

非最小相位系统的基函数型自适应迭代学习控制

张黎¹ 刘山¹

摘要 针对重复运行的未知非最小相位系统的轨迹跟踪问题, 结合时域稳定逆特点, 提出了一种新的基函数型自适应迭代学习控制 (Basis function based adaptive iterative learning control, BFAILC) 算法. 该算法在迭代控制过程中应用自适应迭代学习辨识算法估计基函数模型, 采用伪逆型学习律逼近系统的稳定逆, 保证了迭代学习控制的收敛性和鲁棒性. 以傅里叶基函数为例, 通过非最小相位系统上的控制仿真, 验证了算法的有效性.

关键词 非最小相位系统, 基函数型迭代学习控制, 稳定逆, 自适应辨识

引用格式 张黎, 刘山. 非最小相位系统的基函数型自适应迭代学习控制. 自动化学报, 2014, 40(12): 2716–2725

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.02716

Basis Function Based Adaptive Iterative Learning Control for Non-minimum Phase Systems

ZHANG Li¹ LIU Shan¹

Abstract Combined with stable inversion, a new basis function based adaptive iterative learning control (BFAILC) algorithm is proposed to track the desired output trajectory for repetitive non-minimum phase systems. In this method, an adaptive iterative identification algorithm is designed to estimate the system's basis function space model, and a pseudo inverse type learning law is used to approximate the stable inversion of the non-minimum phase system, which guarantees the convergence and robustness of the control system. Using an extended time-domain Fourier basis function as an example, the performance and effectiveness of the proposed algorithm are verified through numerical simulations for the non-minimum phase system.

Key words Non-minimum phase system, basis function based iterative learning control, stable inversion, adaptive identification

Citation Zhang Li, Liu Shan. Basis function based adaptive iterative learning control for non-minimum phase systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(12): 2716–2725

迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 适用于具有重复运行特点的系统. 与常规反馈控制一般应用误差信号实现对系统期望轨迹的渐近跟踪不同, 迭代学习控制通过重复对期望轨迹进行控制尝试, 根据先前的偏差信息修正控制输入, 实现有限时间区间上期望轨迹的完全跟踪^[1–2], 其本质上是对系统逆的一种逼近^[3]. 然而, 针对非最小相位系统, 由于其不存在稳定的因果逆, 若要求迭代学习控制的输出轨迹完全跟踪期望轨迹, 则迭代控制输入必然发散. 迭代学习控制对于非最小相位系统控制效果差的根本原因, 是非最小相位系统具有不稳定

的内动态^[1].

常规的因果逆无法保证非最小相位系统跟踪问题的控制输入有界, 为解决这一问题, Devasia 等^[4]和 Chen 等^[5]提出了非因果的稳定逆理论, 将系统的时间区间 $[0, +\infty]$ 放宽为 $[-\infty, +\infty]$, 使求解逆的零时刻初值问题放松为在 $\pm\infty$ 上状态为零的边值问题, 通过对不稳定内动态的反向积分保证了系统逆的有界. Sogo^[6]证明了线性非最小相位系统在频域双边 Laplace 变换意义下的逆与时域非因果稳定逆等价, 从而可以在频域上计算稳定逆. 这两类方法都将求解空间从 $L[0, +\infty]$ 扩展为 $L[-\infty, +\infty]$, 在计算中要求知道系统在当前时刻以后的状态, 本质上是以放弃因果性来保证计算稳定性, 这也使稳定逆控制难以应用于实际. 为提供可实际运行的稳定逆控制, Zou^[7]提出了基于预测的稳定逆控制, 将稳定逆的无穷积分区间用一段有限时间区间代替, 通过滚动优化的方法计算近似稳定逆, 但该方法对系统的模型要求很高, 缺乏鲁棒性. 迭代学习控制在运

收稿日期 2013-09-16 录用日期 2014-04-10
Manuscript received September 16, 2013; accepted April 10, 2014
国家自然科学基金 (61273133) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61273133)
本文责任编辑 王聪
Recommended by Associate Editor WANG Cong
1. 浙江大学控制科学与工程学系 杭州 310027
1. Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027

行过程中已知以往系统运行的信息, 能够提供系统非因果的预测信息, 因此稳定逆技术适合在迭代学习控制中应用. Kinoshita 等^[8] 提出了一种应用伴随系统的非因果迭代学习律, 最终的系统输入能够收敛到系统的稳定逆. 刘山等^[9] 提出了一种基于稳定逆的最优开闭环综合迭代学习控制, 通过将期望轨迹延拓和平移的方式给出了非因果的学习律应用于实际中的运行方式. Ghosh 等^[10] 基于线性标称模型设计了伪逆型学习律, 算法对于未建模动态和输入扰动具有一定的鲁棒性.

然而, 上述基于稳定逆的迭代学习控制都依赖于系统的精确模型, 限制了方法的应用. 为避免这个问题, 在迭代计算时采用基函数模型逼近真实模型是一个可行的思路. 基函数型迭代学习控制的思路是将输入输出信号投影到由一组正交基函数张成的有限维空间中, 然后在基函数空间构造迭代学习律. 基函数模型的复杂度与基函数的个数有关, 与原系统的阶数无关. 对于难以建模的高阶系统, 采用基函数模型可以避免传统的机理建模所需大量的先验知识或基于数据的控制方法所需大量的数据试验. 刘山等^[11] 针对存在扰动的未知非线性系统, 利用小波基函数将系统模型参数化, 采用迭代学习的方式逼近小波逼近的系数. Phan 等^[12] 和 Hamamoto 等^[13] 分别针对离散系统和连续系统, 在基函数空间设计了相应的迭代学习律. Van de Wijdeven 等^[14] 指出基函数型迭代学习控制是一种数据驱动的控制方法, 无需知道系统的模型, 具有较强的鲁棒性. 常规的基函数迭代学习控制方法的运行空间限定在 $L[0, T]$ 上, 针对非最小相位系统同样效果较差. 刘山等^[15] 提出了一种针对非最小相位系统的基函数迭代学习控制, 通过对频域 Laguerre 基函数进行扩展, 使得基函数张成的空间能够覆盖到稳定逆所在的空间, 较好地解决了非最小相位系统轨迹跟踪问题, 但该方法在选取基函数时需要知道系统的相对阶, 并且需要在迭代学习控制前进行以所有基函数为输入的辨识实验, 给实际运行带来了不便. 基函数模型的辨识是基函数型迭代学习控制的关键, 由于迭代学习控制的重复运行特征, 可以采用在迭代运行过程中自适应辨识基函数模型的方法.

传统比例、积分、微分 (Proportion, integration, differentiation, PID) 型迭代学习控制无需知道系统的模型信息, 但学习律的参数选取也是一个困难的问题^[3]. 基于优化的迭代学习控制能够系统化地设计迭代学习律, 但却过于依赖于系统的精确模型^[16]. 自适应迭代学习控制则能够兼顾上述两种方法的优点, 避免两者的缺陷^[1]. 自适应迭代学习控制一般仅需利用模型的不精确的先验知识, 构造参

数化的迭代学习律, 并针对迭代学习控制重复运行的特点, 利用运行过程中的相关数据, 对学习律的参数进行自适应优化, 逐渐达到基于优化的迭代学习控制的效果. Chi 等^[17] 针对一类参数时变不确定的非线性离散系统, 提出了一种自适应迭代学习控制. Islam 等^[18] 提出了一种基于观测器输出的自适应迭代学习控制架构. Imai 等^[19] 提出了一种根据被控对象的特性变化调整学习律增益的自适应迭代学习控制.

本文针对非最小相位系统, 采用自适应迭代学习控制的思想, 从时域稳定逆计算^[4] 出发, 将稳定逆的计算公式进行分解和重新组合, 得出了用时域基函数级数逼近系统稳定逆的一个充分条件, 提出了一种新型的基函数型自适应迭代学习控制 (Basis function based adaptive iterative learning control, BFAILC) 算法, 克服了常规迭代学习控制对于非最小相位系统跟踪效果差的缺陷. BFAILC 根据一次系统在线运行的输入输出数据进行系统基函数模型辨识, 并在迭代学习过程中对辨识参数进行自适应调整; 进一步以基函数模型辨识参数为基础, 采用伪逆型迭代学习控制律使控制输入逼近系统的稳定逆. BFAILC 算法在选择基函数时, 无需知道系统的相对阶信息, 避免了所有基函数作为输入的离线辨识实验^[13, 15]. 本文分析了 BFAILC 算法的鲁棒收敛性; 并以傅里叶基函数为例, 将 BFAILC 与优化 ILC 和扩展 Laguerre ILC 进行了仿真对比.

1 非最小相位系统的基函数型迭代学习控制

本文的研究对象是未知的单入单出非最小相位线性时不变系统, 其系统描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ 均为未知的模型参数, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的状态、输入和输出, 系统相对阶为 r . 选取一组时域正交基函数 $\boldsymbol{\varphi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^T$, $N \in \mathbf{N}^+$, 其张成的空间记为

$$\mathcal{A} := \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$$

第 i 个基函数 $\phi_i \in L[0, T]$, 且在 $L[0, T]$ 上满足正交关系 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \Delta_{ij}$, 其中 $\langle u, v \rangle = \int_0^T u(t)v(t)dt$ 表示 $L[0, T]$ 上的内积, Δ_{ij} 为 Kronecker 函数. 将系统 (1) 的输入输出信号 $u(t)$ 和 $y(t)$ 投影到基函数空间:

$$u(t) = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\beta}$$

其中, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T$. 若系统 (1) 的单位脉冲响应为 $g(t)$, 则系统的基函数空间输入输出模型为

$$\beta = H\alpha \quad (2)$$

模型矩阵 H 各元素为

$$h_{ij} = \langle \phi_i, g(t) * \phi_j \rangle, \quad i, j \leq N \quad (3)$$

符号 $*$ 表示卷积运算 $u * v = \int_0^t u(t-\tau)v(\tau) d\tau$.

给定系统的期望输出 $y_d(t)$, 其在基函数空间的投影表示为 $\beta_d \in \mathcal{A}$. 若第 k 次迭代运行的输出误差为 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, 其基函数空间投影为 $e_k(t) = \varphi^T \varepsilon_k$. 针对基函数空间模型 (2), 基函数型迭代学习控制的目标是设计迭代学习律:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \Gamma \varepsilon_k \quad (4)$$

使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\varepsilon_k\| \rightarrow 0$.

针对非最小相位系统, 稳定逆是使得输出轨迹完全跟踪期望轨迹的唯一能量有界输入^[20], 因此基函数型迭代学习控制要实现完全跟踪, 本质上是对稳定逆的逼近, 但稳定逆属于 $L[-\infty, +\infty]$, 而常规的基函数一般属于 $L[0, T]$, 无法逼近稳定逆. 本文在扩展时域的基函数空间上设计基函数型迭代学习控制, 使系统控制输入逼近稳定逆.

2 时域稳定逆和基函数空间

2.1 时域稳定逆

定义 1^[4]. 假设非最小相位线性时不变系统 (1) 的传递函数在虚轴上没有零点. 若给定期望轨迹满足 $y_d^{(i)} \in L_1 \cap L_\infty, i = 0, 1, \dots, r$, 则存在有界的 $\mathbf{x}_d(t)$ 和 $u_d(t)$, 满足:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= A\mathbf{x}_d + Bu_d \\ y_d &= C\mathbf{x}_d \end{aligned}$$

且当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, 有 $u_d(t) \rightarrow 0, \mathbf{x}_d(t) \rightarrow 0$. 此时, 称 $u_d(t)$ 和 $\mathbf{x}_d(t)$ 为系统针对 $y_d(t)$ 的稳定逆.

对于给定的期望轨迹 $y_d(t)$, 令:

$$\mathbf{Y}_d(t) = \left(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(r-1)}, y_d^{(r)} \right)^T$$

其中, r 为系统的相对阶, 文献 [4] 给出了时域稳定逆求解公式:

$$\begin{aligned} u_d &= M_Y \mathbf{Y}_d(t) - M_{\sigma_s} \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-\tau)} B_s \mathbf{Y}_d(\tau) d\tau + \\ &M_{\sigma_u} \int_t^{+\infty} e^{-A_u(\tau-t)} B_u \mathbf{Y}_d(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

其中, A_s 为稳定内动态对应的状态矩阵, 具有负特征值 λ_{si} , A_u 为不稳定内动态对应的状态矩阵, 具有正特征值 λ_{ui} , $M_Y, M_{\sigma_s}, M_{\sigma_u}, B_s, B_u$ 为适当维数的系统参数矩阵.

由于非最小相位系统存在不稳定内动态, 若以 $\mathbf{x}(0) = 0$ 作为初值条件, 不稳定的内动态必然会使控制输入发散. 稳定逆本质上是将初值条件以边界条件 $\mathbf{x}(\pm\infty) = 0$ 替换, 稳定的内动态在 $(-\infty, t)$ 上积分, 不稳定的内动态在 $(t, +\infty)$ 上反向积分, 而 $t = 0$ 时的初值是通过计算得到的. 通过这种方法得到的稳定逆 $u_d \in L[-\infty, +\infty]$, 保证了控制输入的有界. 从稳定逆的计算式 (5) 可以看到, 其求解过程完全依赖于系统的精确模型, 缺乏鲁棒性. 本文将稳定逆计算式 (5) 进行分解和重组, 无须知道相关系数矩阵的具体数值, 而是通过基函数逼近的方式表达稳定逆, 并采用迭代学习方法求解逼近的参数.

2.2 稳定逆的分解与重组

从式 (5) 可看出, 稳定逆由理想输出及 r 阶导数、稳定的内动态和不稳定的内动态三部分叠加组成, 分别记为 u_{y_d}, u_{σ_s} 和 u_{σ_u} , 即:

$$\begin{aligned} u_{y_d} &= M_Y \mathbf{Y}_d(t) \\ u_{\sigma_s} &= -M_{\sigma_s} \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-\tau)} B_s \mathbf{Y}_d(\tau) d\tau \\ u_{\sigma_u} &= M_{\sigma_u} \int_t^{+\infty} e^{-A_u(\tau-t)} B_u \mathbf{Y}_d(\tau) d\tau \end{aligned}$$

时域稳定逆的三个组成部分和频域双边 Laplace 变换意义下的稳定逆^[15] 是相对应的: u_{y_d} 对应频域系统逆的非正则部分, u_{σ_s} 对应频域系统逆的正则稳定部分, u_{σ_u} 对应频域系统逆的正则不稳定部分. 根据稳定逆式 (5) 可选择基函数迭代学习控制所需的基函数, 为使基函数空间能够覆盖稳定逆, 要求选择合适的基函数个数能够分别覆盖 u_{y_d}, u_{σ_s} 和 u_{σ_u} . 下面定理 1 给出了一种更有利于基函数选取的稳定逆计算公式.

定理 1. 对于非最小相位线性时不变系统 (1), 对稳定逆式 (5) 进行分解和重新组合, 重组后的稳定和不稳定的内动态不含参考轨迹的导数项, 形式如下:

$$\begin{aligned} u_d &= \sum_{i=0}^r k_{yi} y_d^{(i)}(t) + \\ &\sum_i k_{si} \int_{-\infty}^t M_{si}(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$\sum_i k_{ui} \int_t^{+\infty} M_{ui}(t-\tau) e^{\lambda_{ui}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau \quad (6)$$

其中, $M_{si}(t-\tau)$ 和 $M_{ui}(t-\tau)$ 为 $t-\tau$ 的多项式, k_{yi} 、 k_{si} 、 k_{ui} 为常系数.

证明. 先考虑稳定逆的稳定内动态部分 u_{σ_s} , 不失一般性, 假设 A_s 可化为等价的约当块形式. 注意到 u_{σ_s} 是标量, 则 $M_{\sigma_s} e^{A_s(t-\tau)} B_s Y_d(\tau)$ 可以表示成 $P_i(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d^{(j)}(\tau)$ 的线性组合, 即:

$$-M_{\sigma_s} e^{A_s(t-\tau)} B_s Y_d(\tau) = \sum_{i,j} b_i P_i(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d^{(j)}(\tau)$$

其中, b_i 为系数且 $b_i \neq 0$, λ_{si} 表示 A_s 的第 i 个特征值且 $\lambda_{si} < 0$, $P_i(t-\tau)$ 表示 $t-\tau$ 的多项式, 其最高次数与 λ_{si} 的几何重数有关, 则:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t b_i P_i(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d^{(j)}(\tau) d\tau &= \\ \frac{b_i}{\lambda_{si}} \int_{-\infty}^t P_i(t-\tau) y_d^{(j)} d e^{\lambda_{si}(t-\tau)} &= \\ \frac{b_i}{\lambda_{si}} P_i(t-\tau) y_d^{(j)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} \Big|_{-\infty}^t - & \\ \frac{b_i}{\lambda_{si}} \int_{-\infty}^t \dot{P}_i(t-\tau) y_d^{(j)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau - & \\ \frac{b_i}{\lambda_{si}} \int_{-\infty}^t P_i(t-\tau) y_d^{(j+1)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau = & \\ \frac{c_i}{\lambda_{si}} y_d^{(j)} - \frac{b_i}{\lambda_{si}} \int_{-\infty}^t \dot{P}_i(t-\tau) y_d^{(j)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau - & \\ \frac{b_i}{\lambda_{si}} \int_{-\infty}^t P_i(t-\tau) y_d^{(j+1)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau & \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t P_i(t-\tau) y_d^{(j+1)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau &= \\ \frac{c_i}{b_i} y_d^{(j)} - \int_{-\infty}^t \dot{P}_i(t-\tau) y_d^{(j)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau - & \\ \int_{-\infty}^t \lambda_{si} P_i(t-\tau) y_d^{(j)} e^{\lambda_{si}(t-\tau)} d\tau & \end{aligned}$$

上式表明 u_{σ_s} 中含有 $y_d^{(j+1)}$ 的积分项可以分解为单独的 $y_d^{(j)}$ 项和 $y_d^{(j)}$ 的积分项, 且分解后的 $\dot{P}_i(t-\tau) + \lambda_{si} P_i(t-\tau)$ 仍为 $t-\tau$ 的多项式. 因此, 可以不断地将 y_d 的高阶导数积分项用低阶导数积分项代替, 最终可以将 u_{σ_s} 分解为两部分:

$$u_{\sigma_s} = \tilde{u}_{\sigma_s} + u_{y\sigma_s}$$

其中,

$$\begin{aligned} u_{y\sigma_s} &= \sum_{i=0}^r d_i y_d^{(i)} \\ \tilde{u}_{\sigma_s} &= \sum_i k_{si} \int_{-\infty}^t M_{si}(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$M_{si}(t-\tau)$ 表示 $t-\tau$ 的多项式. 用同样的方法可以将不稳定内动态部分 u_{σ_u} 分解为

$$u_{\sigma_u} = \tilde{u}_{\sigma_u} + u_{y\sigma_u}$$

其中,

$$\begin{aligned} u_{y\sigma_u} &= \sum_{i=0}^r d_{ui} y_d^{(i)} \\ \tilde{u}_{\sigma_u} &= \sum_i k_{ui} \int_t^{+\infty} M_{ui}(t-\tau) e^{\lambda_{ui}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$M_{ui}(t-\tau)$ 为 $t-\tau$ 的多项式, 因此:

$$\begin{aligned} u_d &= \sum_{i=0}^r k_{yi} y_d^{(i)}(t) + \\ &\sum_i k_{si} \int_{-\infty}^t M_{si}(t-\tau) e^{\lambda_{si}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau + \\ &\sum_i k_{ui} \int_t^{+\infty} M_{ui}(t-\tau) e^{\lambda_{ui}(t-\tau)} y_d(\tau) d\tau = \\ &\tilde{u}_{y_d} + \tilde{u}_{\sigma_s} + \tilde{u}_{\sigma_u} \end{aligned}$$

其中, $\tilde{u}_{y_d}$ 为 y_d 及其前 r 阶导数的线性组合, 而 $\tilde{u}_{\sigma_s}$ 和 $\tilde{u}_{\sigma_u}$ 只与 y_d 有关. $\square$

注 1. 定理 1 给出了稳定逆的另一种表示形式, 表明在求解稳定逆时, 可将 u_{σ_s} 和 u_{σ_u} 中 y_d 的 i 阶导数项 ($i = 1, \dots, r$) 合并到 u_{y_d} 中, 重组成为新的 $\tilde{u}_{\sigma_s}$ 和 $\tilde{u}_{\sigma_u}$, 使 $\tilde{u}_{\sigma_s}$ 和 $\tilde{u}_{\sigma_u}$ 与 y_d 有关, 与 y_d 的前 r 阶导数项无关. 因此在保证覆盖稳定逆所在空间和逼近精度的前提下, 重组后的计算公式可以减少选取的基函数的个数. 本文提出的基函数型迭代学习控制以形式化的式 (6) 计算稳定逆, 但并不需要知道式中的参数具体值, 而是通过迭代学习的方式获得参数值.

2.3 稳定逆的基函数逼近

2.3.1 基函数逼近稳定逆的充分条件

由第 2.2 节的分析可知, 稳定逆与期望输出和内动态密切相关, 基函数的选取应尽可能地覆盖到稳定逆所在的空间. 然而由于系统未知, 系统的稳定逆及其范围也是无法直接确定的. 下面给出时域基函数表示能够逼近系统稳定逆的一个充分条件, 可

以利用已知的期望轨迹信息来保证选择的基函数空间能够覆盖稳定逆。

定理 2. 对于线性时不变系统, 如果期望轨迹在基函数组 ϕ_i 张成的空间 $\mathcal{A}$ 中, 即 $y_d \in \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A} = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$, $\phi_i \in L[-\infty, +\infty]$, 则稳定逆 $u_d \in \mathcal{A}$ 的一个充分条件为基函数空间 $\mathcal{A}$ 对如下 3 种线性算子封闭: 1) 微分算子, 记为 D ; 2) 与 $M_s(\tau)e^{\lambda_s \tau}$ ($\lambda_s < 0$) 在 $(-\infty, t)$ 上的因果卷积算子, 记为 C_c ; 3) 与 $M_u(\tau)e^{\lambda_u \tau}$ ($\lambda_u > 0$) 在 $(t, +\infty)$ 上的非因果卷积算子, 记为 C_{nc} . 其中, $M_u(\tau), M_s(\tau)$ 为 τ 的多项式。

证明. 因为 $y_d \in \mathcal{A}$, 则 y_d 可表示为 ϕ_i 的线性组合, 即 $y_d = \sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i$. 因为基函数空间对上述 3 种算子封闭, 所以 $Dy_d \in \mathcal{A}$, $C_c y_d \in \mathcal{A}$, $C_{nc} y_d \in \mathcal{A}$, 结合式 (6) 并根据线性算子的叠加性可知 $u_d \in \mathcal{A}$. $\square$

注 2. 定理 2 给出了一种通过期望轨迹信息寻找 $L[-\infty, +\infty]$ 上合适的基函数的方法. 选取时域基函数时, 可先寻找包含期望轨迹 y_d 的一个基函数空间, 再验证这个基函数空间是否对定理 2 中的 3 种线性算子封闭. 若满足定理 2 要求, 则保证系统针对期望轨迹的稳定逆在所选的基函数空间中, 这样的空间均可作为备选的逼近稳定逆的基函数空间。

注 3. 本文选用 $L[t_0, t_f]$ 上的正交三角函数集作为基函数构成傅里叶基空间. 由于三角函数经过微分运算和有限次分部积分运算不会改变频率, 可以验证该基函数空间满足定理 2. 同时, 由于傅里叶基函数的任何次导数仍然在其张成的空间中, 因此采用傅里叶基函数作为逼近稳定逆的基函数空间时, 无需知道系统的相对阶。

注 4. 由于式 (5) 和式 (6) 中指数衰减因子的存在, 稳定逆在趋于 $\pm\infty$ 时将迅速衰减到 0, 并且实际系统总是在有限的时间段内运行, 因此在基函数迭代学习的实际运行中, 可将运行区间 $L[0, T]$ 扩展为 $L[t_0, t_f]$, 其中 $t_0 < 0$, $t_f > T$, 而不必扩展到 $L[-\infty, +\infty]$.

2.3.2 基函数参数选取

基函数参数的选取包括基函数自身参数和基函数个数的选取, 基函数自身参数的选取方法由具体的基函数形式决定, 而基函数的个数的选取由跟踪误差限决定. 在实际应用中, 需选取有限个基函数用于逼近系统稳定逆, 用有限项的部分和代替无穷级数. 基函数个数的选取应是计算复杂度和跟踪精度的折中. 本文以傅里叶级数为例, 给出傅里叶级数个数选取的方案. 考虑 $L_1[t_0, t_f]$ 上的函数 f , 其有限项傅里叶级数部分和为

$$S_N = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_n t + b_n \sin n\omega_n t)$$

截断误差记为 $\varepsilon_N(t)$, 下述引理 1 给出了傅里叶系数的上界值。

引理 1^[21]. 如果 $f \in \mathbf{C}^p$, 那么

$$\left| \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right| \leq \frac{\|f^{(p)}\|_{L_1}}{|n|^p}$$

其中, $\|f^{(p)}\|_{L_1} = \int_{t_0}^{t_f} |f^{(p)}(t)| dt$.

定理 3. 对于轨迹跟踪问题, 若给定轨迹跟踪误差 $e(t)$ 的方均根 (Root mean square, RMS) 上界 ε , 即 $RMS(e(t)) < \varepsilon$, 则傅里叶基函数个数 $N+1$ 可根据下式得到:

$$N > \left(\frac{2\|f^{(p)}\|^2}{(2p-1)\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \quad (7)$$

证明. 由定理 2 可知, 系统的跟踪误差等价于傅里叶级数对期望轨迹的逼近误差. 截断误差的方均根为

$$RMS(\varepsilon_N(t)) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_N^2(t) dt} = \sqrt{2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right)^2}$$

由引理 1 可知:

$$\begin{aligned} RMS(\varepsilon_N(t)) &\leq \sqrt{2\|f^{(p)}\|_{L_1}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}} = \\ &\sqrt{2}\|f^{(p)}\|_{L_1} \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}} \leq \\ &\sqrt{2}\|f^{(p)}\|_{L_1} \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{x^{2p}} dx} = \\ &\sqrt{2}\|f^{(p)}\|_{L_1} \sqrt{\int_N^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx} \leq \\ &\sqrt{2}\|f^{(p)}\|_{L_1} \sqrt{\frac{1}{(2p-1)N^{2p-1}}} \end{aligned}$$

因此, 定理 3 成立. $\square$

注 5. 根据给出的跟踪误差上限, 由式 (7) 可计算出傅里叶基函数的个数 $N+1$, 选取 $N+1$ 个基函数使得 $RMS(\varepsilon_N(t)) < \varepsilon$, 就能保证跟踪误差满足 $RMS(e(t)) < \varepsilon$.

注 6. 定理 3 给出的是一种保守估计, 一般实际需要傅里叶基函数的个数更少.

3 自适应学习律

3.1 模型辨识

鉴于稳定逆的计算过于依赖于系统的模型, 文献 [10] 放弃了精确的系统逆的计算, 采用线性化系统的伪逆算子作为学习律, 通过迭代的方式去逼近系统的稳定逆. 该算法能保证跟踪误差在有界的干扰下收敛到 0 的一个邻域内. 伪逆型学习律如下:

$$\Gamma = (\rho I + H^* H)^{-1} H^* \quad (8)$$

其中, H 为系统线性化模型的算子, H^* 为 H 的相伴算子, ρ 为学习律参数. 伪逆型学习律采用系统的近似伪逆 Γ , 具有良好的收敛速度和鲁棒性, 但是需要对基函数模型进行辨识估计. 一般辨识估计方法是在迭代学习控制运行前, 分别进行以所有基函数为输入的辨识实验^[15], 若基函数个数多或系统对输入有限制要求, 都会使辨识实验难以进行. 本文的基函数模型辨识方法仅需采用迭代控制的第一次运行数据, 在迭代学习控制的同时完成模型辨识, 并可通过自适应辨识算法在迭代过程中在线辨识, 应用较方便.

选定基函数组 $\varphi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T$, 假设系统一次运行的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 投影到 φ 所张成的基函数空间的表达为 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ 和 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T$, 同时系统脉冲响应投影到 φ 所张成的基函数空间的表达为 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)^T$, 即:

$$g(t) = \varphi^T \gamma = \sum_{k=1}^N \gamma_k \phi_k$$

那么由式 (3), 系统的基函数模型 H 中各元素为

$$h_{ij} = \langle \phi_i, g(t) * \phi_j \rangle = \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_f} \phi_i(t) \phi_k(t - \tau) \phi_j(\tau) d\tau dt := \sum_{k=1}^N \gamma_k w_{ijk}$$

其中,

$$w_{ijk} = \int_{t_0}^{t_f} \phi_i(t) \int_{t_0}^t \phi_k(t - \tau) \phi_j(\tau) d\tau dt$$

由于 φ 为选定的基函数组, w_{ijk} 可直接计算, 因此:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} \gamma_k \alpha_j := \mathbf{u}_i^T \alpha$$

其中,

$$\mathbf{u}_i = \left(\sum_{k=1}^N w_{i1k} \gamma_k, \sum_{k=1}^N w_{i2k} \gamma_k, \dots, \sum_{k=1}^N w_{iNk} \gamma_k \right)^T := (\mathbf{u}_{i1}^T \gamma, \mathbf{u}_{i2}^T \gamma, \dots, \mathbf{u}_{iN}^T \gamma)^T$$

$$\mathbf{u}_{ij} = (w_{ij1}, w_{ij2}, \dots, w_{ijN})^T$$

则基函数模型 $H = (\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_N^T)$, 即 $\beta = H(\gamma) \alpha$. 若系统的脉冲响应未知, 则基函数模型 H 具有 N 个待辨识参数 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)^T$. 另外由 β_i 表达式中 γ_k 和 α_j 的对称性, β_i 还可以表示为

$$\beta_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} \gamma_k \alpha_j = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ijk} \alpha_j \gamma_k := \mathbf{v}_i^T \gamma$$

其中,

$$\mathbf{v}_i = \left(\sum_{j=1}^N w_{ij1} \alpha_j, \sum_{j=1}^N w_{ij2} \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^N w_{ijN} \alpha_j \right)^T := (\mathbf{v}_{i1}^T \alpha, \mathbf{v}_{i2}^T \alpha, \dots, \mathbf{v}_{iN}^T \alpha)^T$$

记 $V = (\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_N^T)$, 那么 $\beta = V(\alpha) \gamma$, 因此 $\beta = H(\gamma) \alpha = V(\alpha) \gamma$.

若系统一次运行的输入和输出已经得到, 则 α 和 β 已知, 采用最小二乘法, 本文的基函数模型辨识算法可表示为

$$\gamma = (V^T(\alpha) V(\alpha))^{-1} V^T(\alpha) \beta \quad (9)$$

基函数模型为

$$H = H(\gamma) \quad (10)$$

注 7. 上述辨识算法可根据第一次迭代运行的输入和输出数据进行, 避免了基函数模型的离线辨识实验. 并且在迭代过程中, 可以根据上一次的输入和输出信号自适应地更新模型信息.

3.2 自适应学习律

根据第 3.1 节的辨识算法, 第 k 次运行时可以根据第 $k-1$ 次运行时的数据辨识得到 γ_{k-1} , 由此得到第 k 次运行时的估计模型 H_k , 再用 H_k 设计伪逆型学习律, 选取适当的学习参数可保证学习律的收敛速度和鲁棒性.

基函数型自适应迭代学习控制的步骤如下:

步骤 1. 令迭代次数 $k = 1$, 选择适当的初始输入信号 $u_1(t)$, 测量输出信号 $y_1(t)$, 计算误差信号 $e_1(t) = y_d(t) - y_1(t)$, 并投影到基函数空间, 得到 $\alpha_1, \beta_1, \epsilon_1$. 令迭代次数 $k = k + 1$.

步骤 2. 第 k 次运行时, 由 α_{k-1} 、 β_{k-1} 根据下式计算得到 γ_{k-1} , 将 γ_{k-1} 通过式 (12) 的线性映射得到 H_k , 更新模型信息:

$$\gamma_{k-1} = (V^T (\alpha_{k-1}) V (\alpha_{k-1}))^{-1} \times V^T (\alpha_{k-1}) \beta_{k-1} \quad (11)$$

$$H_k = H(\gamma_{k-1}) \quad (12)$$

步骤 3. 根据 H_k , 由式 (13) 设计伪逆型学习律 Γ_k , 采用式 (4) 作为输入.

$$\Gamma_k = (\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T \quad (13)$$

步骤 4. 若迭代次数小于预设值 $k < K$ 或轨迹误差小于预设值 $\|e_k\| < \varepsilon$, 则 $k = k + 1$, 返回步骤 2; 否则, 结束.

4 学习律鲁棒收敛性

假设辨识模型存在一定的误差 $\Delta H_k = H_k - \hat{H}$, 本文设计的学习律为 $\Gamma_k = (\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T$, 误差传递方程为

$$\varepsilon_{k+1} = (I - \hat{H} \Gamma_k) \varepsilon_k \quad (14)$$

则其收敛的充分条件为

$$\|I - \hat{H} \Gamma_k\| < 1 \quad (15)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示某一种导出矩阵范数. 文献 [10] 从线性算子的角度, 分析了伪逆型学习律的收敛性, 从式 (14) 也可以看出, 只要 $I - \hat{H} \Gamma_k$ 的范数小于 1, 误差就能收敛, 因此这种学习律允许一定的模型失配. 定理 4 给出了模型失配时的收敛条件.

引理 2. 若矩阵 $A \in \mathbf{C}^{N \times N}$, $C \in \mathbf{C}^{M \times M}$ 均为非奇异矩阵, 矩阵 $B \in \mathbf{C}^{N \times M}$, $D \in \mathbf{C}^{M \times N}$ 则矩阵 $A + BCD$ 具有逆矩阵, 且 $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$.

引理 3. 设 $\mathcal{A}$ 为基函数空间, $\mathcal{A}$ 中存在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ 和范数 $\|\cdot\|_\mu^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$, 范数 $\|\cdot\|_\mu$ 的导出矩阵范数记为 $\|\cdot\|_\nu$, 若 $\ker(H) = 0$, 则 $\forall \rho > 0$, 有 $\|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\|_\nu < 1$.

证明. 假设 $\|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\|_\nu \geq 1$, 则由导出矩阵范数的定义

$$\|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\|_\nu = \max_{\|\alpha\|_\mu=1} \|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\alpha\|_\mu$$

可知, 存在 $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, 且 $\|\alpha_0\|_\mu = 1$, 使得

$$\|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\alpha_0\|_\mu \geq 1$$

能够成立, 记 $\beta = (I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\alpha_0$, 则上式为 $\|\beta\|_\mu \geq 1$. 另外, $\alpha_0 = (I + \rho^{-1}HH^T)\beta$, 则:

$$\begin{aligned} \|\alpha_0\|_\mu^2 &= \|(I + \rho^{-1}HH^T)\beta\|_\mu^2 = \\ &\langle (I + \rho^{-1}HH^T)\beta, (I + \rho^{-1}HH^T)\beta \rangle_\mu = \\ &\|\beta\|_\mu^2 + \frac{1}{\rho^2} \|HH^T\beta\|_\mu^2 + \frac{2}{\rho} \langle \beta, HH^T\beta \rangle_\mu = \\ &\|\beta\|_\mu^2 + \frac{1}{\rho^2} \|HH^T\beta\|_\mu^2 + \frac{2}{\rho} \|H^T\beta\|_\mu^2 \end{aligned}$$

因此

$$\|\beta\|_\mu^2 + \frac{1}{\rho^2} \|HH^T\beta\|_\mu^2 + \frac{2}{\rho} \|H^T\beta\|_\mu^2 = 1$$

由 $\|\beta\|_\mu \geq 1$ 可知, 当且仅当 $\|\beta\|_\mu = 1$ 且 $H^T\beta = 0$ 时, 上式能够成立, 这与假设 $\ker(H) = 0$ 相矛盾, 因此 $\|(I + \rho^{-1}HH^T)^{-1}\|_\nu < 1$. $\square$

定理 4. 对于辨识得到的基函数模型 H_k , 若满足 $\ker(H_k) = 0$, 据此模型设计伪逆型学习律 Γ_k , 那么学习律鲁棒收敛的充分条件为模型误差 ΔH_k 满足下述不等式:

$$\|\Delta H_k\| (\|\Delta H_k^T\| + \|\hat{H}\|) < \rho(1 - \varepsilon) \quad (16)$$

其中, $\varepsilon = \|I - H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T\| < 1$.

证明. 将学习律 Γ_k 代入式 (15) 可得 $\varepsilon_{k+1} = (I - \hat{H}(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T) \varepsilon_k$, 那么学习律鲁棒收敛的充分条件为

$$\|I - \hat{H}(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T\| < 1 \quad (17)$$

由于 $\Delta H_k = H_k - \hat{H}$, 因此:

$$\begin{aligned} &\|I - H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T + \\ &\Delta H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} (\Delta H_k^T + \hat{H}^T)\| < 1 \end{aligned}$$

上式成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} &\|I - H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T\| + \\ &\|\Delta H_k\| \|(\rho I + H_k^T H_k)^{-1}\| \times \\ &(\|\Delta H_k^T\| + \|\hat{H}^T\|) < 1 \quad (18) \end{aligned}$$

由引理 3 可知, $\|(\rho I + H_k^T H_k)^{-1}\| < 1/\rho$, 因此式 (18) 成立的一个充分条件为

$$\begin{aligned} &\|I - H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T\| + \\ &\frac{1}{\rho} \|\Delta H_k\| (\|\Delta H_k^T\| + \|\hat{H}^T\|) < 1 \quad (19) \end{aligned}$$

又由引理 2 和引理 3 可知:

$$\begin{aligned} \left\| I - H_k(\rho I + H_k^T H_k)^{-1} H_k^T \right\| = \\ \left\| (I + \rho^{-1} H_k H_k^T)^{-1} \right\| := \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

所以式 (16) 是式 (19) 成立的一个充分条件. 反之, 如果模型误差 ΔH_k 满足式 (16), 则式 (17) 成立, 即学习律收敛. $\square$

注 8. 学习律参数 ρ 和误差收敛速度 ε 密切相关. 由式 (16) 可知, 选取适当的 ρ 可允许模型辨识误差最大, 鲁棒性最强.

注 9. 定理 4 是学习律鲁棒收敛的一个充分条件.

5 仿真实例

仿真中, 考虑未知的非最小相位系统, 其模型未知, 传递函数为^[15]

$$G(s) = \frac{(s+3)(s-2)}{(s+0.2948)(s^2+9.75s+27.14)}$$

给定 $t \in [0, 6]$ 上的期望轨迹为

$$y_d(t) = 0.1t^2(6-t)\sin(0.5\pi t)$$

而稳定逆 $u_d(t) \in L[-\infty, +\infty]$, 因此把 $y_d(t)$ 扩展为

$$y_r = \begin{cases} y_d, & t \in [0, 6] \\ 0, & t \in [-2, 0) \cup (6, 8] \end{cases}$$

针对上述系统及给定的期望轨迹, 分别采用优化 ILC 算法^[16]、扩展 Laguerre ILC 算法^[15]和本文给出的傅里叶 BFAILC 算法进行仿真实验. 优化 ILC 需要知道系统的精确模型, 迭代 25 次后的输出轨迹如图 1 所示. 扩展 Laguerre ILC 需要知道系统的相对阶, 且要在前期进行以基函数为输入的离线辨识实验, 选取基函数参数 $p = 1$, 采用 24 个基函数, 迭代 25 次后的输出轨迹如图 2 所示. 傅里叶 BFAILC 在迭代过程中在线辨识系统模型, 采用 31 个基函数, 迭代 25 次后的输出轨迹如图 3 所示. 图 4 是这三种算法的跟踪误差, 其中误差范数为无穷范数.

从图 1~3 可以看出, 优化 ILC 在轨迹跟踪的初始和终止时间内存在余差, 而扩展 Laguerre ILC 和傅里叶 BFAILC 都实现了给定区间上的精确跟踪. 从图 4 可以看出, 优化 ILC 在迭代 12 次后误差几乎停止减小, 最终收敛到一个非 0 常值 0.22, 扩展 Laguerre ILC 和傅里叶 BFAILC 分别在迭代 18 次和 15 次后基本消除了余差, 跟踪误差最终收敛到

0.021 和 0.016. 与优化 ILC 算法^[16]相比, 本文算法无需知道模型的信息, 能够精确跟踪期望轨迹, 克服了优化 ILC 需要精确模型的弱点, 并且避免了对于非最小相位系统存在较大的跟踪误差的缺陷. 与特别针对非最小相位的扩展 Laguerre ILC 算法^[15]相比, 本文算法不需要知道系统相对阶, 也不需要在线自适应辨识基函数模型, 取得了与扩展 Laguerre ILC 算法相当的轨迹跟踪效果.

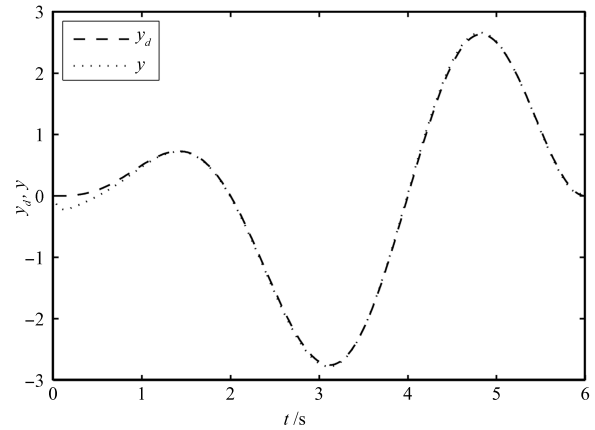


图 1 优化 ILC 的轨迹输出

Fig. 1 Trajectory output by norm-optimal ILC

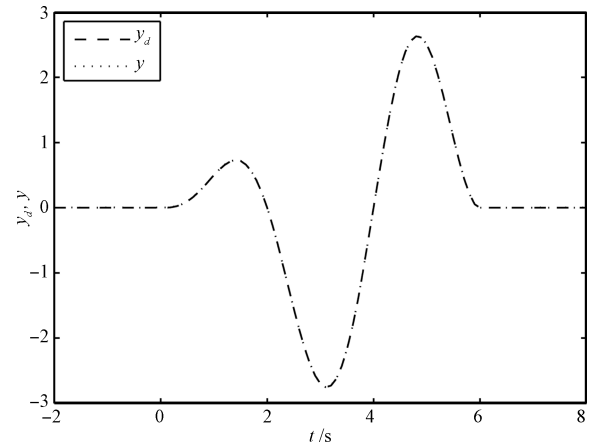


图 2 扩展 Laguerre ILC 的轨迹输出

Fig. 2 Trajectory output by extended Laguerre ILC

6 结论

本文针对非最小相位系统的轨迹跟踪问题, 从稳定逆的时域计算公式出发, 用形式化的推导方式, 得出了时域基函数逼近能够精确逼近系统稳定逆的一个充分条件; 在此基础上, 给出了基函数选择的方法, 该方法无需知道系统的相对阶等信息; 接着, 根据基函数模型的特点, 给出了一种估计基函数空间模型的迭代学习辨识算法, 该辨识算法只需系统一

次运行的输入输出数据,可在迭代学习控制过程中进行,避免了前期的离线辨识实验;最后,以在线自适应辨识为基础,设计了具有一定鲁棒性的伪逆型迭代学习控制律,并分析了算法的收敛性和鲁棒性.本文算法无需知道模型的任何信息,也无需在前期进行辨识实验,是一种基于数据驱动的控制算法.

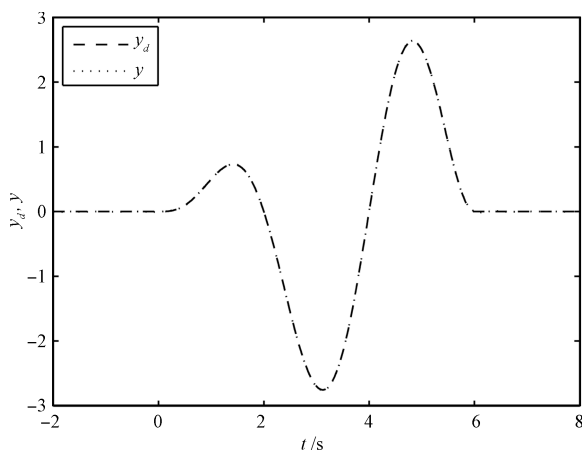


图3 傅里叶 BFAILC 的轨迹输出

Fig. 3 Trajectory output by Fourier BFAILC

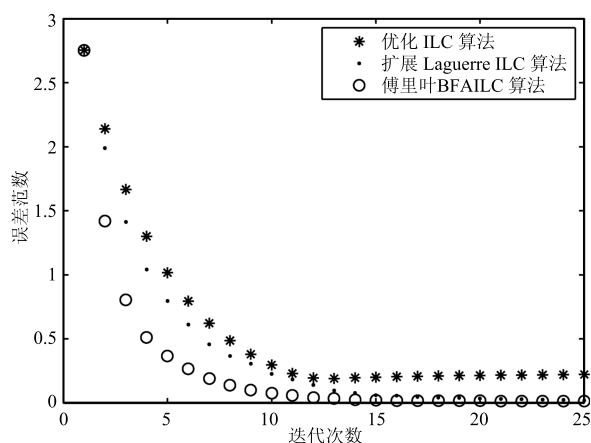


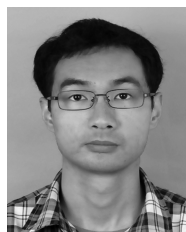
图4 三种算法的迭代误差

Fig. 4 Error norm of the three algorithms

References

- 1 Ahn H S, Chen Y, Moore K L. Iterative learning control: brief survey and categorization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2007, **37**(6): 1099–1121
- 2 Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng. On learning control: the state of the art and perspective. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **31**(6): 943–955
(许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望. *自动化学报*, 2006, **31**(6): 943–955)
- 3 Moore K L. *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*. London: Springer-Verlag, 1993.
- 4 Devasia S, Chen D G, Paden B. Nonlinear inversion-based output tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(7): 930–942
- 5 Chen D G, Paden B. Stable inversion of nonlinear non-minimum phase systems. *International Journal of Control*, 1996, **64**(1): 81–97
- 6 Sogo T. On the equivalence between stable inversion for non-minimum phase systems and reciprocal transfer functions defined by the two-sided Laplace transform. *Automatica*, 2010, **46**(1): 122–126
- 7 Zou Q Z. Optimal preview-based stable-inversion for output tracking of nonminimum-phase linear systems. *Automatica*, 2009, **45**(1): 230–237
- 8 Kinoshita K, Sogo T, Adachi N. Iterative learning control using adjoint systems and stable inversion. *Asian Journal of Control*, 2002, **4**(1): 60–67
- 9 Liu Shan, Wu Tie-Jun. Stable inversion based iterative learning control for non-minimum phase systems. *Control Theory & Applications*, 2003, **20**(6): 831–837
(刘山, 吴铁军. 基于稳定逆的非最小相位系统的迭代学习控制. *控制理论与应用*, 2003, **20**(6): 831–837)
- 10 Ghosh J, Paden B. A pseudoinverse-based iterative learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 831–837
- 11 Liu Shan, Wu Tie-Jun. Robust iterative learning control using wavelet approximation for nonlinear plants. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(2): 270–276
(刘山, 吴铁军. 基于小波逼近的非线性系统鲁棒迭代学习控制. *自动化学报*, 2004, **30**(2): 270–276)
- 12 Phan M, Frueh J A. Learning control for trajectory tracking using basis functions. In: *Proceedings of the 35th Decision and Control*. Kobe, Japan: IEEE, 1996. 2490–2492
- 13 Hamamoto K, Sugie T. An iterative learning control algorithm within prescribed input-output subspace. *Automatica*, 2001, **37**(11): 1803–1809
- 14 Van de Wijdeven J, Bosgra O H. Using basis functions in iterative learning control: analysis and design theory. *International Journal of Control*, 2010, **83**(4): 661–675

- 15 Liu Shan, Liu Jie. Extended Laguerre basis function based iterative learning control for non-minimum phase systems. *Control Theory & Applications*, 2012, **29**(8): 985–992
(刘山, 刘杰. 非最小相位系统的扩展 Laguerre 基函数迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, **29**(8): 985–992)
- 16 Ratcliffe J D, Lewin P L, Rogers E, Hatonen J J, Owens D H. Norm-optimal iterative learning control applied to gantry robots for automation applications. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, **22**(6): 1303–1307
- 17 Chi R H, Sui S L, Hou Z S. A new discrete-time adaptive ILC for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(7): 805–808
(池荣虎, 隋树林, 侯忠生. 非线性时变参数不确定系统的自适应迭代学习控制. 自动化学报, 2008, **34**(7): 805–808)
- 18 Islam S, Liu P X. Adaptive iterative learning control for robot manipulators without using velocity signals. In: *Proceedings of the 2010 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. Montreal, Canada: IEEE, 2010. 1293–1298
- 19 Imai A, Kushida D, Takemori F, Kitamura A. Proposal of adaptive type iterative learning control for system with characteristic change. *IEEJ Transactions on Electronics, Information, and Systems*, 2011, **131**(7): 1303–1308
- 20 Zhao H. Stable Inversion Based Output Tracking Control of Robotic Systems [Ph. D. dissertation], Iowa State University, USA, 1997.
- 21 Stromberg K R. *Introduction to Classical Real Analysis*. Wadsworth International Group, 1981.



张 黎 浙江大学控制科学与工程学系硕士研究生. 主要研究方向为迭代学习控制, 柔性机械臂控制.

E-mail: zhangli@iipc.zju.edu.cn

(ZHANG Li Master student in the Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University. His research interest covers iterative learning control and control of flexible robot manipulator.)



刘 山 浙江大学控制科学与工程学系副教授. 2002 年获浙江大学控制科学与工程学系博士学位. 主要研究方向为智能控制, 学习控制, 机器人技术. 本文通信作者. E-mail: sliu@iipc.zju.edu.cn

(LIU Shan Associate professor in the Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University. He received his Ph.D. degree from Zhejiang University in 2002. His research interest covers intelligent control, learning control, and robotics. Corresponding author of this paper.)