广义时变脉冲系统的输入输出时域稳定

苏晓明 [1]　　阿迪亚 [1]

摘　要　研究了广义时变脉冲系统的输入输出时域稳定问题. 基于矩阵微分不等式 (Differential matrix inequalities, DMI), 给出了两个上述系统输入输出时域稳定的充分条件分别对应 L_2 干扰输入和 L_∞ 干扰输入. 这样的条件要求矩阵微分不等式解的存在性. 接下来根据给出的充分条件设计了控制器, 使得闭环系统输入输出时域稳定. 本文的结果对于一般情况下的广义时变系统同样适用. 最后, 给出了两个算例来验证结果的有效性.

关键词　广义时变系统, 矩阵微分不等式, 输入输出时域稳定, 状态反馈

引用格式　苏晓明, 阿迪亚. 广义时变脉冲系统的输入输出时域稳定. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2512−2520

DOI　10.3724/SP.J.1004.2014.02512

Input-output Finite-time Stability of Linear Time-varying Descriptor Impulse Systems

SU Xiao-Ming[1]　　Adiya[1]

Abstract　This paper deals with the input-output finite-time stability problem for continuous-time linear time-varying descriptor impulse systems. The output and input refer to the controlled output and the disturbance input, respectively. Two classes of disturbance inputs are considered, which belong to L_2 and L_∞. New results for the above-mentioned class of systems are presented in the form of sufficient conditions given in terms of differential matrix inequalities. Based on the two conditions, state feedback controllers are designed such that the resultant closed-loop systems are input-output finite-time stable. The result also apply to time-varying descriptor systems. Finally, two examples are presented to show the validity of the new results.

Key words　Time-varying descriptor systems, differential matrix inequalities (DMI), input-output finite-time stable, state feedback

Citation　Su Xiao-Ming, Adiya. Input-output finite-time stability of linear time-varying descriptor impulse systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2512−2520

在现实中, 一个稳定的系统会因为不理想的暂态性能而变得毫无利用价值. 因此, 需要在一段小的区间或是集合里考虑这类系统的稳定性, 特别是在一段有限的时间区域内. Amato 等[1] 很好地解释了输入输出时域稳定性的概念. 一个系统是输入输出时域稳定, 就是对于给定的一类在一个特定时间区域 Ω 内范数有界的输入信号, 系统的输出不会超出给定的范围. Amato 等研究了线性时变系统的输入输出时域稳定性问题[1−5]. 时域稳定性也是研究系统在给定时间域内的性能, 它与输入输出时域稳定性的概念是有区别的, 输入输出时域稳定考虑零初态系统的输入输出, 而时域稳定性是考虑零输入系统的状态. 时域稳定性最早是由 Kamenkov 在文献 [6] 中提出的, 随后这个概念被传入了西方[7−8]. 至今已经产生了很多可观的成果, Amato 等研究了线性时变系统和带有跳变的线性时变系统的时域稳定性问题[9−10]. 文献 [11−13] 给出了时域稳定性及时域控制器的设计的充分条件. 文献 [14] 研究了线性系统时域稳定的脉冲控制.

另一方面, 自 Rosenbrock 于 1974 年首次提出广义系统的概念以来, 广义系统理论研究得到了迅速发展, 许多有关正常系统的结论被推广到了广义系统中. 文献 [15−16] 研究了广义时变系统的能控性和能观性, 文献 [17] 研究了广义时变系统的脉冲能控性和脉冲能观性. 文献 [18−20] 讨论了广义时变系统的时域稳定性问题, 文献 [21] 研究了广义周期时变系统的鲁棒稳定性. 文献 [22] 研究了非线性广义时变系统的干扰解耦问题. 文献 [23−24] 讨论了广义时变脉冲系统的时域稳定性问题. 对于广义时变系统的时域稳定性问题和时域控制器设计的研究尚少, 对于输入输出时域稳定性及其控制器设计

收稿日期 2013-12-18　　录用日期 2014-06-03
Manuscript received December 18, 2013; accepted June 3, 2014
国家自然科学基金 (61074005), 辽宁省优秀人才基金 (LR2012005)
Supported by National Nature Science Foundation of China (61074005), the Talent Project of the High Education of Liaoning province (LR2012005)
本文责任编委 耿志勇
Recommended by Associate Editor GENG Zhi-Yong
1. 沈阳工业大学理学院 沈阳 110870
1. School of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870

的研究目前尚无.

本文主要研究了一类广义时变脉冲系统的输入输出时域稳定问题, 给出了在两类干扰输入下系统输入输出时域稳定的充分条件, 并设计了状态反馈控制器. 定理的条件和控制器的求解都是以矩阵微分不等式 (Differential matrix inequalities, DMI) 的形式给出的, 这两类不等式可以通过本文中给出的算法应用 Matlab LMI 工具箱编程进行求解. 本文的结果对于一般情况下的广义时变系统是同样适用的.

1　问题描述

R^n 表示 n-维欧几里得空间, $\Omega=[t_0,t_0+T]$ 表示时间域. $L_p(\Omega)$ 表示如下的向量空间:

$$\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in L_p(\Omega)\Longleftrightarrow\left(\int_{\Omega}|\boldsymbol{s}(\tau)|^p\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

对于在 Ω 上正定有界的函数矩阵 $R(\cdot)$, 向量 $\boldsymbol{s}(\cdot)\in L_p(\Omega)$ 的范数 $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|_{p,R}$ 定义为

$$\left(\int_{\Omega}[\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{s}(\tau)]^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p=\infty$ 时,

$$\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|_{\infty,R}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}[\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}R(t)\boldsymbol{s}(t)]^{\frac{1}{2}}$$

当权矩阵 $R(\cdot)$ 是时不变的的情况下等价于单位阵 I. 我们将记号简化为 $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|_{\infty}$ 和 $\|\boldsymbol{s}(\cdot)\|_p$.

给定广义时变脉冲系统:

$$\begin{cases}E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+G(t)\boldsymbol{\omega}(t), & t\neq\tau_k\\ \Delta\boldsymbol{x}(\tau_k)=A_k\boldsymbol{x}(\tau_k^-), & t=\tau_k\\ \boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\qquad(1)$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量; $\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是连续的干扰输入; $\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^q$ 是系统输出. 系统初始状态为 $E\boldsymbol{x}(t_0)=0$. $A(t)\in\mathbf{R}^{n\times n},G(t)\in\mathbf{R}^{n\times m},C(t)\in\mathbf{R}^{l\times m}$ 是连续的函数矩阵. $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是奇异矩阵; $A_k\in\mathbf{R}^{n\times n},k=1,2,\cdots,N$ 是时不变矩阵.

系统 (1) 的状态在指定的时刻 $\{\tau_k\}$ 处会从 $\boldsymbol{x}(\tau_k)$ 跳变到 $\boldsymbol{x}(\tau_k^+)$ 其中, $\Delta\boldsymbol{x}(\tau_k)=\boldsymbol{x}(\tau_k^+)-\boldsymbol{x}(\tau_k^-)$ $(t_0<\tau_1<\cdots<\tau_m\leq T<\tau_{m+1}<\cdots)$, 我们假设系统的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 τ_k 是左连续的,

$$\boldsymbol{x}(\tau_k)=\boldsymbol{x}(\tau_k^-)=\lim_{h\to0^+}\boldsymbol{x}(\tau_k-h)$$

且

$$\boldsymbol{x}(\tau_k^+)=\lim_{h\to0^+}\boldsymbol{x}(\tau_k+h)$$

定义 1. 如果存在常数 s 对于任意 $t\in\Omega$ 使得 $\det(sE-A(t))\neq0$, 则广义时变系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+G(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ 是一致正则的.

系统 (1) 一致正则与 Campbell 意义下的解析可解是等价的, 广义时变系统的一致正则性和 $A(t),B(t),G(t)$ 的连续性保证了其解的存在唯一性, 下面的讨论假定系统是一致正则的. 我们将系统作如下分解:

$$MEN=\begin{bmatrix}\mathrm{I}&0\\0&0\end{bmatrix},MA(t)N=\begin{bmatrix}A_{11}(t)&A_{12}(t)\\A_{21}(t)&A_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$MG(t)=\begin{bmatrix}G_1(t)\\G_2(t)\end{bmatrix},N^{-1}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)&\boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}$$

其中 M,N 均为可逆矩阵, 则系统 (1) 等价于如下系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)&=A_{11}(t)\boldsymbol{x}_1(t)+A_{22}(t)\boldsymbol{x}_2(t)+G_1(t)\boldsymbol{w}_1(t)\\0&=A_{21}(t)\boldsymbol{x}_1(t)+A_{22}(t)\boldsymbol{x}_2(t)+G_2(t)\boldsymbol{w}_2(t)\end{aligned}$$

显然, 系统 (1) 对于任意初始条件无脉冲的充要条件是 $A_{22}(t)$ 可逆.

定义 2 (输入输出时域稳定). 如果系统 (1) 对于给定的时间域 $\Omega=[t_0,t_0+T]$ 和定义在 Ω 上的一类输入 W 和一个 Ω 上的正定函数矩阵 $Q(\cdot)$ 满足:

$$\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in W\Rightarrow\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)<1,\quad t\in[t_0,t_0+T]$$

则称系统 (1) 对于 $(W,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. 本文将考虑属于 L_2 和 L_∞ 的干扰输入:

1) $W_2(\Omega,R(t)):=\{\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in L_2(\Omega):\|\boldsymbol{\omega}\|_{2,R(t)}\leq1\}$;

2) $W_\infty(\Omega,R(t)):=\{\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in L_\infty(\Omega):\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{\omega}(t)\leq1\}$;

其中 $R(t)$ 是 Ω 上的正定矩阵.

2　输入输出时域稳定性分析

本节对于两类干扰输入 W_2 和 W_∞ 分别给出了系统 (1) 输入输出时域稳定的充分条件.

定理 1. 对于系统 (1) 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 在 Ω 上满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\geq0\qquad(2)$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t)&P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\G^{\mathrm{T}}(t)P(t)&-R(t)\end{bmatrix}<0\qquad(3)$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)>0\qquad(4)$$

$$E^{\mathrm{T}}P(\tau_k)-(I+A_k)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(\tau_k^+)(I+A_k)>0 \quad (5)$$

则称系统 (1) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. 其中 $\Omega=[t_0,t_0+T]$,

$$\Pi(t)=A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P^{\mathrm{T}}(t)A(t)+E^{\mathrm{T}}\dot{P}(t)$$

证明. 由式 (2) 和

$$M^{-\mathrm{T}}P(t)N=\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t)\\ P_3(t) & P_4(t)\end{bmatrix}$$

有 $P_2(t)=0$ 和 $P_1(t)$ 对称, 由式 (3) 可得 $\Pi(t)<0$,

$$\begin{aligned}\Pi(t)=\ &N^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(t)M^{\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}P(t)N+\\ &N^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}(t)M^{-1}MA(t)N+\\ &N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}M^{-\mathrm{T}}\dot{P}(t)N=\\ &\begin{bmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}(t) & A_{21}^{\mathrm{T}}(t)\\ A_{12}^{\mathrm{T}}(t) & A_{22}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1(t) & P_2(t)\\ P_3(t) & P_4(t)\end{bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}P_1^{\mathrm{T}}(t) & P_3^{\mathrm{T}}(t)\\ P_2^{\mathrm{T}}(t) & P_4^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t)\\ \dot{P}_3(t) & \dot{P}_4(t)\end{bmatrix}=\\ &\begin{bmatrix}* & *\\ * & A_{22}^{\mathrm{T}}(t)P_4(t)+P_4^{\mathrm{T}}(t)A_{22}(t)\end{bmatrix}<0\end{aligned}$$

由上式显然有 $A_{22}^{\mathrm{T}}(t)P_4(t)+P_4^{\mathrm{T}}(t)A_{22}(t)<0$. 因此, $A_{22}(t)$ 可逆, 系统对任意初始状态无脉冲.

构造广义 Lyapunov 函数 $V(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P(t)\boldsymbol{x}(t)$, 对其在 $t\in(t_0,\tau_1)$ 求导有:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))=\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\\ &E^{\mathrm{T}}\dot{P}(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}(t)P(t)\boldsymbol{x}(t)+\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\boldsymbol{\omega}(t)=\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Pi(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}(t)P(t)\boldsymbol{x}(t)+\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\boldsymbol{\omega}(t)\end{aligned}$$

构造如下向量:

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix}$$

由式 (3) 得:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)=\\ &\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Pi(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}(t)P(t)\boldsymbol{x}(t)+\\ &\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\boldsymbol{\omega}(t)-\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{\omega}(t)=\\ &\quad\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{\omega}(t)<0\end{aligned}$$

显然

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))<\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{\omega}(t) \tag{6}$$

从 t_0 到 t 对式 (6) 积分 $t\in(t_0,\tau_1)$, 由初始状态 $E\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 有:

$$\begin{aligned}&V(t,\boldsymbol{x}(t))<\\ &\quad\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau+V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))<\\ &\quad\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\in(t_0,\tau_1)\end{aligned} \tag{7}$$

当 $t=\tau_1$ 时, $\boldsymbol{x}(\tau_1^-)=\boldsymbol{x}(\tau_1)$ 和 $\tau_1^-\in(t_0,\tau_1)$, 因此由式 (7) 得:

$$\begin{aligned}&V(\tau_1,\boldsymbol{x}(\tau_1))=\\ &\quad V(\tau_1^-,\boldsymbol{x}(\tau_1^-))<\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

现在我们考虑 $t\in(\tau_1,\tau_2)$ 的情形, 对式 (6) 从 τ_1^+ 到 t 积分, 显然

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<\int_{\tau_1}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau+V(\tau_1^+,\boldsymbol{x}(\tau_1^+))$$

根据条件 (5),

$$\begin{aligned}V(\tau_1^+,\boldsymbol{x}(\tau_1^+))=\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_1^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau_1^+)\boldsymbol{x}(\tau_1^+)=\\ &[(I+A_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)]^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(\tau_1^+)\times\\ &[(I+A_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)]<\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_1)E^{\mathrm{T}}P(\tau_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)\leq\\ &\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

因此, 当 $t\in(\tau_1,\tau_2]$ 有:

$$\begin{aligned}V(t,\boldsymbol{x}(t))<\ &\int_{\tau_1}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau+\\ &\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau=\\ &\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

反复进行以上的操作, 由 $\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in W_2(\Omega,R(t))$, 对于任意 $t\in(t_0,t_0+T]$ 都有:

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau<\|\boldsymbol{\omega}\|_{2,R(t)}^2<1$$

由条件 (4), 显然对于任意 $t\in\Omega$ 有:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)\boldsymbol{x}(t)<\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P(t)\boldsymbol{x}(t)\le 1$$

因此系统 (1) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. □

为了更好地解释定理 1, 考虑如下的系统:

$$\begin{cases}E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+G(t)\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{8}$$

推论 1. 对于系统 (8), 如果存在一个 Ω_1 上的分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 对所有 $t\in\Omega_1$ $(\Omega=[t_0,t_0+T],\ \Omega_1=(\tau,t_0+T]\in\Omega)$ 满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\ge 0\tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0\tag{10}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)>0\tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau^+)\boldsymbol{x}(t_1^+)\le\int_{\Omega\backslash\Omega_1}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{w}(t)\tag{12}$$

则 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\le 1$, $t\in\Omega_1$, 其中 $\Pi(t)$ 与定理 1 相同.

证明. 根据定理 1 的证明我们有当 $t\in(\tau,t_0+T)$ 时,

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<\int_{\Omega_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)+V(\tau^+,\boldsymbol{x}(\tau^+))$$

显然

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<\int_{\Omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\le 1,\quad t\in(\tau,t_0+T)$$

由条件 (11) 得 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\le 1$. □

注 1. 令 $\Omega_0=[t_0,\tau_1),\cdots,\Omega_k=[\tau_k,T)$. 如果在 τ_k 时刻, 系统的状态的跳变满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_k^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau_k^+)\boldsymbol{x}(\tau_k^+)\le\int_{\sum_{i=0}^{k}\Omega_i}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)$, 再满足条件 (2) ~ (4), 由引理 (1) 可得系统 (1) 对于 $(W_2(\Omega,R(t)),Q(\cdot),\Omega)$ 是输入输出时域稳定的. 不等式 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\le 1$ 定义了一个在 Ω 上包含输出轨迹的时变椭圆.

接下再给出系统 (8) 输入输出时域稳定的充分条件.

推论 2. 对于系统 (8) 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 在 Ω 上满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\ge 0\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0\tag{14}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)>0\tag{15}$$

则系统 (13) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 是输入输出时域稳定. 其中 $\Omega=[t_0,t_0+T]$, $\Pi(t)$ 与定理 1 中相同.

定理 2. 对于系统 (1) 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 在 Ω 上满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\ge 0\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0\tag{17}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Q}(t)C(t)>0\tag{18}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(\tau_k)-(I+A_k)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(\tau_k)(I+A_k)>0\tag{19}$$

则称系统 (1) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. 其中, $\Omega=[t_0,t_0+T]$, $\tilde{Q}(t)=(t-t_0)Q(t)$, $\Pi(t)$ 与定理 1 中相同.

证明. 由 $\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in W_\infty(\Omega,R(t))$ 和式 (7) 成立有:

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))<\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)R(t)\boldsymbol{\omega}(t)\le 1\tag{20}$$

从 t_0 到 t 对式 (20) 积分, 其中, $t\in(t_0,\tau_1)$ $E\boldsymbol{x}(t_0)=0$, 有:

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<t-t_0,\qquad t\in(t_0,\tau_1)\tag{21}$$

当 $t=\tau_1$ 时, 因为 $\boldsymbol{x}(\tau_1^-)=\boldsymbol{x}(\tau_1)$ $\tau_1^-\in(t_0,\tau_1)$, 由式 (21) 我们有:

$$V(\tau_1,\boldsymbol{x}(\tau_1))<\tau_1-t_0$$

接下来讨论 $t\in(\tau_1,\tau_2)$ 的情形, 对式 (20) 从 τ_1^+ 到 t 积分,

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<t-\tau_1+V(\tau_1^+,\boldsymbol{x}(\tau_1^+)),\qquad t\in(\tau_1,\tau_2)$$

根据式 (19), 可得:

$$\begin{aligned}&V(\tau_1^+,\boldsymbol{x}(\tau_1^+))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_1^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau_1)\boldsymbol{x}(\tau_1^+)=\\&\quad[(I+A_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)]^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(\tau_1)[(I+A_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)]<\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_1)E^{\mathrm{T}}P(\tau_1)\boldsymbol{x}(\tau_1)\leq\\&\quad\tau_1-t_0\end{aligned}$$

所以当 $t\in(\tau_1,\tau_2]$ 时有:

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<t-t_0$$

反复进行以上的过程可得, 由 $\boldsymbol{\omega}(\cdot)\in W_\infty(\Omega,R(t))$ 对于任意 $t\in(t_0,t_0+T]$, 都有:

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<t-t_0$$

由条件 (18), 对于所有 $t\in\Omega$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)=\\&\quad\frac{1}{t-t_0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Q}(t)C(t)\boldsymbol{x}(t)<\\&\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P(t)\boldsymbol{x}(t)\leq 1\end{aligned}$$

因此系统 (1) 对于 $(W_\infty,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. □

推论 3. 对于系统 (14), 如果存在一个 Ω_1 上的分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 对所有 $t\in\Omega_1$ $(\Omega=[t_0,t_0+T]$, $\Omega_1=(\tau,t_0+T]\in\Omega)$ 满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\geq 0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Q}(t)C(t)>0 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau^+)\boldsymbol{x}(t_1^+)\leq\int_{\Omega\backslash\Omega_1}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau) \tag{25}$$

则称系统 (1) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. 其中, $\Omega=[t_0,t_0+T]$, $\tilde{Q}(t)=(t-t_0)Q(t)$, $\Pi(t)$ 与定理 1 中相同.

推论 4. 对于系统 (8) 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $P(\cdot)$ 在 Ω 上满足下面的一组不等式:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\geq 0 \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0 \tag{27}$$

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Q}(t)C(t)>0 \tag{28}$$

则称系统 (1) 对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定. 其中, $\Omega=[t_0,t_0+T]$, $\tilde{Q}(t)=(t-t_0)Q(t)$, $\Pi(t)$ 与定理 1 中相同. 由上面的讨论可知本文的结论也适用于一般的广义时变系统.

3 时域控制器设计

问题 1 (状态反馈). 考虑下列基于跳变的广义时变系统.

$$\begin{cases}E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+G(t)\boldsymbol{\omega}(t)+\\ \quad B(t)\boldsymbol{u}(t), & t\neq\tau_k\\ \Delta\boldsymbol{x}(\tau_k)=A_k\boldsymbol{x}(\tau_k^-), & t=\tau_k\\ \boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{29}$$

给出 $T>0$, 一类定义在 $[t_0,t_0+T]$ 上的干扰 $W_2(\Omega,R(t))$ (或 $W_\infty(\Omega,R(t))$), 和一正定矩阵函数 $Q(\cdot)$, 可以找到一个状态反馈控制率:

$$\boldsymbol{u}(t)=K(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{30}$$

使得闭环系统

$$\begin{cases}E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_c(t)\boldsymbol{x}(t)+G(t)\boldsymbol{\omega}(t)+\\ \quad B(t)\boldsymbol{u}(t), & t\neq\tau_k\\ \Delta\boldsymbol{x}(\tau_k)=A_k\boldsymbol{x}(\tau_k^-), t=\tau_k\\ \boldsymbol{y}(t)=C(t)\boldsymbol{x}(t)\end{cases} \tag{31}$$

关于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ (or $(W_\infty,Q(\cdot),\Omega)$) 是输入输出时域稳定的, 其中 $A_c(t)=(A(t)+F(t)K(t))$.

继续引理 1 的讨论, 令 $\Omega_0=[t_0,\tau_1],\Omega_1=(\tau_1,\tau_2],\cdots,\Omega_k=(\tau_k,t_0+T]$, 则问题 1 可以分解为 $k+1$ 个小问题. 也就是在每个小区间内我们满足 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\leq 1$. 因此, 我们仅仅需要讨论推论 1 和推论 2 中的情形.

定理 3. 对于一类干扰 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$, 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $\bar{P}(\cdot)$ 和函数矩阵 $L_i(\cdot)$ 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_1(t) & G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0,\quad\forall t\in\Omega_i \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix}E\bar{P}(t) & \bar{P}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}(t)\\ C(t)\bar{P}(t) & Q^{-1}(t)\end{bmatrix}>0,\quad\forall t\in\Omega_i \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&E^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}(\tau_i^+)-(I+A_i)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}(\tau_i)(I+A_i)>0,\\&\qquad i=1,2,\cdots,m\end{aligned} \tag{34}$$

且状态反馈控制率为 $K_i(t)=L_i(t)\bar{P}^{-1}(t)$, 则问题 1 是可解的, 其中

$$\Gamma_1(t)=-E\dot{\bar{P}}(t)+\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)+A(t)\bar{P}(t)+ L_i^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)+B(t)L_i(t)$$

证明. 对于 $t\in\Omega_i$, 将状态反馈控制率 $K_i(t)=L_i(t)\bar{P}^{-1}(t)$ 带入式 (29), 可以得到闭环系统 (31), 其中, $A_c(t)=A(t)+B(t)L_i(t)\bar{P}(t)^{-1}$. 显然式 (32) 等价于下列不等式:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_2(t) & G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0 \tag{35}$$

这里

$$\begin{aligned}\Gamma_2(t)=&-E\dot{\bar{P}}(t)+\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\\ &B(t)L(t)\bar{P}^{-1}(t))^{\mathrm{T}}+\\ &(A(t)+B(t)L(t)\bar{P}^{-1}(t))\bar{P}(t)=\\ &-E\dot{\bar{P}}(t)+\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)A_c^{\mathrm{T}}(t)+A_c(t)\bar{P}(t)\end{aligned}$$

令 $P(t)=\bar{P}^{-1}(t)$, 将式 (35) 分别左乘 $\mathrm{diag}\{\bar{P}^{-\mathrm{T}}(t),I\}$, 右乘 $\mathrm{diag}\{\bar{P}^{-1}(t),I\}$, 得到下列不等式:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_3(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0$$

这里

$$\begin{aligned}\Gamma_3(t)=&-P^{\mathrm{T}}(t)E\dot{\bar{P}}(t)P(t)+\\ &A_c^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)\end{aligned}$$

因为 $P(t)=\bar{P}^{-1}(t)$, 故

$$I=\bar{P}(t)P(t),\quad 0=\dot{\bar{P}}(t)P(t)+\bar{P}(t)\dot{P}(t)$$

又因为 $E^{\mathrm{T}}P(t)=P^{\mathrm{T}}(t)E\geq 0$, 很容易可以得出:

$$-P^{\mathrm{T}}(t)E\dot{\bar{P}}(t)P(t)=-E^{\mathrm{T}}P(t)\dot{\bar{P}}(t)P(t)=E^{\mathrm{T}}\dot{P}(t)$$

由此可得:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_4(t) & P^{\mathrm{T}}(t)G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t)P(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0 \tag{36}$$

这里

$$\Gamma_4(t)=E^{\mathrm{T}}\dot{P}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)P(t)+P(t)A_c(t)$$

根据 Schur 定理, 式 (33) 等价于下列不等式:

$$E\bar{P}(t)-\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)\bar{P}(t)>0 \tag{37}$$

将式 (37) 分别左乘 $\bar{P}^{-\mathrm{T}}(t)$, 右乘 $\bar{P}^{-1}(t)$, 可得:

$$\bar{P}^{-\mathrm{T}}(t)E-C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)>0$$

因为 $P^{\mathrm{T}}(t)E=E^{\mathrm{T}}P(t)$, 则:

$$E^{\mathrm{T}}P(t)-C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t)>0 \tag{38}$$

通过定理 1 的证明, 可得条件 (34) 等价于下式:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_k^+)E^{\mathrm{T}}P(\tau_k^+)\boldsymbol{x}(\tau_k^+)\leq\int_{\sum\limits_{i=0}^{k}\Omega_i}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)R(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau) \tag{39}$$

根据式 (36)、(38)、(39) 和推论 1, 可得:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\leq 1,\quad t\in\Omega_i,\quad i\neq 0$$

另外根据推论 2, 对于 $t\in\Omega_0$, 我们也可得到同样的结果. 因此在每一个小的区间内都有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)\leq 1$ 成立, 综上所述, 闭环系统 (31) 是对于 $(W_2,Q(\cdot),\Omega)$ 输入输出时域稳定的. □

定理 4. 对于一类干扰 $(W_\infty,Q(\cdot),\Omega)$, 如果存在一个分段连续可微的非奇异函数矩阵 $\bar{P}(\cdot)$ 和函数矩阵 $L_i(\cdot)$ 使得下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\Gamma_1(t) & G(t)\\ G^{\mathrm{T}}(t) & -R(t)\end{bmatrix}<0,\quad\forall t\in\Omega_i \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix}E\bar{P}(t) & \bar{P}(t)C^{\mathrm{T}}(t)\\ C(t)\bar{P}(t) & ((t-t_0)Q(t))^{-1}\end{bmatrix}>0,\quad\forall t\in\Omega_i \tag{41}$$

$$E^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}(\tau_i^+)-(I+A_i)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}\bar{P}^{-1}(\tau_i)(I+A_i)>0,\quad i=0,1,\cdots,m \tag{42}$$

且状态反馈控制率为 $K_i(t)=L_i(t)\bar{P}^{-1}(t)$, 则问题 1 是可解的, 其中

$$\Gamma_1(t)=-E\dot{\bar{P}}(t)+\bar{P}^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)+A(t)\bar{P}(t)+ L_i^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)+B(t)L_i(t)$$

以上所有的条件都是由矩阵不等式和矩阵微分不等式给出的. 我们可以经过下面的处理将小区间内的时变矩阵不等式转化为标准的 (时不变的) 矩阵不等式组. 假设 $P(t)$ 或 $\bar{P}(t)$ 和 $L(t)$ 是分段线性的,

$P(t)$ 或 $\bar{P}(t)$) 在 τ_k 处产生跳变,

$$\begin{cases} P(0)(\text{or } (\bar{P}(t))) = \Pi_1^0 \\ P(t)(\text{or } (\bar{P}(t))) = \Pi_k^0 + \Pi_k^s(t-(k-1)T_s), \\ \qquad k \in N: k < \bar{k}, \quad t \in [(k-1)T_s, kT_s] \\ P(t)(\text{or } (\bar{P}(t))) = \Pi_{\bar{k}+1}^0 + \Pi_{\bar{k}+1}^0(t-\bar{k}T_s), \\ t \in [\bar{k}T_s, T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(0) = \Lambda_1^0 \\ L(t) = \Lambda_k^0 + \Lambda_k^s(t-(k-1)T_s), \\ \qquad k \in N: k < \bar{k}, \quad t \in [(k-1)T_s, kT_s] \\ L(t) = \Lambda_{\bar{k}+1}^0 + \Lambda_{\bar{k}+1}^0(t-\bar{k}T_s), \quad t \in [\bar{k}T_s, T] \end{cases}$$

其中 $\bar{k} = \max k \in \mathbf{N}^+ : k < T/T_s$. 根据上式 $\dot{P}(t)$ 和 $P(t_k^+)$ 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{P}(t)(\text{or}(\dot{\bar{P}}(t))) = \Pi_k^s, \quad P(t_k^+)(\text{or}(\dot{\bar{P}}(t))) = \Pi_k^0, \\ \qquad k \in \mathbf{N}: k < \bar{k}, t \in [(k-1)T_s, kT_s] \\ \dot{P}(t)(\text{or}(\dot{\bar{P}}(t))) = \Pi_{\bar{k}+1}^0 \\ P(t_k^+)(\text{or}(\dot{\bar{P}}(t))) = \Pi_{\bar{k}+1}^0, \quad t \in [\bar{k}T_s, T] \end{cases}$$

因此, 上述条件可以转化为一组标准的矩阵不等式组求解问题. 由于 $E^{\mathrm{T}}P(t) = P^{\mathrm{T}}(t)E \geq 0$ ($E^{\mathrm{T}}\Pi_k^0 = \Pi_k^{0\mathrm{T}}, E \geq 0$; $E^{\mathrm{T}}\Pi_k^s = \Pi_k^{s\mathrm{T}}, E \geq 0$), 我们注意到上述问题被简化为一组非严格的矩阵不等式组, 这样对于求解会造成一定的麻烦. 为了将非严格的矩阵不等式组转化为严格的矩阵不等式组, 我们介绍引理 1.

引理 1[22−23]**.** 如果 $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵满足 $E_L^{\mathrm{T}}XE_L > 0$, $T \in \mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是非奇异矩阵. 则 $XE + M^{\mathrm{T}}TS^{\mathrm{T}}$ 也是非奇异的且它的逆可以表示为

$$(XE + M^{\mathrm{T}}TS^{\mathrm{T}})^{-1} = XE^{\mathrm{T}} + STM$$

其中 X 是对称矩阵, T 是非奇异矩阵.

$$\begin{aligned} &E_R^{\mathrm{T}}XE_R = (E_L^{\mathrm{T}}XE_L)^{-1} \\ &T = (S^{\mathrm{T}}S)^{-1}T^{-1}(MM^{\mathrm{T}})^{-1} \end{aligned}$$

M 和 S 是行满秩矩阵满足 $ME = 0$, $ES = 0$; E 可以分解为 $E = E_LE_R^{\mathrm{T}}$, 其中 $E_L \in \mathbf{R}^{n\times r}$, $E_R \in \mathbf{R}^{n\times r}$ 是列满秩的.

令 $\Pi_k^0 = X_k^0E + M^{\mathrm{T}}T_k^0S^{\mathrm{T}}$, $\Pi_k^s = X_k^sE + M^{\mathrm{T}}T_k^sS^{\mathrm{T}}$. 根据引理 1, 我们可以得到 $(X_k^0E + M^{\mathrm{T}}T_k^0S^{\mathrm{T}})^{-1} = X_k^0E^{\mathrm{T}} + ST_k^0M$ 和 $(X_k^sE + M^{\mathrm{T}}T_k^sS^{\mathrm{T}})^{-1} = X_k^sE^{\mathrm{T}} + ST_k^0M$. 这样 $E^{\mathrm{T}}P(t) = P^{\mathrm{T}}(t)E \geq 0$ 就得到了满足, 因此, 非严格的矩阵不等式组转化为了严格的矩阵不等式组. 利用 Matlab LMI 工具包, 就可以对 $X_k^s, T_k^0, T_k^s, X_k^0$ (或 $X_k^0, X_k^s, T_k^0, T_k^s$), Λ_k^0, Λ_k^s 进行求解, 从而得到 $P(t)$ (或 ($\bar{P}(t)$) 和 $L(t)$).

4 数值算例

例 1. 考虑如下广义时变脉冲系统:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2t & -3t \end{bmatrix}$$

$$A_{0.5} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, 选取 $\boldsymbol{\omega}(t) = 1$, $\Omega = [0, 1]$, $R = 1$, $Q = 3$. 显然

$$E_R = E_L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

我们选 $M^{\mathrm{T}} = S = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. 根据上节的数值算法应用 Matlab LMI 工具包求解矩阵不等式组, 可得到一组 Π_k^S 和 Π_k^0, $k = 1, 2 \cdots, \bar{k}$ 使得 $P(t)$ 满足定理 1 的条件. 因此, 我们可以得出系统 (1) 对于 $(W_2, Q(\cdot), \Omega)$ 输入输出时域稳定, 图 1 表明了 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)$ 的轨迹.

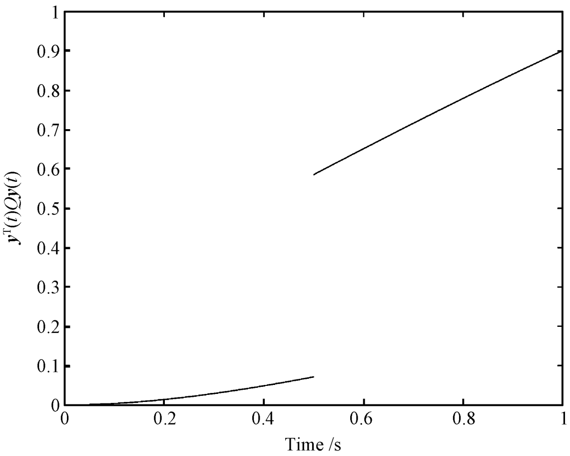


图 1 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)$ 的轨迹 ($\boldsymbol{\omega} = 1$)

Fig. 1 Trajectory of $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)$ for $\boldsymbol{\omega} = 1$

例 2. 考虑如下广义时变脉冲系统:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ -3 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{0.5} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

其中, 选取 $\boldsymbol{\omega}(t) = 1$, $\Omega = [0, 1]$, $R = 1$, $Q = 2$, 系统 (1) 不是输入输出时域稳定的 (图 2). 从图 2 中可以看到在 $(0.5, 1]$ 上 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t) > 1$.

$$E_R = E_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

选取 $M^{\mathrm{T}} = S = [0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. 应用 Matlab LMI 工具包求解, 可解得两组满足定理 3 条件的分段线性的函数矩阵 $\bar{P}(t)$ 和 $L(t)$. 因此我们可以得到控制器 $K(t) = L(t)\bar{P}^{-1}(t) = [K_1(t)\ K_2(t)\ K_3(t)]$. 由定理 3 证明可知加入控制器的闭环系统是满足定理 1 的条件的, 因此闭环系统对于 $(W_2, Q(\cdot), \Omega)$ 输入输出时域稳定. 控制器分量 $K_1(t)$, $K_2(t)$ 和 $K_3(t)$ 见图 3.

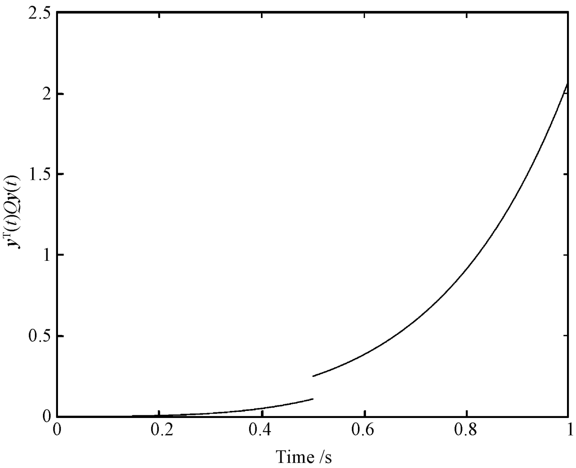


图 2　$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)$ 的轨迹 ($\boldsymbol{\omega} = 1$)

Fig. 2　Trajectory of $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\boldsymbol{y}(t)$ for $\boldsymbol{\omega} = 1$

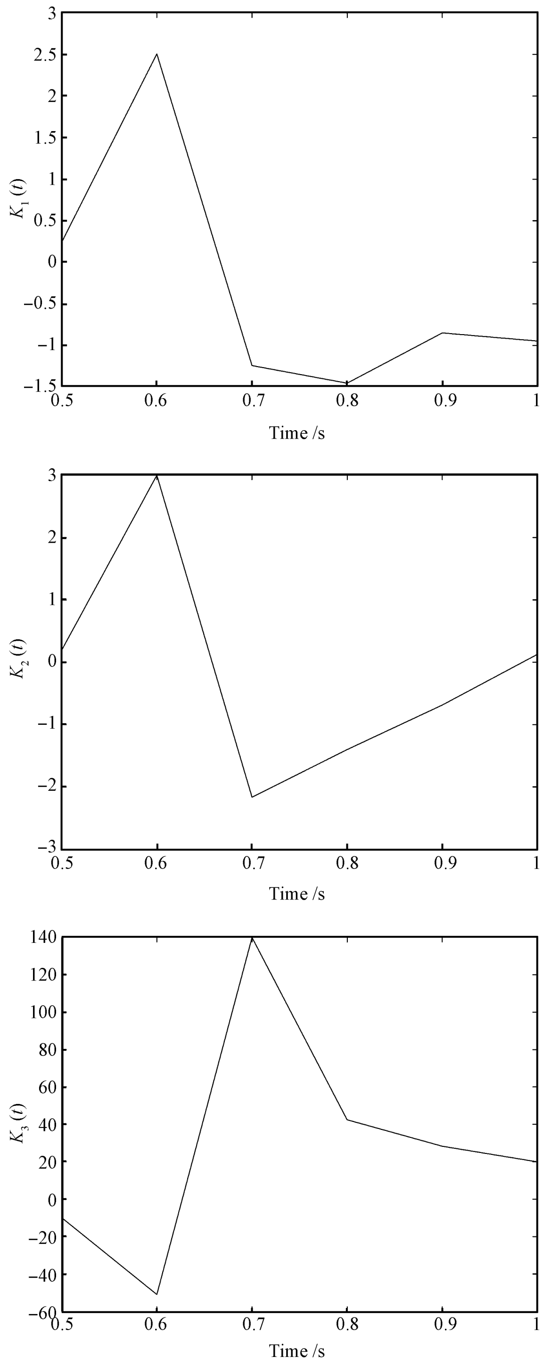


图 3　控制器 $K_1(t)$, $K_2(t)$ 和 $K_3(t)$

Fig. 3　Control gain $K_1(t)$, $K_2(t)$, and $K_3(t)$

5　结论

本文对于两类干扰输入对广义时变脉冲系统的输入输出时域稳定问题给出了两个充分条件, 并且根据充分条件设计了状态反馈控制器. 这些条件都可以归结于矩阵微分不等式的可解性问题. 对于小区间内的时变矩阵不等式的求解利用了分段线性化将其转化为一组标准的 (时不变) 矩阵不等式的求解

问题. 本文的结果对于一般情况下的广义时变系统同样适用. 最后给出了两个算例说明了算法的有效性.

References

1 Amato F, Ambrosino R, Cosentino C, De Tommasi G. Input-output finite-time stabilization of linear systems. *Automatica*, 2010, **46**(9): 1558−1562

2 Amato F, Carannante G, De Tommasi G, Pironti A. Input-output finite-time stabilization of LTV systems via dynamic output feedback. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). Orlando, FL: IEEE, 2011. 1928−1932

3 Amato F, Carannante G, De Tommasi G, Pironti A. Input-output finite-time stability of linear systems: necessary and sufficient conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, to be published

4 Amato F, Carannante G, De Tommasi G, Pironti A. Necessary and sufficient conditions for input-output finite-time stabilization of linear time-varying systems. In: Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC). Orlando, FL: IEEE, 2011. 1933−1937

5 Amato F, Carannante G, De Tommasi G, Pironti A. Input-output finite-time stabilization with constrained control inputs. In: Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii: IEEE, 2012. 5731−5736

6 Kamenkov G. On stability of motion over a finite interval of time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1953, **17**: 529−540

7 Lebedev A. On stability of motion during a given interval of time. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1954, **18**: 139−148

8 Weiss L, Indante E. Finite-time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, **12**(1): 54−59

9 Amato F, Ambrosino R, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems with jumps. *Automatica*, 2009, **45**(5): 1354−1358

10 Amato F, Ambrosino R, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 1003−1008

11 Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. *Automatica*, 2006, **42**(2): 337−342

12 Garcia G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 364−369

13 Shen Y J. Finite-time control of linear parameter-varying systems with norm-bounded exogenous disturbance. *Journal of Control Theory and Applications*, 2008, **6**(2): 184−188

14 Liu L, Sun J T. Finite-time stabilization of linear systems via impulsive control. *International Journal of Control*, 2008, **81**(6): 905−909

15 Wang C J. Controllability and observability of linear time-varying singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(10): 1901−1905

16 Zhang Xue-Feng, Zhang Qing-Ling. On controllability and observability of linear time-varying singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(9): 1249−1253
(张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能控性和能观性问题. 自动化学报, 2009, **35**(9): 1249−1253)

17 Wang C J. Impulse observability and impulse controllability of linear time-varying singular systems. *Automatica*, 2001, **37**(11): 1867−1872

18 Kabla N A, Debeljković D L J. Finite-time stability of time-varying linear singular systems. In: Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. Belgrade: IEEE, 1998

19 Kabla N A, Debeljković D L J. Finite-time stability robustness of time-varying linear singular systems. In: Proceedings of the 3rd Asian Control Conference. Shanghai: IEEE, 2000

20 Kabla N A, Debeljković D L J. Finite-time instability of time-varying linear singular systems. In: Proceedings of the 1999 American Control Conference. San Diego: IEEE, 1999. 1796−1800

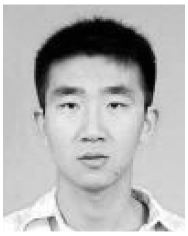
21 Su Xiao-Ming, Lv Ming-Zhu. Analysis of robust stability for linear time-varying uncertain periodic descriptor systems. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(4): 481−488
(苏晓明, 吕明珠. 广义不确定周期时变系统的鲁棒稳定性分析. 自动化学报, **32**(4): 481−488)

22 Wang Xiao-Hua, Liu Xiao-Ping. Disturbance decoupling of nonlinear generalized time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2000, **26**(6): 798−820
(王晓华, 刘晓平. 非线性广义时变系统的干扰解耦. 自动化学报, 2000, **26**(6): 798−820)

23 Zhao S W, Sun J T, Liu L. Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects. *International Journal of Control*, 2008, **81**(11): 1824−1829

24 Xu J, Sun J. Finite-time stability of linear time-varying singular impulsive systems. *IET Control Theory Applications*, 2010, **4**(10): 2239−2244

苏晓明 沈阳工业大学理学院教授. 主要研究方向为广义时变系统.
E-mail: suxm@sut.edu.cn
(**SU Xiao-Ming** Professor at the School of Science, Shenyang University of Technology. His research interest covers time-varying descriptor systems.)



阿迪亚 沈阳工业大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为广义时变系统. 本文通信作者. E-mail: syeaady@gmail.com
(**Adiya** Master student at the School of Science, Shenyang University of Technology. His research interest covers time-varying descriptor systems. Corresponding author of this paper.)