基于输出反馈滑模控制的分数阶超混沌系统同步

邓立为 [1] 宋申民 [1]

摘 要 以具有更大秘钥空间的分数阶超混沌系统为驱动系统和响应系统, 利用具有实际应用意义的输出反馈滑模控制实现两个系统的同步. 通过对同步误差系统方程进行结构分解, 在辅助系统的基础上设计具有输出反馈特性的滑模控制律. 在分数阶系统稳定性理论基础上利用 MATLAB YALMIP 工具箱对滑模参数进行整定, 并利用分数阶 Lyapunov 稳定性定理证明了滑模控制律和自适应滑模控制律的稳定性. 最后, 数值仿真表明了本文方法的有效性和可行性.

关键词 输出反馈, 混沌同步, 分数阶系统, 滑模控制, 分数阶微积分

引用格式 邓立为, 宋申民. 基于输出反馈滑模控制的分数阶超混沌系统同步. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2420−2427

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.02420

Synchronization of Fractional Order Hyperchaotic Systems Based on Output Feedback Sliding Mode Control

DENG Li-Wei[1] SONG Shen-Min[1]

Abstract Regarding the fractional order hyperchaotic system with a larger key space as the drive system and response system, an output feedback sliding mode controller with practical application significance is designed to implement their synchronization. Through decomposing the equations of the synchronization error system, a sliding control law with output feedback characteristic is developed on the basis of the auxiliary system. Based on the stability theory of the fractional system, the sliding parameters are tuned by using the YALMIP toolbox in MATLAB, and then the stabilities of the sliding control law and adaptive sliding control law are proved by the fractional order Lyapunov stability theorem. Simulation results show that the synchronization scheme proposed in this paper is effective and feasible.

Key words Output feedback, chaotic synchronization, fractional order system, sliding mode control, fractional calculus

Citation Deng Li-Wei, Song Shen-Min. Synchronization of fractional order hyperchaotic systems based on output feedback sliding mode control. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2420−2427

伴随着分数阶系统研究的不断深入, 分数阶混沌及分数阶超混沌系统因具有更大的秘钥空间在保密通信等领域的应用得到了广泛的研究与关注. 针对分数阶混沌系统的同步控制问题, 大量学者进行了一系列的研究, 如文献 [1] 研究了两个具有不确定性的分数阶混沌系统的自适应模糊滑模控制问题; 文献 [2] 研究了整数阶混沌系统与分数阶混沌系统的同步控制问题; 文献 [3] 利用反步滑模控制研究了具有不确定性的分数阶混沌系统的同步问题; 文献 [4] 利用分数阶终端滑模研究了具有扰动的分数阶混沌系统的同步问题; 文献 [5] 利用等阶次系统的方法研究了阶次不等的分数阶混沌系统的同步问题; 文献 [6] 利用自适应滑模控制研究了不同维分数阶混沌系统的同步问题. 与此同时, 针对分数阶超混沌系统, 文献 [7] 利用滑模控制律研究了分数阶超混沌系统与整数阶超混沌系统的同步问题; 文献 [8] 利用分数阶非奇异终端滑模研究了分数阶非自治混沌及超混沌系统的有限时间控制与同步问题; 文献 [9] 针对具有不匹配分数阶微分的混沌及超混沌系统, 设计了滑模同步控制律; 文献 [10] 研究了分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌系统的异结构同步; 文献 [11] 利用有限时间稳定性理论研究了分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步. 但是, 上述文献都是在假设系统状态完全可得的情况下设计的控制律. 在许多工程实际应用或者保密通信中, 仅仅部分状态变量是可知的, 因此在输出反馈的基础上研究混沌及超混沌系统的同步控制问题更具有实际应用意义. 针对输出反馈混沌同步问题, 文献 [12] 利用输出反馈控制研究了一类混沌系统的 H_∞ 同步问题; 文献 [13] 利用自适应滑模输出反馈控制律研究了一类主

收稿日期 2013-12-19 录用日期 2014-05-15
Manuscript received December 19, 2013; accepted May 15, 2014
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2012CB821205), 国家自然科学基金 (61174037), 国家自然科学基金委创新研究群体科学基金项目 (61321062) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB821205), National Natural Science Foundation of China (61174037), the Innovative Team Program of the National Natural Science Foundation of China (61321062)
本文责任编委 吕金虎
Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu
1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150086
1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150086

从式混沌系统的同步控制问题. 但是, 上述文献均是以整数阶混沌系统为对象进行的研究.

到目前为止, 查阅文献数据库可知, 国内外针对分数阶超混沌系统的静态输出同步问题的相关研究成果鲜有报道. 因此, 本文在上述研究成果基础上, 以具有一般形式的分数阶非线性系统为研究对象, 利用分数阶系统理论、滑模控制理论及系统结构分解理论设计输出反馈滑模控制律, 并以分数阶超混沌系统为例, 利用 MATLAB 数值仿真的形式验证了本文方法的有效性和可行性. 本文提出的静态输出反馈滑模控制方法, 具有通用性强、工程实际应用性广泛等特点, 能够为利用输出反馈研究分数阶混沌系统的稳定及同步问题提供新的途径.

1 系统模型和问题描述

考虑分数阶超混沌系统, 设驱动系统为

$$\begin{cases} D^{\alpha}\boldsymbol{x}_m = A\boldsymbol{x}_m + g(\boldsymbol{x}_m) \\ \boldsymbol{y}_m = C\boldsymbol{x}_m \end{cases} \tag{1}$$

响应系统为

$$\begin{cases} D^{\alpha}\boldsymbol{x}_s = A\boldsymbol{x}_s + g(\boldsymbol{x}_s) + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_s = C\boldsymbol{x}_s \end{cases} \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{x}_m = [x_{m1},\cdots,x_{mn}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_s = [x_{s1},\ \cdots,x_{sn}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态变量, $D^{\alpha}(\cdot)$ 表示分数阶微分算子[14−15], $0 < \alpha < 1$ 表示系统的微分阶次, $g(\cdot) = Bf(\cdot)$ 为连续的非线性项并满足系统的匹配条件, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $\boldsymbol{y}_m(\boldsymbol{y}_s) \in \mathbf{R}^p$ 为系统的输出量, A、B 和 C 是具有合适维数的常数矩阵. 为方便下文输出滑模控制律的设计, 引入如下的假设条件:

假设 1. 矩阵对 (A,B,C) 是可控制和可观测的, 且系统维数满足 $m \le p < n$;

假设 2. 输入矩阵 A 和输出矩阵 C 都是满秩的, 即: $\mathrm{rank}(B) = m$, 且有 $\mathrm{rank}(CB) = m$ 成立;

假设 3. 对于任意 $\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_s \in \mathbf{R}^n$ 的两个向量, 存在常数 δ_1 使函数 $f(\cdot):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 满足 Lipschitz 条件, 即满足不等式 $\|f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)\| \le \delta_1 \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_s\|$ 成立.

定义误差向量 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_s = [e_1,\cdots,e_n]^{\mathrm{T}}$, 利用式 (1) 和式 (2) 得到同步误差动力学方程为

$$\begin{cases} D^{\alpha}\boldsymbol{e} = A\boldsymbol{e} + B(f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)) - B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_e = C\boldsymbol{e} \end{cases} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{y}_e \in \mathbf{R}^p$ 是分数阶超混沌系统的同步输出误差向量.

同步问题描述. 以超混沌系统 (1) 作为驱动系统, 以超混沌系统 (2) 作为响应系统, 在同步误差系统 (3) 的基础上设计控制律 $\boldsymbol{u}$ 使从不同初值 $\boldsymbol{x}_m(0)$ 和 $\boldsymbol{x}_s(0)$ 出发的系统满足 $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}\| = \lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_s\| = 0$, 从而得到响应系统与驱动系统的同步.

在滑模控制律设计之前, 给出如下引理:

引理 1[3−4]**.** 假设 $\boldsymbol{x} = 0$ 是分数阶非自治系统式 (4) 的平衡点,

$$D^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = f(\boldsymbol{x},t) \tag{4}$$

其中, $f(\boldsymbol{x},t)$ 满足 Lipschitz 条件. 假设存在一个 Lyapunov 函数 $V(t,\boldsymbol{x}(t))$ 满足如下条件:

$$\begin{cases} a_1\|\boldsymbol{x}\| \le V(t,\boldsymbol{x}) \le a_2\|\boldsymbol{x}\| \\ \dot{V}(t,\boldsymbol{x}) \le -a_3\|\boldsymbol{x}\| \end{cases} \tag{5}$$

其中, a_1, a_2 和 a_3 是正常数, 则有系统 (4) 是渐近稳定的.

引理 2[16−17]**.** 假设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $0 < \alpha < 1$, 分数阶系统 $D^{\alpha}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ 是渐近稳定的, 当且仅当存在 2 个正定实对称矩阵 $P_{k1} \in \mathbf{R}^{n\times n}, k = 1,2$ 和 2 个反对称矩阵 $P_{k2} \in \mathbf{R}^{n\times n}, k = 1,2$ 使得如下条件成立:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{sym}\{\boldsymbol{\Xi}_{ij} \otimes (AP_{ij})\} < 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ -P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} > 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ -P_{22} & P_{21} \end{bmatrix} > 0 \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi}_{11} = \begin{bmatrix} \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & -\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{21} = \begin{bmatrix} \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{22} = \begin{bmatrix} -\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) & -\cos\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

2 输出反馈滑模控制律设计

为了便于下文输出反馈滑模控制律设计, 首先对系统 (3) 的矩阵进行结构分解, 文献 [18] 以定理形式给出了存在矩阵 T_a, 进行状态变换 $\boldsymbol{e}' = T_a\boldsymbol{e} = [\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 从而得到下式成立,

$$\begin{cases} D^\alpha \boldsymbol{e}_1 = A_{11}\boldsymbol{e}_1 + A_{12}\boldsymbol{e}_2 \\ D^\alpha \boldsymbol{e}_2 = A_{21}\boldsymbol{e}_1 + A_{22}\boldsymbol{e}_2 + \\ \qquad B_1(f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)) - B_1\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}_e = C\boldsymbol{e} = C_c\boldsymbol{e}' \end{cases} \tag{9}$$

其中, $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbf{R}^{n-m}$, $\boldsymbol{e}_2 \in \mathbf{R}^m$, $A_c = T_aAT_a^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $C_c = CT_a^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \end{bmatrix}$, $B_c = T_aB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $A_{11} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$, $A_{12} \in \mathbf{R}^{(n-m)\times m}$, $A_{21} \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)}$, $A_{22} \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $B_1 \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $C_1 \in \mathbf{R}^{p\times p}$ 为正交矩阵.

2.1 输出反馈滑模面设计及滑模面参数整定

定义滑模面切换函数为

$$\boldsymbol{s} = F\boldsymbol{y}_e = FC\boldsymbol{e} \tag{10}$$

其中, $F \in \mathbf{R}^{m\times p}$ 是满秩的常数矩阵, 从式 (10) 可以看出设计位于输出向量空间中的滑模面, 使得位于此滑模面上的滑模运动是渐近稳定的, 但由于矩阵 C 的存在致使基于输出向量空间的滑模面不能遍历所有可能的 m 维状态空间. 为了保证滑模运动的渐近稳定性, 选择矩阵 $F = F_2[K\ I_m]C_1^{\mathrm{T}}$, 其中, $K \in \mathbf{R}^{m\times(p-m)}$, $F_2 \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 是非奇异常数矩阵. 定义 $C_2 = \left[0_{(p-m)\times(n-p)}\ I_{(p-m)}\right]$, 则得:

$$\boldsymbol{s} = FC\boldsymbol{e} = F_2[K\ I_m]C_1^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & C_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = F_2KC_2\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 \tag{11}$$

当 $\boldsymbol{s} = 0$ 时, 由于 $F_2 \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 是非奇异常数矩阵则得 $\boldsymbol{e}_2 = -KC_2\boldsymbol{e}_1$, 代入式 (9) 中, 得到滑模运动动力学方程为

$$D^\alpha \boldsymbol{e}_1 = (A_{11} - A_{12}KC_2)\boldsymbol{e}_1 = A_s\boldsymbol{e}_1 \tag{12}$$

由文献 [7, 9] 可知, 形如式 (12) 所示的分数阶系统稳定的条件是

$$\min_i |\arg(\lambda_i(A_s))| = \min_i |\arg(\lambda_i(A_{11} - A_{12}KC_2))| > \frac{\alpha\pi}{2} \tag{13}$$

其中, $i = 1,\cdots,n-m$. 因此, 未知参数矩阵 K 的选取应保证矩阵 A_s 的特征值满足式 (13) 成立. 由于分数阶微分方程阶数参数 α 的引入, 参数矩阵 K 的选取并不简单, 为了能够合适地选取参数矩阵 K, 当 $\alpha = 1$ 时, 一般利用 MATLAB LMI 工具箱进行求解. 而当 $0 < \alpha < 1$ 时, 利用引理 2 进行构造求解方程, 由于 Kronecker 积的引入致使所求不等式不是标准的 LMI 形式, 不能够直接利用 LMI 工具箱进行求解. 文献 [19] 所给的 YALMIP 工具箱是在 MATLAB 符号工具箱以及 LMI 工具箱基础上开发的解决优化问题的有效工具箱, 并在文献中给出了工具箱的源码. 本文利用 YALMIP 工具箱可以很方便地求解得到增益参数矩阵 K 的值.

2.2 滑模控制律设计

在得到滑模面切换函数之后, 应设计相应的滑模控制律以确保系统是稳定的, 能够在有限时间内到达滑模面. 由式 (11) 可得:

$$\boldsymbol{e}_2 = F_2^{-1}\boldsymbol{s} - KC_2\boldsymbol{e}_1 \tag{14}$$

将其代入到式 (9) 进一步得到:

$$D^\alpha \boldsymbol{e}_1 = (A_{11} - A_{12}KC_2)\boldsymbol{e}_1 + A_{12}F_2^{-1}\boldsymbol{s} = A_s\boldsymbol{e}_1 + A_{12}F_2^{-1}\boldsymbol{s} \tag{15}$$

$$D^\alpha \boldsymbol{e}_2 = (A_{21} - A_{22}KC_2)\boldsymbol{e}_1 + A_{12}F_2^{-1}\boldsymbol{s} + B_1(f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)) - B_1\boldsymbol{u} \tag{16}$$

在完成控制律设计之前, 先给出如下引理:

引理 3. 针对类似由式 (15) 构成的系统, 如果 λ_m 表示的是 $-\lambda(A_s)$ 的特征值的最小正实部, 则有如下结论成立:

1) 存在正常数 k, 使得 $\|\mathrm{e}_\alpha^{A_st}\| \le k\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m t}$ 成立;

2) $w(t)$ 是方程 $D^\alpha w(t) = -\lambda_m w(t) + k\left\|A_{12}F_2^{-1}\right\|\|\boldsymbol{s}\|$ 的解, $\boldsymbol{e}_1$ 的范数始终受到不等式 $\|\boldsymbol{e}_1\| \le w(t)$ 的约束.

证明. 1) 当 $\alpha = 1$ 时, 文献 [20] 给出了形如 $\|\mathrm{e}^{A_st}\| \le k\mathrm{e}^{-\lambda_m t}$ 的整数阶系统的不等式约束证明过程. 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $\mathrm{e}_\alpha^{A_st}$ 称为分数阶系统 (15) 的分数阶状态转移矩阵, 定义为

$$\mathrm{e}_\alpha^{A_st} = t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty} A_s^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \tag{17}$$

其中, $\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{Re}(q) > 0$. 定义 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-m}\}$, 利用矩阵 A_s 的 Jordan 分解可得:

$$\left\|\mathrm{e}_\alpha^{A_st}\right\| = \left\|\xi\mathrm{e}_\alpha^{\Lambda t}\xi^{-1}\right\| \le k\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m t} \tag{18}$$

其中, ξ 是特征值 λ_i 对应的特征向量构成的变换矩阵, $k \in \mathbf{R}^+$ 是正实数. 由于分数阶状态转移矩阵 $\mathrm{e}_\alpha^{A_s t}$ 的复杂性, 参数 k 的选取可以参考文献 [21].

2) 形如分数阶系统 (15) 的解为[22]

$$\boldsymbol{e}_1 = \mathrm{e}_\alpha^{A_s t}\boldsymbol{e}_1(0) + \int_0^t \mathrm{e}_\alpha^{A_s(t-\tau)} A_{12}F_2^{-1}\boldsymbol{s}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

对式 (19) 两边求取范数可得:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{e}_1\| = &\left\|\mathrm{e}_\alpha^{A_s t}\right\| \|\boldsymbol{e}_1(0)\| + \\ &\int_0^t \left\|\mathrm{e}_\alpha^{A_s(t-\tau)}\right\| \left\|A_{12}F_2^{-1}\right\| \|\boldsymbol{s}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \\ &\left\|\xi \mathrm{e}_\alpha^{\boldsymbol{\Lambda} t}\xi^{-1}\right\| \|\boldsymbol{e}_1(0)\| + \\ &\int_0^t \left\|\xi \mathrm{e}_\alpha^{\boldsymbol{\Lambda}(t-\tau)}\xi^{-1}\right\| \left\|A_{12}F_2^{-1}\right\| \|\boldsymbol{s}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \le \\ &k\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m t} \|\boldsymbol{e}_1(0)\| + \\ &\int_0^t k\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m(t-\tau)} \left\|A_{12}F_2^{-1}\right\| \|\boldsymbol{s}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \le \\ &\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m t}w(0) + \\ &\int_0^t k\mathrm{e}_\alpha^{-\lambda_m(t-\tau)} \left\|A_{12}F_2^{-1}\right\| \|\boldsymbol{s}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = w(t)\end{aligned} \tag{20}$$

如果选取 $0 \le k\|\boldsymbol{e}_1(0)\| < w(0)$, 则可得 $\|\boldsymbol{e}_1\| \le w(t)$. □

定理 1. 分数阶超混沌同步误差系统 (3), 选取滑模面切换函数 (10), 在输出反馈滑模控制律

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 = &\frac{B_1^{-1}F_2^{-1}\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2}[\left\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}M\right\| w(t) + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{s} + \\ &\left\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}F_2B_1\right\| \delta_2(t) + \delta_3\|\boldsymbol{s}\| + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})]\end{aligned} \tag{21}$$

作用下, 系统在有限时间 $t_r \le \left[\frac{(\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{s}(0))^{\alpha-1}}{2\delta_4\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ 内收敛到滑模面. 其中, $\delta_2(t) = \delta_1((1+\|KC_2\|)w(t) + \left\|F_2^{-1}\right\| \|\boldsymbol{s}\|)$, $M = F_2KC_2A_{11} - F_2KC_2A_{12}KC_2 + F_2A_{21} - F_2A_{22}KC_2$, $\delta_3 \in \mathbf{R}^+$ 是正实数, $\delta_4 \le D^{-\alpha}\|\boldsymbol{s}\|_1$ 是正实数.

证明. 受文献 [17, 23] 的启发, 利用引理 1 的分数阶 Lyapunov 稳定性定理证明系统的稳定性, 选取 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{22}$$

对上式求取分数 α 阶导数可得:

$$D^\alpha V_1 = (D^\alpha\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(D^\alpha\boldsymbol{s}) + 2\Psi \tag{23}$$

其中, $\Psi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha)(D^k\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}(D^{\alpha-k}\boldsymbol{s})}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k+\alpha)} \le \delta_3\|\boldsymbol{s}\|$, $\delta_3 = \frac{\Gamma(1+\alpha)MK_{\max}H}{L_{\min}}$, 存在正实数 $M, K_{\max}, H, L_{\min}$ 使得 $\|D^\alpha\boldsymbol{s}\| \le M$, $\left\|D^{\alpha-k}\boldsymbol{s}\right\| \le K_{\max}\|\boldsymbol{s}\|$, $0 < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+k)} < H$, $0 < L_{\min} \le |\Gamma(1-\alpha+k)|$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ 成立[17, 23].

将式 (11)、式 (15) 和式 (16) 代入上式可得:

$$\begin{aligned}D^\alpha V_1 = &(D^\alpha\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(D^\alpha\boldsymbol{s}) + 2\Psi = \\ &[F_2KC_2D^\alpha\boldsymbol{e}_1 + F_2D^\alpha\boldsymbol{e}_2]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \\ &\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}[F_2KC_2D^\alpha\boldsymbol{e}_1 + F_2D^\alpha\boldsymbol{e}_2] + 2\Psi = \\ &[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + F_2B_1(f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)) - \\ &F_2B_1\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + \\ &F_2B_1(f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)) - F_2B_1\boldsymbol{u}] + 2\Psi \le \\ &[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + \|F_2B_1\|(\|f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)\|) - \\ &F_2B_1\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + \\ &\|F_2B_1\|(\|f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)\|) - F_2B_1\boldsymbol{u}] + \\ &2\delta_3\|\boldsymbol{s}\|\end{aligned} \tag{24}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\|f(\boldsymbol{x}_m) - f(\boldsymbol{x}_s)\| \le \\ &\delta_1\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_s\| = \delta_1\|\boldsymbol{e}\| \le \\ &\delta_1(\|\boldsymbol{e}_1\| + \|\boldsymbol{e}_2\|) = \\ &\delta_1(\|\boldsymbol{e}_1\| + \left\|F_2^{-1}\right\|\|\boldsymbol{s}\| + \|KC_2\|\|\boldsymbol{e}_1\|) = \\ &\delta_1((1 + \|KC_2\|)\|\boldsymbol{e}_1\| + \left\|F_2^{-1}\right\|\|\boldsymbol{s}\|) \le \\ &\delta_1((1 + \|KC_2\|)w(t) + \left\|F_2^{-1}\right\|\|\boldsymbol{s}\|) = \delta_2(t)\end{aligned} \tag{25}$$

将控制律 (21) 和式 (25) 代入式 (24), 则得:

$$\begin{aligned}D^\alpha V_1 \le &[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + F_2B_1\delta_2(t) - \\ &F_2B_1\boldsymbol{u}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}[M\boldsymbol{e}_1 + N\boldsymbol{s} + \\ &F_2B_1\delta_2(t) - F_2B_1\boldsymbol{u}] + 2\delta_3\|\boldsymbol{s}\| \le \\ &-2\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s}) = -2\|\boldsymbol{s}\|_1\end{aligned} \tag{26}$$

利用文献 [23] 的方法对上式两边求取分数 α 阶积分则得:

$$V_1 - V_1^{\alpha-1}(0)\frac{(t_r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \le -2D^{-\alpha}\|\boldsymbol{s}\|_1 \tag{27}$$

因为不等式 $\delta_4 \le D^{-\alpha}\|\boldsymbol{s}\|_1$ 成立[23], 并且有 $\boldsymbol{s}(t_r) = 0$, 则可以推导得到:

$$t_r \le \left[\frac{(\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{s}(0))^{\alpha-1}}{2\delta_4\Gamma(\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{28}$$

利用引理 1 的分数阶 Lyapunov 稳定性定理可知系统是稳定的, 并在有限时间内收敛到滑模面上. □

注 1. 从输出反馈滑模控制律 (21) 可以看出, 当 $\boldsymbol{s} = 0$ 时, 式 (21) 分母中的 $\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2$ 会使控制律发

生奇异现象, 为避免此现象的发生, 将 $\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2$ 修正为 $\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2+\varepsilon_1$, 控制律变成如下形式:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_1=\frac{B_1^{-1}F_2^{-1}\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2+\varepsilon_1}[\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}M\|\,w(t)+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{s}+ \|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}F_2B_1\|\,\delta_2(t)+\delta_3\,\|\boldsymbol{s}\|+\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})] \tag{29}$$

其中, ε_1 是一个很小的正数.

注 2. 当输入维数 m 和输出维数 p 相等时, 降低了系统结构分解矩阵的复杂程度, 本文方法同样适用.

2.3 自适应滑模控制律设计

在定理 1 中控制律设计中利用了假设条件 3 的常数 δ_1, 而由于非线性项 $f(\cdot)$ 的引入使得 δ_1 不易找到, 为解决此问题, 借鉴文献 [13] 的思想给出如下假设:

假设 4. 根据混沌吸引子的有界性, 假设

$$\|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_s)\|\le\delta_5 \tag{30}$$

其中, δ_5 是未知常数不能直接用于控制律设计中.

定理 2. 选取滑模面切换函数 (10), 选取自适应反馈滑模控制律

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{B_1^{-1}F_2^{-1}D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}}{\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|}[\|M\|\,w(t)+(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{s}+ \left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1\right\|\hat{\delta}_5+\eta] \tag{31}$$

其中, $\hat{\delta}_5$ 是未知参数 δ_5 的估计值, 并取自适应更新律为 $\dot{\hat{\delta}}_5=\zeta^{-1}\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1\right\|$, $M=F_2KC_2A_{11}-F_2KC_2A_{12}KC_2+F_2A_{21}-F_2A_{22}KC_2$, $N=F_2KC_2A_{12}F_2^{-1}+F_2A_{22}F_2^{-1}$ 是正实数, $\zeta\in\mathbf{R}^+$ 是正实数. 分数阶超混沌同步误差系统 (3), 在控制律 (31) 作用下, 闭环系统是渐近稳定的.

证明. 选取 Lyapunov 函数为

$$V_2=\frac{1}{2}(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}+\frac{1}{2}\zeta\tilde{\delta}_5^2 \tag{32}$$

其中, $\tilde{\delta}_5=\hat{\delta}_5-\delta_5$. 对式 (32) 进行求导可以得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2=\;&(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}D^{\alpha}\boldsymbol{s}+\zeta\tilde{\delta}_5\dot{\tilde{\delta}}_5=\\&(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}[M\boldsymbol{e}_1+F_2B_1(f(\boldsymbol{x}_m)-\\&f(\boldsymbol{x}_s))+N\boldsymbol{s}-F_2B_1\boldsymbol{u}]+\zeta\tilde{\delta}_5\dot{\hat{\delta}}_5=\\&(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{e}_1+(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{s}+\\&(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1(f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_s))-\\&(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1\boldsymbol{u}+\zeta\tilde{\delta}_5\dot{\hat{\delta}}_5\le\\&-\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1\right\|\tilde{\delta}_5+\zeta\tilde{\delta}_5\dot{\hat{\delta}}_5-\\&\eta\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|=-\eta\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|\le 0\end{aligned} \tag{33}$$

由 Lyapunov 稳定性定理可知, 闭环系统是渐近稳定的. 对式 (33) 进行积分可以得到:

$$\int_0^t\left\|D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}\right\|\mathrm{d}t\le\frac{V_2(0)-V_2(t)}{\eta} \tag{34}$$

又因为 $V_2(t)\ge 0$, 可以进一步得到:

$$\int_0^t\left\|D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}\right\|\mathrm{d}t\le\frac{V_2(0)}{\eta} \tag{35}$$

也就是, 当 $t\to\infty$ 时, $\lim_{t\to\infty}\int_0^t\|D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}\|\mathrm{d}t$ 存在并且有限, 利用 Barbalat 引理[13] 可以得到 $\lim_{t\to\infty}\|D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}\|=0$, 即 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{s}=0$. □

注 3. 从输出反馈滑模控制律 (31) 可以看出, 当 $\boldsymbol{s}=0$ 时, 式 (21) 分母中的 $\|\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\|^2$ 会使控制律发生奇异现象, 为避免此现象的发生, 将 $\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|$ 修正为 $\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|+\varepsilon_2$, 控制律变成如下形式:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_2=\frac{B_1^{-1}F_2^{-1}D^{\alpha-1}\boldsymbol{s}}{\left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\right\|+\varepsilon_2}[\|M\|\,w(t)+(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{s}+ \left\|(D^{\alpha-1}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}F_2B_1\right\|\hat{\delta}_5+\eta] \tag{36}$$

其中, ε_2 是一个很小的正数.

3 系统仿真研究

3.1 系统仿真参数设定

为了验证本文理论研究的正确性以及输出滑模控制律方法的有效性, 本节利用 MATLAB 数值仿真的形式进行验证[23−24]. 分数阶超混沌系统选取如下:

$$\begin{cases}D^{\alpha}x_{m1}=w(x_{m2}-x_{m1})+x_{m1}x_{m3}-x_{m1}x_{m2}\\D^{\alpha}x_{m2}=dx_{m1}-x_{m1}x_{m3}+cx_{m2}-x_{m4}\\D^{\alpha}x_{m3}=x_{m1}x_{m2}-bx_{m3}\\D^{\alpha}x_{m4}=x_{m1}+l\end{cases}.$$

其中, $\alpha = 0.98$, $w = 36$, $b = 3$, $c = 28$, $d = -16$, $l = 0.5$.

转换成形如式 (1) 和式 (2) 形式可得参数为

$$A = \begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 & 0 \\ -16 & 28 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{x}_s) = \begin{bmatrix} x_{m1}x_{m3} \\ x_{m1}x_{m2} \end{bmatrix}$$

系统状态的初始值为

$$\boldsymbol{x}_m = [5\ 4\ 3\ 6]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_s = [4\ 5\ 6\ 3]^{\mathrm{T}}$$

利用文献 [18] 的方法求取变换矩阵

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

代入到式 (9) 中, 得到:

$$A_c = \begin{bmatrix} -52 & 1 & -116 & 49 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 16 & -1 & 44 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -52 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} -116 & 49 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 44 & -16 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

选取 $P_{11} = P_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{12} = P_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

利用 YALMIP 优化工具箱求解得到增益矩阵 $K = \begin{bmatrix} 38.212 \\ 90.461 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -38.212 \\ 0 & 1 & -90.461 \end{bmatrix}$.

输出反馈滑模控制律其他参数选取为: $k = 4.2$, $\delta_1 = 2$, $\delta_3 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.001$.

自适应输出反馈滑模控制律 $\hat{\boldsymbol{u}}_2$ 的控制效果与控制律 $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 的控制效果相似, 由于篇幅的限制, 本文仅给出控制律 $\hat{\boldsymbol{u}}_1$ 作用下的仿真曲线.

3.2　仿真结果分析

利用第 3.1 节设定的仿真参数进行 MATLAB 仿真, 为了能够清晰看到各曲线的变化在 $t = 2\,\mathrm{s}$ 时施加控制律 (29), 得到如下仿真结果: 图 1 是分数阶超混沌系统, 图 2 是状态误差曲线, 图 3 是滑模切换函数曲线, 图 4 是控制律变化曲线, 图中的小图是部分时间段的局部放大图, 图 5 是辅助系统 $w(t)$ 和 $\|\boldsymbol{e}_1\|$, 图中的小图是部分时间段的局部放大图.

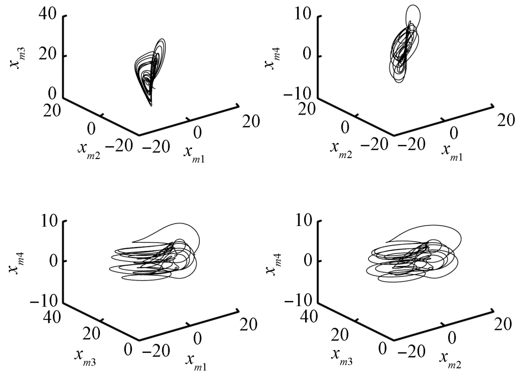

图 1　分数阶超混沌系统

Fig. 1　Fractional order hyperchaotic system

从图 2 状态误差变化曲线可以看出, 在前 2 s 内误差一直在变, 当 $t = 2\,\mathrm{s}$ 时, 施加控制之后, 在很短的时间内误差收敛到 0, 从而实现了响应系统与驱动系统的同步. 从图 3 可知, 输出反馈滑模面在控制律作用之后很短时间内收敛到 0. 从图 4 控制量曲线可知, 当 $t = 2\,\mathrm{s}$ 时, 控制律开始起作用时, 为了能够快速使误差趋向于 0, 控制律具有较大的值, 而当误差趋于 0 之后, 则需要一个较小的控制值, 具有较好的综合控制品质. 从图 5 辅助系统 $w(t)$ 和 $\|\boldsymbol{e}_1\|$ 的

变化曲线可知, 与理论推导结果一致, $\boldsymbol{e}_1$ 的范数始终受到 $\|\boldsymbol{e}_1\| \le w(t)$ 的约束.

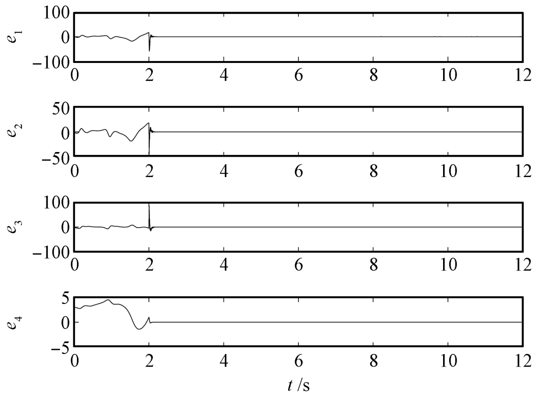

图 2 状态误差 $\boldsymbol{e} = [e_1\ e_2\ e_3\ e_4]^{\mathrm{T}}$

Fig. 2 The state error $\boldsymbol{e} = [e_1\ e_2\ e_3\ e_4]^{\mathrm{T}}$

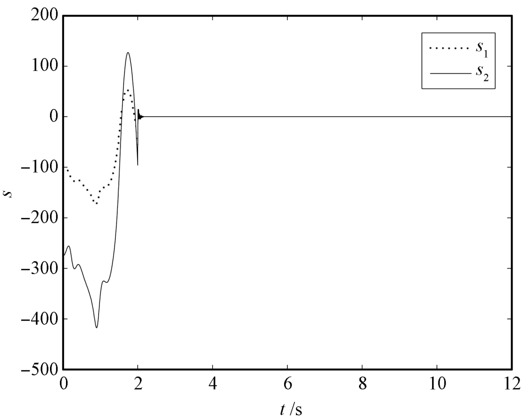

图 3 输出反馈滑模面

Fig. 3 The output feedback sliding surface

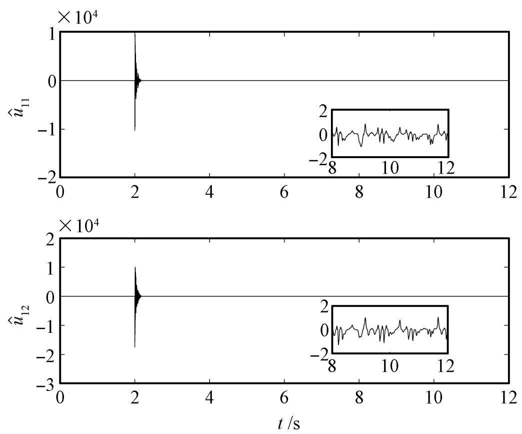

图 4 输出反馈滑模控制律

Fig. 4 The output feedback sliding mode control law

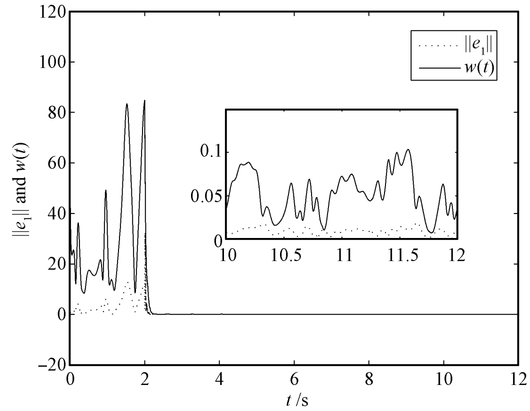

图 5 辅助系统 $w(t)$ 和 $\|\boldsymbol{e}_1\|$

Fig. 5 The auxiliary function $w(t)$ and $\|\boldsymbol{e}_1\|$

4 结论

本文针对具有更大秘钥空间的分数阶超混沌系统, 设计了具有实际工程应用意义的输出反馈滑模控制律. 通过设计具有特定结构的滑模面增益矩阵, 并利用 YALMIP 优化工具箱求取满足分数阶稳定性的增益矩阵, 实现滑模面系统的稳定性. 利用辅助分数阶微分系统实现对系统状态范数界的限制, 在此基础上设计了滑模控制律实现有限时间内收敛到滑模面. 进一步针对参数未知时, 设计了自适应滑模控制律. 本文方法具有通用性强, 广泛工程实际应用性好的特点, 可以进一步推广应用到其他分数阶超混沌系统, 从而为混沌控制与同步问题的研究提供新的途径. 研究具有不确定性和扰动的分数阶超混沌系统控制与同步问题是下一步研究工作的重点.

References

1 Lin T C, Lee T Y, Balas V E. Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2011, **44**(10): 791−801

2 Chen D Y, Zhang R F, ClintonSprott J, Ma X Y. Synchronization between integer-order chaotic systems and a class of fractional-order chaotic system based on fuzzy sliding mode control. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **70**(2): 1549−1561

3 Wang Z. Synchronization of an uncertain fractional-order chaotic system via backstepping sliding mode control. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, Article ID 732503, DOI: 10.1155/2013/732503

4 Wang D F, Zhang J Y, Wang X Y. Synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with disturbance based on a fractional terminal sliding mode controller. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(4): 04057, DOI: 10.1088/1674-1056/22/4/040507

5 Hu Jian-Bing, Xiao Jian, Zhao Ling-Dong. Synchronizing fractional chaotic systems with different orders. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(11): 181−184
(胡建兵, 肖建, 赵灵冬. 阶次不等的分数阶混沌系统同步. 物理学报, 2011, **60**(11): 181−184)

6 Huang Li-Lian, Qi Xue. The synchronization of fractional order chaotic systems with different orders based on adaptive sliding mode control. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(8): 61−67
(黄丽莲, 齐雪. 基于自适应滑模控制的不同维分数阶混沌系统的同步. 物理学报, 2013, **62**(8): 61−67)

7 Wu Y P, Wang G D. Synchronization between fractional-order and integer-order hyperchaotic systems via sliding mode controller. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, Article ID 151025, DOI: 10.1155/2013/151025

8 Aghababa M P. Finite-time chaos control and synchronization of fractional-order nonautonomous chaotic (hyperchaotic) systems using fractional nonsingular terminal sliding mode technique. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **69**(1-2): 247−261

9 Wang Z, Huang X, Lu J W. Sliding mode synchronization of chaotic and hyperchaotic systems with mismatched fractional derivatives. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2013, **35**(6): 713−719

10 Li Dong, Deng Liang-Ming, Du Yong-Xia, Yang Yuan-Yuan. Synchronization for fractional order haperhaotic Chen system and fractional order hyperchaotic Rössler system with different structure. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(5): 51−59
(李东, 邓良明, 杜永霞, 杨媛媛. 分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌 Rössler 系统的异结构同步. 物理学报, 2012, **61**(5): 51−59)

11 Zhao Ling-Dong, Hu Jian-Bing, Bao Zhi-Hua, Zhang Guo-An, Xu Chen, Zhang Shi-Bing. A finite-time stable theorem about fractional systems and finite-time synchronizing fractional super chaotic Lorenz systems. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(10): 93−97
(赵灵冬, 胡建兵, 包志华, 章国安, 徐晨, 张士兵. 分数阶系统有限时间稳定性理论及分数阶超混沌 Lorenz 系统有限时间同步. 物理学报, 2011, **60**(10): 93−97)

12 Hou Y Y, Liao T L, Yan J J. H_∞ synchronization of chaotic systems using output feedback control design. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, **379**(1): 81−89

13 Pai M C. Robust synchronization of chaotic systems using adaptive sliding mode output feedback control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, **226**(5): 598−605

14 He Chun, Ye Yong-Qiang, Jiang Bin, Zhou Xin. A novel edge detection method based on fractional-order calculus mask. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(5): 776−787
(何春, 叶永强, 姜斌, 周鑫. 一种基于分数阶次微积分模板的新型边缘检测方法. 自动化学报, 2012, **38**(5): 776−787)

15 Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Movement consensus of complex fractional-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 489−496
(杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性. 自动化学报, 2014, **40**(3): 489−496)

16 Lan Y H, He L J. Sliding mode and LMI based control for fractional order unified chaotic systems. In: Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China: IEEE Computer Society, 2012. 3192−3196

17 Yin C, Chen Y, Zhong S M. LMI based design of a sliding mode controller for a class of uncertain fractional-order nonlinear systems. In: Proceedings of the 1st American Control Conference. Washington D. C., United States: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2013. 6511−6516

18 Edwards C, Spurgeon S K. Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information. *International Journal of Control*, 1995, **62**(5): 1129−1144

19 Lofberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design. Taipei, China: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2004. 284−289

20 Kwan C M. On variable structure output feedback controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(11): 1691−1693

21 Koh B S. New Results in Stability, Control, and Estimation of Fractional Order Systems [Ph. D. dissertation], Texas A&M University, USA, 2011

22 Si-Ammour A, Djennoune S, Bettayeb M. A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(5): 2310−2318

23 Aghababa M P. Design of a chatter-free terminal sliding mode controller for nonlinear fractional-order dynamical systems. *International Journal of Control*, 2013, **62**(5): 1129−1144

24 Li Wen, Zhao Hui-Min. Rational function approximation for fractional order differential and integral operators. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 999−1005
(李文, 赵慧敏. 一种分数阶微积分算子的有理函数逼近方法. 自动化学报, 2011, **37**(8): 999−1005)

邓立为 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心博士研究生. 主要研究方向为分数阶系统, 航天器制导与控制. E-mail: dengliwei666@163.com
(**DENG Li-Wei** Ph. D. candidate at the Center of Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers fractional order system, spacecraft guidance and control.)

宋申民 哈尔滨工业大学航天学院教授. 1996 年获得哈尔滨工业大学博士学位. 主要研究方向为航天器制导与控制, 智能控制, 非线性控制与应用. 本文通信作者. E-mail: songshenmin@hit.edu.cn
(**SONG Shen-Min** Professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. He received his Ph. D. degree in control theory and application from Harbin Institute of Technology in 1996. His research interest covers spacecraft guidance and control, intelligent control, nonlinear theory and application. Corresponding author of this paper.)