2 \le &-\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \\ &\left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)T}\end{aligned}$$

式中, $k(\gamma) = \|Q\|_2\|Q^{-1}B_X\|_2$, $\kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \times \|Q^{-1}\|_2$ 为 Q 的谱条件数, $Q \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$ 为可逆的变换矩阵, $Q^{-1}A_XQ = J$, A_X 与 B_X 分别为

$$A_X = \begin{bmatrix} A_1 & B_2C_k \\ B_kC_1 & A_k \end{bmatrix}, \quad B_X = \begin{bmatrix} -B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$J \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$ 为 Jordan 矩阵.

2) $\|\boldsymbol{X}(t)\|$ 以不低于 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$ 的速度收敛到 $[0, -k(\gamma)d_2/(1-\gamma)]$ 内.

证明. 存在扰动的线性系统 (4) 与输出反馈控制器 (5) 构成的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = A_X\boldsymbol{X}(t) + B_X\dot{w}(t)$$

$$A_X = \begin{bmatrix} A_1 & B_2C_k \\ B_kC_1 & A_k \end{bmatrix}, \quad B_X = \begin{bmatrix} -B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{2(n+1)}$ 为闭环系统的状态向量, $A_X \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$ 为系统矩阵, $B_X \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 1}$ 为输入矩阵. 取实数 $\gamma > 0$, 根据假设 1, 通过极点配置设计 B_k 与 C_X, 使 $\lambda_i(A_1 + B_2C_k) = -\gamma$, $\lambda_i(A_1 - B_kC_1) = -\gamma$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$, 并设 $A_k = A_1 + B_2C_k - B_kC_1$. 考察 A_X 有

$$A_X = \begin{bmatrix} A_1 & B_2C_k \\ B_kC_1 & A_1 + B_2C_k - B_kC_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_1 + B_2C_k & B_2C_k \\ 0 & A_1 - B_kC_1 \end{bmatrix} = \bar{A}_X$$

其中, $\bar{A}_X$ 为 A_X 的相似矩阵. 根据分块矩阵及相似矩阵的性质可知, $\lambda_i(A_X) = -\gamma$, $i = 1, 2, \cdots, 2(n+1)$. 对 $\bar{A}_X$ 进行 Jordan 分解有 $\bar{A}_X = QJQ^{-1}$. 通过线性变换 $\boldsymbol{X}(t) = Q\boldsymbol{Y}(t)$, 将闭环系统 (7) 变换为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = J\boldsymbol{Y}(t) + Q^{-1}B_X\dot{w}(t)$$

取 Lyapunov 函数 $V(t) = \|\boldsymbol{Y}(t)\|_2^2 = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}(t)$, 则

$$\dot{V}(t) = \dot{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}(t) + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = 2\left[\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)J\boldsymbol{Y}(t) + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)Q^{-1}B_X\dot{w}(t)\right] \tag{8}$$

根据引理 1, 对式 (8) 进行整理有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = 2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)J\boldsymbol{Y}(t) + 2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)Q^{-1}B_X\dot{w}(t) \le \\ 2(1-\gamma)V(t) + 2\left|\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)Q^{-1}B_X\dot{w}(t)\right| \le \\ 2(1-\gamma)V(t) + 2\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2\left\|Q^{-1}B_X\right\|_2|\dot{w}(t)|\end{aligned} \tag{9}$$

取 $v(t) = V^{0.5}(t) = \|Y(t)\|_2$, 将 $v(t)$ 代入式 (9), 可得

$$\dot{v}(t) \le (1-\gamma)v(t) + \left\|Q^{-1}B_X\right\|_2|\dot{w}(t)|$$

根据假设 2 中的 $|(\dot{w})| \le d_2$, 有

$$\dot{v}(t) \le (1-\gamma)v(t) + \left\|Q^{-1}B_X\right\|_2 d_2$$

将上式两端同时对时间积分, 以 $\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2$ 代替 $v(t)$, 整理可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \le -\frac{d_2}{1-\gamma}\|Q^{-1}B_X\|_2 + \\ \left[\|\boldsymbol{Y}(0)\|_2 + \frac{d_2}{1-\gamma}\left\|Q^{-1}B_X\right\|_2\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}\end{aligned} \tag{10}$$

由线性变换 $\boldsymbol{X}(t) = Q\boldsymbol{Y}(t)$, 根据向量范数与矩阵范数的相容性, 有

$$\frac{1}{\|Q\|_2}\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \le \|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \le \|Q^{-1}\|_2\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \tag{11}$$

将式 (11) 代入式 (10), 可得

$$\begin{aligned}\frac{\|\boldsymbol{X}(t)\|_2}{\|Q\|_2} \le \|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \le -\frac{d_2}{1-\gamma}\|Q^{-1}\boldsymbol{B}_X\|_2 + \\ \left[\|Q^{-1}\|_2\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{d_2}{1-\gamma}\|Q^{-1}B_X\|_2\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}\end{aligned}$$

经整理有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \le -\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \\ \left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}\end{aligned} \tag{12}$$

式中, $k(\gamma) = \|Q\|_2\|Q^{-1}B_X\|_2$, $\kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \times \|Q^{-1}\|_2$. $\boldsymbol{X}(0)$ 为闭环系统状态的初值, $\|\boldsymbol{X}(0)\|_2$ 有界. 当取 $\gamma > 1$ 时:

1) 设单位阵 $I \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$, 由于 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t) \times I\boldsymbol{X}(t) = \|X(t)\|_2^2$, 取三个正标量 $c_1 = \|X(0)\|_2^2$, $c_2 = \kappa_2^2(Q)c_1$, $T \in \mathbf{R}_+$, 记 W 为符合假设 2 的所有扰动的集合, 则根据式 (12) 易知, $\forall w(t) \in W$ 和 $t \in [0, T]$, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(0)I\boldsymbol{X}(0) \le c_1 \Rightarrow \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)I\boldsymbol{X}(t) \le c_2$, 闭环系统关于 (c_1, c_2, W, T, I) 有限时间有界. 并且由式 (12), $\forall T \in \mathbf{R}_+$, $\|\boldsymbol{X}(T)\|_2$ 满足

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}(T)\|_2 \le -\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \\ \left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)T}\end{aligned}$$

2) 根据式 (12), 当 $t \to +\infty$ 时, $\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \le -k(\gamma)d_2/(1-\gamma)$, 并且在 $t \to +\infty$ 的过程中 $\|\boldsymbol{X}(t)\|_2$ 的收敛速度不低于 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$. 因此, 闭环系统

状态向量的 2-范数能以不低于 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$ 的速度收敛到给定范围 $[0, -k(\gamma)d_2/(1-\gamma)]$ 内.

□

2.2 基于有限时间输出反馈的 FT-LESO

基于定理 1 给出的扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法, 本小节对 FT-LESO 进行研究, 通过定理 2 给出 FT-LESO 及其设计方法.

定理 2 (FT-LESO设计方法). 对于满足假设 1 与假设 2 的系统 (1) 以及实数 $\gamma > 1$, 有 FT-LESO

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}(t) &= A_1\boldsymbol{z}(t) + B_2C_k(\gamma)\boldsymbol{\xi}(t) + B_1u(t)\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= B_k(\gamma)C_1\boldsymbol{z}(t) + A_k(\gamma)\boldsymbol{\xi}(t) - B_k(\gamma)y(t)\end{aligned} \tag{13}$$

若 FT-LESO 的参数矩阵 $A_k(\gamma)$, $B_k(\gamma)$, $C_k(\gamma)$ 满足 $A_k = A_1 + B_2C_k - B_kC_1$, $\lambda_i(A_1 + B_2C_k) = -\gamma$, $\lambda_i(A_1 - B_kC_1) = -\gamma$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$, 则 $\boldsymbol{z}(t)$ 能够跟踪 $\boldsymbol{x}_E(t) = [x_1, x_2, \cdots, x_n, w]^{\mathrm{T}}$, 并使跟踪误差 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{x}_E(t)$ 满足:

1) $\boldsymbol{e}(t)$ 关于 (c_1, c_2, W, T, I) 有限时间有界. 其中, $T \in \mathbf{R}_+$, $c_1 = \|\boldsymbol{e}(0)\|_2^2$, $c_2 = [\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2]^2$, $\boldsymbol{X}(0) = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(0), \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}(0)$ 为输出反馈控制器状态的初值, W 为符合假设 2 的一类扰动的集合, $I \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$ 为单位阵. 并且 $\forall T \in \mathbf{R}_+$, $\|\boldsymbol{e}(T)\|_2$ 存在一个上界

$$\|\boldsymbol{e}(T)\|_2 \leq -\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)T}$$

2) $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2$ 向给定有界范围内收敛的速度不低于 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$.

3) 对于给定正实数 δ, 当 $t \to +\infty$ 时稳态观测误差 $\boldsymbol{e}(\infty)$ 满足 $\|\boldsymbol{e}(\infty)\|_2 \leq \delta$ 的充分条件为

$$\gamma \geq \frac{d_2}{\delta} + 1 \tag{14}$$

称 γ 为 FT-LESO 的观测器参数.

证明. 根据定理 1, 利用有限时间线性输出反馈控制方法针对一般 LESO (3) 设计控制器, 将得到的控制器 (5) 代入式 (3), 可得 FT-LESO

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}(t) &= A_1\boldsymbol{z}(t) + B_2C_k(\gamma)\boldsymbol{\xi}(t) + B_1u(t)\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &= B_k(\gamma)C_1\boldsymbol{z}(t) + A_k(\gamma)\boldsymbol{\xi}(t) - B_k(\gamma)y(t)\end{aligned}$$

设计观测器参数矩阵 A_k, B_k, C_k, 使它们满足 $A_k = A_1 + B_2C_k - B_kC_1$, $\lambda_i(A_1 + B_2C_k) = -\gamma$, $\lambda_i(A_1 - B_kC_1) = -\gamma$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$, 观测器参数 $\gamma > 1$. 根据定理 1, $\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, $\|\boldsymbol{X}(t)\|^2$ 满足式 (12) 且闭环系统是有限时间有界的. 由于 $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2 \leq \|\boldsymbol{X}(t)\|_2$, 将其代入式 (12), 有

$$\|\boldsymbol{e}(t)\|_2 \leq -\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)t} \tag{15}$$

式中, $k(\gamma) = \|Q\|_2\|Q^{-1}B_X\|_2$, $\boldsymbol{X}(0) = [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(0)\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}(0)$ 为输出反馈控制器初值, $\|\boldsymbol{\xi}(0)\|_2$ 与 $\|\boldsymbol{X}(0)\|_2$ 均是有界的. 当 $\gamma > 1$ 时:

1) 设单位阵 $I \in \mathbf{R}^{2(n+1)\times 2(n+1)}$, 取三个正标量 $c_1 = \|\boldsymbol{e}(0)\|_2^2$, $c_2 = [\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2]^2$, $T \in \mathbf{R}_+$, 记 W 为符合假设 2 的所有扰动的集合, 则根据式 (15) 易知, $\forall\, w(t) \in W$ 和 $t \in [0, T]$, $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(0)I\boldsymbol{e}(0) \leq c_1 \Rightarrow \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)I\boldsymbol{e}(t) \leq c_2$, $\boldsymbol{e}(t)$ 关于 (c_1, c_2, W, T, I) 有限时间有界. 并且根据式 (15), $\forall T \in \mathbf{R}_+$, $\|\boldsymbol{e}(T)\|_2$ 满足

$$\|\boldsymbol{e}(T)\|_2 \leq -\frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma} + \left[\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + \frac{k(\gamma)d_2}{1-\gamma}\right]\mathrm{e}^{(1-\gamma)T}$$

2) 根据式 (15), 在 $t \to +\infty$ 的过程中, 式 (15) 右端第 2 项以 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$ 的速度趋于零. 而由式 (15) 右端第 1 项可知, 当 $t \to +\infty$, $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2 \leq -k(\gamma)d_2/(1-\gamma)$. 因此, $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2$ 能以不低于 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)t}$ 的速度收敛到 $(0, -k(\gamma)d_2/(1-\gamma)]$ 内.

3) 称 $t \to +\infty$ 时的观测误差为稳态观测误差, 记为 $\boldsymbol{e}(\infty)$. 根据定理 1, 对于给定正实数 δ, 当 $\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \leq \delta$ 时, 有 $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2 \leq \|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \leq \delta$. 此时, 由式 (11) 可知

$$\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \leq \|Q^{-1}\|_2\|\boldsymbol{X}(t)\|_2 \leq \delta\|Q^{-1}\|$$

根据式 (10) 可知, 当 $t \to +\infty$ 时, 有

$$\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \leq -\frac{d_2}{1-\gamma}\|Q^{-1}B_X\|_2 \leq -\frac{d_2}{1-\gamma}\|Q^{-1}\|_2\|B_X\|_2 = \frac{d_2}{\gamma-1}\|Q^{-1}\|_2$$

因此, 若使 $\|\boldsymbol{Y}(t)\|_2 \leq \delta\|Q^{-1}\|_2$, 则须使 $\|Q^{-1}\|_2 d_2/(\gamma-1) \leq \delta\|Q^{-1}\|_2$, 即 $1 + d_2/\delta \leq \gamma$. 因此, $\|\boldsymbol{e}(\infty)\|_2 \leq \delta$ 的充分条件为 $\gamma \geq 1 + d_2/\delta$. □

注 1. 根据定理 2 可知, FT-LESO 的观测误差是有限时间有界的. 由式 (15) 可知, 随观测器参数 γ 的增大, 观测误差 2-范数的收敛速度增快. 稳态观测误差的 2-范数不超出由 δ 规定的范围, 且该范围随观测器参数 γ 的增大而减小. 此外, 通过式 (15) 还能计算 $\|\boldsymbol{e}(t)\|_2$ 上界小于某一给定阈值的时间, 即对于两个正实数 $T > 0$、$\varepsilon > 0$, 使 $\|\boldsymbol{e}(T)\|_2 \leq \varepsilon$ 的 T 满足

$$T \geq \ln\left[\frac{(1-\gamma)\varepsilon + k(\gamma)d_2}{(1-\gamma)\kappa_2(Q)\|\boldsymbol{X}(0)\|_2 + k(\gamma)d_2}\right]$$

上述性质对于观测器设计以及扰动观测与补偿具有重要的意义.

注 2. 基于定理 2 给出的 FT-LESO 设计方法, 能够得到结构简单且仅含一个设计参数的 FT-LESO. 利用定理 2, 可以根据对观测误差收敛速度以及稳态观测误差的设计要求计算观测器参数 γ, 使观测器具有期望的收敛性能, 这有利于 FT-LESO 的设计与应用.

3 数例与仿真验证

考虑如下存在扰动的双积分器系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = Ax(t) + B[u(t) + w(t)], \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\\ &y = Cx(t)\\ &A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \ C = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}^{\rm T}\end{aligned} \tag{16}$$

假设扰动 $w(t) = 0.01\sin(t)$, 设计 FT-LESO 对扰动进行观测. 系统 (16) 的状态扩张系统如式 (2) 所示, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \ B_2 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ \ C_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\rm T}$$

A_1, B_2, C_1 符合假设 1. 取观测器参数 $\gamma > 1$, 根据定理 2 给出的方法, 设计观测器参数矩阵为

$$B_k = \begin{bmatrix}3\gamma\\ 3\gamma^2\\ \gamma^3\end{bmatrix},\ \ C_k = -\begin{bmatrix}\gamma^3\\ 3\gamma^2\\ 3\gamma\end{bmatrix}^{\rm T}$$
$$A_k = A_1 + B_2C_k - B_kC_1$$

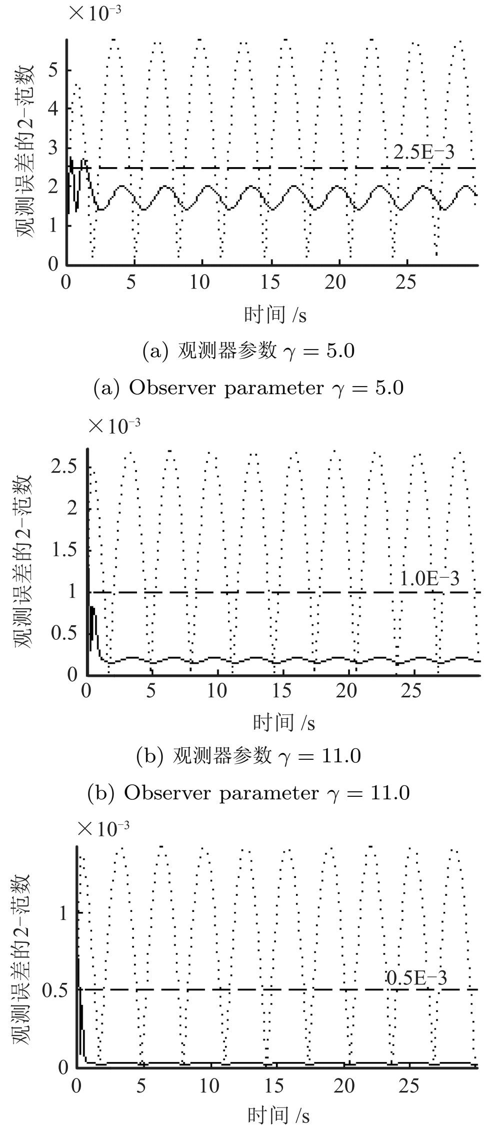
得到如式 (13) 所示的 FT-LESO. 扰动 $w(t)$ 及其变化率 $\dot{w}(t)$ 满足假设 2, $d_2 = 0.01$. 根据定理 2 中的式 (14), 当 $\delta = 2.5\times10^{-3}$, 1.0×10^{-3}, 5.0×10^{-4} 时, 计算可得对应的 $\gamma \geq 5.0$, 11.0, 21.0.

在数值仿真中, 设初始时刻为 0, 系统 (16) 的初值 $\boldsymbol{x}(0) = [1\ 0.1]^{\rm T}$, 利用 PD 控制律 $u(t) = -(x_1 + 2x_2)$ 镇定系统 (16). 作为对比, 引入文献 [11] 中的 LESO

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t) + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t) - \begin{bmatrix}3\gamma\\ 3\gamma^2\\ \gamma^3\end{bmatrix}e_1(t)$$

式中, $e_1(t) = z_1(t) - x_1(t)$, γ 为观测器参数. 对 LESO 建立观测误差系统 (4), 可见 γ 的作用也是将观测误差系统的系统矩阵的全部特征值配置到 $-\gamma$. FT-LESO 及 LESO 的初值均设为 $\boldsymbol{z}(0) = [1\ \ 0.1\ \ 0]^{\rm T}$, FT-LESO 中输出反馈控制器初值取为 $\boldsymbol{\xi}(0) = [0\ \ 0\ \ 0]^{\rm T}$. 分别取 $\gamma = 5.0$, 11.0, 21.0 对 FT-LESO 与 LESO 同时进行仿真, 考察两种观测器对扰动的观测效果, 仿真结果如图 1 和图 2 所示.

观测误差的 2-范数随时间的变化曲线如图 1 所示. 图中, 实线代表 FT-LESO 的观测误差 2-范数, 虚线代表 LESO 的观测误差 2-范数, 长虚线代表稳



(a) 观测器参数 $\gamma = 5.0$

(a) Observer parameter $\gamma = 5.0$

(b) 观测器参数 $\gamma = 11.0$

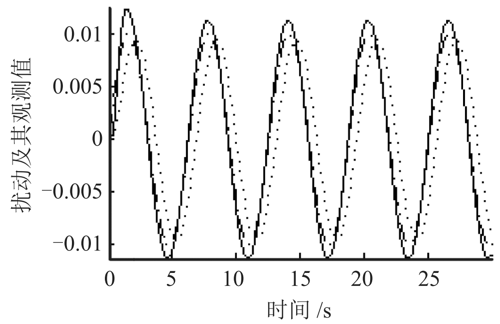
(b) Observer parameter $\gamma = 11.0$

(c) 观测器参数 $\gamma = 21.0$

(c) Observer parameter $\gamma = 21.0$

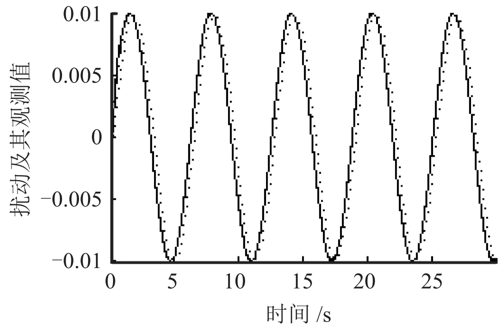
图 1 观测误差的 2-范数随时间的变化曲线 (实线: FT-LESO; 虚线: LESO)

Fig. 1 The 2-norm of the observation error vs. time (solid line: FT-LESO; dash line: LESO)



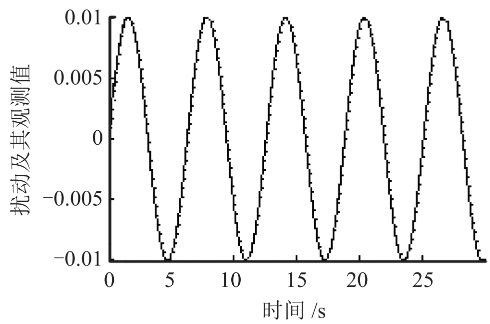
(a) 观测器参数 $\gamma = 5.0$

(a) Observer parameter $\gamma = 5.0$



(b) 观测器参数 $\gamma = 11.0$

(b) Observer parameter $\gamma = 11.0$



(c) 观测器参数 $\gamma = 21.0$

(c) Observer parameter $\gamma = 21.0$

图 2 扰动及其观测值随时间的变化曲线 (点划线: 扰动真实值; 实线: FT-LESO 观测值; 虚线: LESO 观测值)

Fig. 2 The disturbance and its estimations vs. time (dash dot line: disturbance; solid line: FT-LESO; dash line: LESO)

态观测误差 2-范数的上限值 δ. 由图 1 可见, FT-LESO 的观测误差 2-范数有界, 随着观测器参数 γ 的增大, FT-LESO 观测误差 2-范数的衰减速度增快, 且 FT-LESO 的稳态观测误差 2-范数均小于规定的上限值. 上述结果与定理 2 给出的结果相符. 同时, 对比 FT-LESO 与 LESO 的观测误差 2-范数可见, FT-LESO 观测误差的 2-范数明显小于 LESO 观测误差的 2-范数.

扰动及其观测值随时间的变化曲线如图 2 所示. 图中, 点划线代表扰动的真实值, 实线代表 FT-LESO 的扰动观测值, 虚线代表 LESO 的扰动观测值. 由图可见, 随着观测器参数 γ 的增大, FT-LESO 与 LESO 均能够更快地对扰动进行跟踪. 但与 LESO 相比, FT-LESO 对扰动的跟踪效果更好, 该结果与图 1 给出的观测误差的 2-范数随时间的变化曲线相符.

4 结论

本文在研究扰动下的有限时间线性输出反馈控制方法的基础上, 提出一种有限时间线性扩张状态观测器, 保证观测误差有限时间有界, 并且观测误差的 2-范数能以不低于指数收敛的速度收敛到给定范围内. 得到观测器参数与观测误差收敛速度、稳态观测误差间的解析关系式, 为观测器的参数设计提供了理论依据. 仿真结果表明, 随观测器参数增大, 观测误差 2-范数的收敛速度增快、稳态观测误差 2-范数减小, 并且稳态观测误差的 2-范数小于规定的上限值, 该结果与理论分析相符. 得到的观测器结构简单、设计参数少、有利于观测器设计与应用. 提出的有限时间线性扩张状态观测器是有效的.

References

1 Han J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(3): 900−906

2 Yin Yong-Xin, Shi Wen, Yang Ming. Integrated guidance and control based on dynamic inverse and extended state observer method. *Systems Engineering and Electronics*, 2011, **33**(6): 1342−1345
(尹永鑫, 石文, 杨明. 基于动态逆和状态观测的制导控制一体化设计. 系统工程与电子技术, 2011, **33**(6): 1342−1345)

3 Yao Yu, Wang Yu-Hang. Acceleration estimation of maneuvering targets based on extended state observer. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, **31**(11): 2682−2692
(姚郁, 王宇航. 一基于扩张状态观测器的机动目标加速度估计. 系统工程与电子技术, 2009, **31**(11): 2682−2692)

4 Chen Guo-Dong, Jia Pei-Fa. Robust decentralized trajectory tracking control of robot manipulators based on extended state observer. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 828−832
(陈国栋, 贾培发. 基于扩张状态观测的机器人分散鲁棒跟踪控制. 自动化学报, 2008, **34**(7): 828−832)

5 Yan B Y, Tian Z H, Shi S J, Weng Z X. Fault diagnosis for a class of nonlinear systems via ESO. *ISA Transactions*, 2008, **47**(4): 386−394

6 Ma Hong-Yu, Su Jian-Bo. Uncalibrated robotic 3D hand-eye coordination based on auto disturbance rejection controller. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(3): 400−406
(马红雨, 苏剑波. 基于自抗扰控制器的机器人无标定三维手眼协调. 自动化学报, 2004, **30**(3): 400−406)

7 Han Jing-Qing. A class of extended state observers for uncertain systems. *Control and Decision*, 1995, **10**(1): 85−88
(韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器. 控制与决策, 1995, **10**(1): 85−88)

8 Gan Zuo-Xin, Han Jing-Qing. Construction of Lyapunov function for 2-order ESO. In: Proceedings of the 21th Chinese Control Conference. Beijing, China: TCCT, 2002. 354−357
(甘作新, 韩京清. 二阶 ESO 的 Lyapunov 函数构造. 第 21 届中国控制会议论文集. 中国, 北京: 中国自动化学会控制理论专业委员会, 2002. 354−357)

9 Guo B Z, Zhao Z L. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty. *Systems and Control Letters*, 2011, **60**(6): 420−430

10 Guo B Z, Zhao Z L. On convergence of non-linear extended state observer for multi-input multi-output systems with uncertainty. *IET Control Theory and Applications*, 2012, **6**(15): 2375−2386

11 Gao Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. In: Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, USA: IEEE, 2003. 4989−4996

12 Yang X X, Huang Y. Capabilities of extended state observer for estimating uncertainties. In: Proceedings of the 2009 American Control Conference. St. Louis, USA: IEEE, 2009. 3700−3705

13 Zheng Q, Gao L Q, Gao Z Q. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 3501−3506

14 Chen Zeng-Qiang, Sun Ming-Wei, Yang Rui-Guang. On the stability of linear active disturbance rejection control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 574−580
(陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究. 自动化学报, 2013, **39**(5): 574−580)

15 Yoo D, Yau S S T, Gao Z. Optimal fast tracking observer bandwidth of the linear extended state observer. *International Journal of Control*, 2007, **80**(1): 102−111

16 Xu Zhi-Cai, Wang Zhi-Sang, Wang Yong-Ji. Optimal control of nonlinear system based on linear extended state observer. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Beijing, China: TCCT, 2011. 97−101
(许志才, 王志桑, 王永骥. 基于线性扩张状态观测器的非线性系统最优控制. 第 30 届中国控制会议论文集. 中国, 北京: 中国自动化学会控制理论专业委员会, 2011. 97−101)

17 Wang Hai-Qiang, Huang Hai. Property and applications of extended state observer. *Control and Decision*, 2013, **28**(7): 1078−1082
(王海强, 黄海. 扩张状态观测器的性能与应用. 控制与决策, 2013, **28**(7): 1078−1082)

18 Ding Shi-Hong, Li Shi-Hua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, **26**(2): 161−169
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. 控制与决策, 2011, **26**(2): 161−169)

19 Hong Y R, Huang J, Xu Y S. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(2): 305−309

20 Angulo M T, Fridman L, Moreno J A. Output-feedback finite-time stabilization of disturbed feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 2013, **49**(9): 2767−2773

21 Perruquetti W, Floquet T, Moulay E. Finite-time observers: application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(1): 356−360

22 Shen Y J, Huang Y H, Gu J. Global finite-time observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 418−424

23 Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. *Automatica*, 2006, **42**(2): 337−342

杨 明 哈尔滨工业大学控制与仿真中心教授. 主要研究方向为飞行器制导与控制, 复杂系统建模与仿真.
E-mail: myang@hit.edu.cn
(**YANG Ming** Professor at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology. His research interest covers guidance and control of air vehicles, and modeling and simulation of complex systems.)

董 晨 哈尔滨工业大学控制与仿真中心博士研究生. 主要研究方向为有限时间控制, 飞行器制导、控制与仿真.
E-mail: chendong@hit.edu.cn
(**DONG Chen** Ph. D. candidate at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology. His research interest covers finite-time control, guidance, control, and simulation of air vehicles.)

王松艳 哈尔滨工业大学控制与仿真中心副教授. 主要研究方向为飞行器制导与控制, 制导控制系统性能评估.
E-mail: sywang@hit.edu.cn
(**WANG Song-Yan** Associate professor at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology. Her research interest covers guidance and control of air vehicles, performance assessment of guidance and control systems.)

晁 涛 哈尔滨工业大学控制与仿真中心讲师. 主要研究方向为滑模变结构控制, 飞行器制导、控制与仿真. 本文通信作者. E-mail: chaotao2000@163.com
(**CHAO Tao** Lecturer at the Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology. His research interest covers sliding mode variable structure control, guidance, control, and simulation of air vehicles. Corresponding author of this paper.)