

周期时变系统的鲁棒自适应重复控制

朱胜¹ 王雪洁¹ 刘玮¹

摘要 针对周期时变系统, 提出一种鲁棒自适应重复控制方法. 该方法利用周期学习律估计周期时变参数, 并结合鲁棒自适应方法处理非周期不确定性. 与现有重复控制不同的是, 在控制器设计中引入了新变量——周期数, 利用周期系统的重复特性, 使界的逼近误差随周期数的增加而逐渐减少, 保证了系统的全局渐近稳定性. 同时将该方法应用于一类非线性参数化系统, 使系统在非参数化扰动的情形下, 输出误差仍能收敛于 0, 倒立摆模型的仿真实验验证了此结果. 该设计方法适用于消除神经网络逼近误差对重复控制系统的影响, 理论证明了基于神经网络的鲁棒自适应重复控制系统中所有变量的有界性和输出误差的渐近收敛性, 关于机械臂模型的仿真结果验证了受控系统具有良好的跟踪性能.

关键词 周期时变系统, 周期数, 鲁棒自适应重复控制, 非线性参数化, 神经网络

引用格式 朱胜, 王雪洁, 刘玮. 周期时变系统的鲁棒自适应重复控制. 自动化学报, 2014, 40(11): 2391–2403

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.02391

Robust Adaptive Repetitive Control for Periodically Time-varying Systems

ZHU Sheng¹ WANG Xue-Jie¹ LIU Wei¹

Abstract In this paper, a robust adaptive repetitive control algorithm is presented for periodically time-varying systems. The periodically time-varying parameters are estimated by periodic learning algorithms, and the non-periodic uncertainties are treated by robust adaptive approaches. Different from the existing repetitive control, a new variable periodic number is introduced to the control design. When this number increases, the convergence error will gradually decrease due to the repetition character of the periodic system, so that the global asymptotic stability is ensured. Further, this method is applied to a class of nonlinearly parameterized systems with non-parametric disturbances, and the tracking error converges asymptotically. This result is verified by a simulation of an invert pendulum model. Moreover, it is proven that the proposed design method is appropriate for the elimination of influence of approximation error of neural network. A theoretical analysis shows that the system output is convergent to the desired one and all signals in the network based robust adaptive repetitive control system are bounded. The simulation result of robotic manipulators shows a good tracking performance of the controlled system.

Key words Periodically time-varying systems, periodic number, robust adaptive repetitive control, nonlinear parametrization, neural networks

Citation Zhu Sheng, Wang Xue-Jie, Liu Wei. Robust adaptive repetitive control for periodically time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2391–2403

周期运动现象在控制系统中十分普遍, 如硬盘、光盘驱动系统、电力电子行业中的脉宽调制逆变器及不间断电源系统、直线电机系统等. 这些系统的动态特性中往往含有周期时变系数, 本文将此类系统称为周期时变系统. 目前已有多种分析方法来处理周期时变系统. 文献 [1] 用 Hill 方程来描述具周期系数的微分方程, 并分析其稳定性, 文献 [2–3] 通过 Floquet-Lyapunov 变换, 将连续时间和离散时间

周期系统应用定常系统的稳定性理论, 分别转换为定常参数的微分方程和差分方程的形式, 文献 [4–5] 采用傅里叶级数对周期函数本身进行逼近, 傅里叶系数采用微分自适应律进行估计, 此种定常参数化方法也被用于周期系统的反推设计^[6]. 对于一些含周期干扰的系统, 文献 [7] 采用自适应前馈抵消技术消除以正弦函数表达的干扰信号, 这种方法被证明与重复控制是等价的, 文献 [8] 引入半周期积分算子和延迟算子解决了半周期对称干扰信号的估计问题, 文献 [9] 通过设计非线性控制器解决了一类线性系统的三角波干扰的完全抑制. 与上述 Floquet 理论和定常参数化等间接方法不同, 本文采用较为直接的重复控制方法, 即采用周期修正律对周期信号进行直接估计.

重复控制^[10] 是实现周期信号跟踪、周期干扰抑制以及周期参数逼近的精确控制技术. 经典的重复

收稿日期 2013-05-09 录用日期 2014-01-20
Manuscript received May 9, 2013; accepted January 20, 2014
浙江省自然科学基金 (LQ12F03005, LQ12F03011, LY12F03018)
资助

Supported by Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LQ12F03005, LQ12F03011, LY12F03018)

本文责任编辑 孙长银

Recommended by Associate Editor SUN Chang-Yin

1. 浙江大学城市学院信息与电气工程学院 杭州 310015

1. School of Information and Electrical Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015

控制理论要求系统内部包含同样周期信号的实现机制,即基于内模原理的分析与设计.随着现代控制理论的发展,基于 Lyapunov-like 方法的重复控制系统的分析理论^[11-16]逐渐增多,重复控制器的设计也由频域转向了更为直观的时域,不仅为设计人员提供了方便,也为结合其他先进控制技术提供了可能.文献[17]将重复控制和滑模控制相结合,在系统不确定性具有上界的条件下,设计变结构重复控制器,得到了系统的渐近稳定性;进一步地,当上界未知时,引入遗忘因子,设计自适应重复控制器,证明了系统各变量的一致有界性.文献[18]提出一种部分饱和学习算法,得到了系统的全局稳定性,并将该方法应用于机器人系统,实现了系统输出对期望轨迹的跟踪.文献[19]和文献[20]都对系统的不确定项进行了参数化处理,不同的是:前者属于线性参数化,而后者还进行了非线性参数化.参数化后的周期时变参数通过周期学习律进行估计.文献[21]针对机械臂系统,提出一种自适应重复学习算法,该方法结合了重复控制和迭代学习控制的优点.文献[22]拓宽了鲁棒方法关于非参数化不确定项小于特定界的假设,在重复控制律中添加投影和阻尼两种鲁棒修正法,分别得到渐近稳定性和一致有界性的结果.

综上所述,重复控制可有效处理周期时变系数,而对于周期系统中含有的非周期不确定性,还需结合其他控制方法,如自适应控制处理可参数化不确定性.文献[23]针对线性参数化系统,设计鲁棒自适应控制器.文献[24]则针对非线性参数化系统设计自适应鲁棒控制器,得到系统的一致有界性.鲁棒自适应控制在20世纪80年代是研究的热点,该方法主要针对存在有界干扰的系统,在参数自适应律中加入修正项,以避免系统发散.这种简单、灵巧的处理方式促进了该方法的普遍应用.现有的修正法包括死区修正^[25]、投影算法、 σ 修正^[26]、开关 σ 修正^[27]和 ϵ 修正^[28]等.鲁棒自适应控制方法的另一种形式是在控制律中加入对干扰的界补偿项,在系统干扰界未知情形下,增加界的自适应估计律,保证系统稳定^[29],但由于控制器中加入了符号函数,系统出现颤振现象.文献[23]使用双曲函数替代符号函数,避免了颤振,但只能得到系统变量的有界性.本文针对周期时变系统,提出一种鲁棒自适应重复控制方法,该方法利用周期学习律直接估计周期时变参数,并结合鲁棒自适应方法处理非周期不确定性,在控制器设计中,使用双曲函数替代符号函数,以避免颤振.与文献[23]不同的是,在双曲函数中引入级数收敛序列,该序列的分母为周期数的乘方,与现有重复控制不同的是,在控制器设计中使用了周期数,使得界的逼近误差随着周期数的增加而逐渐减少,从理论上得到系统的全局渐近稳定性.进一步

地,将该方法应用于一类非线性参数化系统,使系统在非参数化扰动情形下,输出误差仍然收敛于0.最后,将该方法用于消除神经网络逼近误差对重复控制系统的影响,证明了系统所有变量的有界性和输出误差的渐近收敛性.仿真实例采用倒立摆模型和机械臂模型,验证了该方法能有效处理周期时变系统,使系统具有良好的跟踪性能.

1 问题提出

首先,给出一种自适应界估计方法,考虑常规一阶非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \theta^* \xi(x) + \eta(x, t) \quad (1)$$

其中, $x \in \mathbf{R}$ 是系统状态; $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\xi(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是已知的光滑函数,且 $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbf{R}$; θ^* 是未知常参数; $\eta(x, t)$ 是未知光滑函数.假设标称系统:

$$\dot{x}_N = f_N(x_N, u, \theta) \equiv f(x_N) + g(x_N)u + \theta^* \xi(x_N) \quad (2)$$

在原点处有孤立的平衡点,且不受 θ^* 的影响,即 $f(0) = \xi(0) = 0$.

系统(1)同时具有参数化不确定性 $\theta^* \xi(x)$ 和非参数化不确定性 $\eta(x, t)$, 此类不确定性可能由多种因素引起,如量测噪声、模型误差、外部扰动等.假设:

$$|\eta(x, t)| \leq \alpha^* \rho(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}^+ \quad (3)$$

其中, $\rho: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是已知光滑函数, $\alpha^* \geq 0$ 是未知常参数. α^* 不是唯一的,因为任何大于 α^* 的常数都满足式(3),为分析方便,假定 α^* 对于式(3)是最小的常数.

对于此类全局鲁棒稳定性问题,设计反馈控制律,使系统在原点处是全局渐近稳定的,如控制律:

$$u = -\frac{1}{g(x)} [k_1 x + f(x) + \theta \xi(x) + \hat{\eta}(x, \alpha)] \quad (4)$$

其中, $k_1 > 0$ 是设计参数, $\theta(t)$ 和 $\alpha(t)$ 是未知常参数 θ^* 和 α^* 的估计, $\hat{\eta}(x, \alpha)$ 是不确定性 $\eta(x, t)$ 的估计.传统自适应控制方法^[30]给出如下的设计:

$$\hat{\eta}(x, \alpha) = \alpha \rho(x) \operatorname{sgn}(x) \quad (5)$$

$$\dot{\theta}(t) = \gamma_1 x \xi(x), \quad \gamma_1 > 0 \quad (6)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \gamma_2 |x| \rho(x), \quad \gamma_2 > 0 \quad (7)$$

此类控制器的缺陷有:1)式(5)中的符号函数会给系统带来颤振;2)由于实际运行时,系统的稳态误差不可能精确为0,式(7)等号右边项恒大于0,则

α 会一直累加而越来越大; 3) 函数 $\hat{\eta}(x, \alpha)$ 是不连续的, 无法求导, 不适用于严格反馈非线性系统的反推设计. 鉴于此, 文献 [23] 给出了一种光滑的界估计方法, 设计如下:

$$\hat{\eta}(x, \alpha) = \alpha\omega(x) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}(t) = \gamma_1[x\xi(x) - \sigma_1(\theta - \theta^0)] \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \gamma_2[x\omega(x) - \sigma_2(\alpha - \alpha^0)] \quad (10)$$

$$\omega(x) = \rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\epsilon}\right) \quad (11)$$

其中, $\sigma_1, \sigma_2, \epsilon > 0, \theta^0, \alpha^0 \geq 0$ 是设计参数. 该方法融入了鲁棒自适应控制里的 σ 修正法^[24], 因此 α 不会一直累加, 参数估计的有界性得到保证. 式中双曲函数替代符号函数, 保证了控制器的连续性, 适合反推设计, 同时也能避免颤振.

上述设计方法适合系统 (1) 中的被估参数 θ^* 是常数的情形; 如果 θ^* 是时变的, 记作 $\theta(t)$, 自适应律 (9) 便不再适用. 当然, 同样可采取界估计方法处理该参数, 但如果我们再假设 $\theta(t)$ 是周期的, 新的系统模型如下:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \theta(t)\xi(x) + \eta(x, t) \quad (12)$$

其中, $\theta(t) = \theta(t - T), T > 0$. 此时, 再用界估计法处理时变参数 $\theta(t)$, 则显得过于保守. 鉴于重复控制能有效处理周期时变参数, 我们采用周期学习律估计 $\theta(t)$, 并在界的处理中引入新变量——周期数 $j = [t/T], [\cdot]$ 表示取整, 以确保重复控制高精度的控制性能. 为后面控制器设计和收敛性分析的需要, 先给出两个定义和一个引理.

定义 1. 级数收敛序列:

$$\epsilon^j = \frac{q}{j^l} \quad (13)$$

其中, $j = 1, 2, 3, \dots, q$ 和 l 是给定常参数, 要求 $q \geq 0 \in \mathbf{R}, l \geq 2 \in \mathbf{N}$. 显然, 序列 ϵ^j 具有以下两条性质:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon^j = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^j \epsilon^i < \infty \quad (15)$$

定义 2. 对于标量 a , 限幅函数 $\text{sat}_{\bar{a}}(\cdot)$ 定义为

$$\text{sat}_{\bar{a}}(a) = \begin{cases} \bar{a}^1, & a < \bar{a}^1 \\ a, & \bar{a}^1 \leq a \leq \bar{a}^2 \\ \bar{a}^2, & a > \bar{a}^2 \end{cases} \quad (16)$$

其中, \bar{a}^1 和 \bar{a}^2 分别是上下限幅值.

引理 1. 对标量 a_1, a_2 , 如果 $a_1 = \text{sat}_{\bar{a}}(a_1)$, a_1 和 a_2 的限幅值一样, 则:

$$(a_1 - \text{sat}_{\bar{a}}(a_2))^2 \leq (a_1 - a_2)^2 \quad (17)$$

$$(a_1 - \text{sat}_{\bar{a}}(a_2))(a_2 - \text{sat}_{\bar{a}}(a_2)) \leq 0 \quad (18)$$

文献 [23] 的控制器设计虽然避免了符号函数带来的缺陷, 但也牺牲了系统的渐近稳定性; 文献 [31] 在控制器的设计中使用反正切函数, 但也只能做到有界收敛. 控制目标是寻找合适的控制器, 使系统 (12) 是全局渐近稳定的.

2 控制器设计及稳定性分析

针对系统 (12), 设计反馈控制器:

$$u = -\frac{1}{g(x)} \left(k_2 x + f(x) + \hat{\theta}\xi(x) + \hat{\alpha}\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\epsilon^j}\right) \right) \quad (19)$$

界的自适应估计器:

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_3 \epsilon^j \hat{\alpha} + \gamma_3 x \rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\epsilon^j}\right) \quad (20)$$

1) 部分限幅学习律:

$$\hat{\theta}(t) = \begin{cases} \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}(t - T)) + \gamma_4 x \xi(x), & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases} \quad (21)$$

2) 全限幅学习律:

$$\hat{\theta}^*(t) = \begin{cases} \hat{\theta}(t - T) + \gamma_4 x \xi(x), & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases} \quad (22)$$

$$\hat{\theta}(t) = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}^*(t))$$

其中, $k_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ 是设计参数, $\hat{\theta}(t)$ 是 $\theta(t)$ 的估计. $\hat{\alpha}(t)$ 是 α^* 的估计. ϵ^j 由定义 1 给出, $\text{sat}_{\bar{\theta}}(\cdot)$ 由定义 2 给出. 给定 $\text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}(t))$ 的上下限幅值分别是 $\bar{\theta}^1$ 和 $\bar{\theta}^2$, 这里假设 $\bar{\theta}^1 < \theta(t) < \bar{\theta}^2$.

注 1. 上述控制器中的 ϵ^j 的作用是: 1) 使误差随周期数的增加而递减; 2) 式 (20) 等号右边第一项使界的估计值不至于过大, 类似于 σ 修正的作用, 故本文方法保证了系统的全局渐近稳定性. 但由于性质式 (14), 当周期数趋于无穷时, $\tanh(\cdot)$ 会趋于符号函数, 因此在无穷远处会出现颤振; 但在实际运行时, 时间不可能趋于无穷, 只要适当调整参数 q 和 l , 即可避免颤振.

注 2. 文献 [20] 已证明采用部分限幅学习律和全限幅学习律均能使系统稳定, 这里的周期学习律 (21) 和 (22) 可保证参数估计有界, 进而保证系统的稳定性.

定理 1. 系统 (12) 中 $\eta(x, t)$ 满足式 (3), 在反馈控制律 (19) 和参数自适应律 (20) 的作用下, 分别采用部分限幅学习律 (21) 或全限幅学习律 (22), 均能保证系统全局渐近稳定.

证明. 将控制器 (19) 代入系统 (1), 得

$$\dot{x} = -k_2x + \tilde{\theta}(t)\xi(x) - \hat{\alpha}\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right) + \eta(x, t) \quad (23)$$

其中, $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$. 定义 Lyapunov-like 函数:

$$V(t) = V_1 + V_2 + V_3 \quad (24)$$

其中

$$V_1 = \frac{1}{2}x^2 \quad (25)$$

$$V_2 = \frac{1}{2\gamma_3}\tilde{\alpha}^2 \quad (26)$$

$$V_3 = \frac{1}{2\gamma_4} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}^2 d\tau \quad (27)$$

其中, $\tilde{\alpha}(t) = \alpha^* - \hat{\alpha}(t)$, 对 V_1 求导, 并将式 (23) 代入, 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & x\left(-k_2x + \tilde{\theta}(t)\xi(x) - \hat{\alpha}\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right) + \eta(x, t)\right) \\ = & -k_2x^2 + \tilde{\theta}(t)\xi(x)x - \hat{\alpha}x\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right) + x\eta(x, t) \end{aligned} \quad (28)$$

对 V_2 求导, 并将式 (20) 代入, 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \frac{1}{\gamma_3}\tilde{\alpha}\left(\gamma_3\varepsilon^j\dot{\hat{\alpha}} - \gamma_3x\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right)\right) = \\ & \tilde{\alpha}\varepsilon^j\dot{\hat{\alpha}} - \tilde{\alpha}x\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

对 V_3 求差分, 并将式 (21) 代入, 应用引理 1, 得:

$$\begin{aligned} \Delta V_3 = & \frac{1}{2\gamma_4} \int_{t-T}^t (\tilde{\theta}^2(\tau) - \tilde{\theta}^2(\tau - T))d\tau \leq \\ & \int_{t-T}^t -x\xi(x)\tilde{\theta}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

对 V_3 求差分, 并将式 (22) 代入, 应用引理 1, 得:

$$\begin{aligned} \Delta V_3 = & \frac{1}{2\gamma_4} \int_{t-T}^t (\tilde{\theta}^2(\tau) - \tilde{\theta}^2(\tau - T))d\tau \leq \\ & \frac{1}{\gamma_4} \int_{t-T}^t (\hat{\theta}(\tau - T) - \hat{\theta}(\tau))\tilde{\theta}(\tau)d\tau \leq \\ & \frac{1}{\gamma_4} \int_{t-T}^t (\hat{\theta}^* - \text{sat}_{\hat{\theta}}(\theta^*))(\theta - \text{sat}_{\hat{\theta}}(\theta^*))d\tau - \\ & \int_{t-T}^t x\xi(x)\tilde{\theta}d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

因此, 采用部分限幅学习律 (21) 或全限幅学习律 (22) 均能得到相同的结果, 即:

$$\Delta V_3 = V_3(t) - V_3(t - T) \leq \int_{t-T}^t -x\xi(x)\tilde{\theta}(\tau)d\tau \quad (32)$$

对式 (24) 求差分, 并将式 (28)、式 (29) 和式 (32) 代入, 得:

$$\begin{aligned} \Delta V(t) = & V(t) - V(t - T) = \\ & \int_{t-T}^t (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)d\tau + \Delta V_3(t) \leq \\ & \int_{t-T}^t \left(-k_2x^2 - \alpha^*x\rho(x) \tanh\left(\frac{x\rho(x)}{\varepsilon^j}\right) + \tilde{\alpha}\varepsilon^j\dot{\hat{\alpha}} + \alpha^*|x|\rho(x)\right) d\tau \leq \\ & \int_{t-T}^t \left(-k_2x^2 + \left(\alpha^*\delta + \frac{1}{4}\alpha^{*2}\right)\varepsilon^j\right) d\tau \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\delta > 0$ 是常数, 满足 $\delta = e^{-(\delta+1)^{[23]}}$. 对任意 $t \in [iT, (i+1)T], i \in \mathbf{Z}^+, t_0 \in [0, T]$, 有:

$$V(t) = V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t - jT) \quad (34)$$

将式 (33) 代入上式, 得:

$$\begin{aligned} V(t) = & V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t - jT) = \\ & V(t_0) - k_2 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} x^2 d\tau + \\ & \left(\alpha^*\delta + \frac{1}{4}\alpha^{*2}\right)T \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i-j} \end{aligned} \quad (35)$$

需要证明 $V(t_0)$ 的有界性. $\forall t \in [0, T]$, 对 $V(t)$ 求导, 并将式 (28)、式 (29)、式 (32) 代入, 得:

$$\dot{V}(t) \leq -k_2 x^2 + \left(\alpha^* \delta + \frac{1}{4} \alpha^{*2} \right) \varepsilon \quad (36)$$

在区间 $[0, t_0]$ 上对上式两边取积分, 得:

$$V(t_0) \leq V'(0) - k_2 \int_0^{t_0} x^2 d\tau \quad (37)$$

其中, $V'(0) = V(0) + t_0(\alpha^* \delta + (1/4)\alpha^{*2})\varepsilon$. 因为 $V(0)$ 有界, $t_0 \in [0, T]$, 所以 $V'(0)$ 有界, 又因为 $V(t_0) - V'(0) \leq -k_2 \int_0^{t_0} x^2 d\tau \leq 0$, 所以有 $0 < V(t_0) \leq V'(t)$, 即 $V(t_0)$ 有界. 对式 (35) 两边取极限, 得:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) &\leq \max_{t_0 \in [0, T]} V(t_0) + \\ &(\alpha^* \delta + \frac{1}{4} \alpha^{*2}) T \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i-j} - \\ &k_2 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} x^2 d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

因为 $-k_2 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} x^2 d\tau \leq 0$, $V(t_0)$ 有界, 而 $V(t) > 0$, 结合式 (15) 可知 $V(t)$ 有界, 即 $x(t)$ 和 $\hat{\alpha}(t)$ 有界, $\hat{\theta}(t)$ 积分有界. 进一步地, 在式 (21) 或式 (22) 的限幅作用下, $\hat{\theta}(t)$ 有界, 根据式 (19), 控制器 $u(t)$ 有界, 至此, 闭环系统内所有信号有界. 进而根据式 (23) 可知 \dot{x} 有界, 所以 x 一致连续. 由式 (38) 得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t x^2 d\tau = 0 \quad (39)$$

因为 $x(t)$ 一致连续, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$. \square

3 一类非线性参数化系统

上述控制器设计方法不仅适用于线性参数化系统 (12), 同样也适用于非线性参数化系统, 考虑一类 n 阶非线性参数化系统^[20]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= \frac{1}{\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta)} (f(\mathbf{X}, \varphi_f) + g(\mathbf{X}, \theta(t)) + u + \\ &\quad \eta(\mathbf{X}, t)) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (40)$$

其中, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $u \in \mathbf{R}$ 是系统输入, $y \in \mathbf{R}$ 是系统输出, $\varphi_f \in \mathbf{R}^{n_f}$ 和 $\varphi_\beta \in \mathbf{R}^{n_\beta}$ 是未知常参数向量,

$\theta(t) \in \mathbf{R}^{n_\theta}$ 是未知时变函数, $\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta)$, $f(\mathbf{X}, \varphi_f)$ 和 $g(\mathbf{X}, \theta(t))$ 是具有未知参数的非线性函数. 定义 $\mathbf{X}_d(t) = [y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d^{(n-1)}(t)]^T$, 其中理想轨迹 $y_d(t)$ 具有 n 阶有界导数.

假设 1. $\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta)$ 的符号已知, 存在常数 β_{\min} 和有界函数 $\bar{\beta}(\mathbf{X}) > 0$ 使得 $0 < \beta_{\min} \leq |\beta(\mathbf{X}, \theta_\beta)| \leq \bar{\beta}(\mathbf{X}) < \infty, \forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n, \theta_\beta \in \mathbf{R}^{n_\beta}$.

假设 2. $\theta(t)$ 是连续的时变函数, 且满足 $\theta(t) = \theta(t - T)$, T 是已知常数.

假设 3. 非线性函数 $\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta)$, $f(\mathbf{X}, \varphi_f)$ 和 $g(\mathbf{X}, \theta)$ 满足

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta) &= \varphi_\beta^T \omega_\beta(\mathbf{X}) + \beta_0(\mathbf{X}) \\ f(\mathbf{X}, \varphi_f) &= \varphi_f^T \omega_f(\mathbf{X}) + f_0(\mathbf{X}) \\ g(\mathbf{X}, \theta(t)) &= \theta^T(t) \mathbf{v}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (41)$$

其中, $\omega_f(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}^{n_f}$, $\mathbf{v}(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}^{n_\theta}$, $f_0(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}$ 是已知连续函数, $\omega_\beta(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}^{n_\beta}$ 和 $\beta_0(\mathbf{X}) \in \mathbf{R}$ 是已知的连续可微函数.

假设 4. 非参数化扰动 $|\eta(\mathbf{X}, t)| \leq \alpha \rho(\mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}^+$. 其中 α 是未知常参数, $\rho(\mathbf{X})$ 是已知函数.

注 3. 假设 1 避免系统出现奇异性, 假设 2 保证 $\theta(t)$ 是有界的, 假设 3 对非线性函数进行了参数化, 假设 4 要求非参数化扰动具有上界函数, 比具有上界的假设^[18, 29] 要宽松, 均要求非参数化扰动具有上界函数, 比扰动具有上界的假设^[18, 29] 要宽松.

由于 $\theta(t)$ 是向量, 将定义 2 拓展成向量形式, 即对向量 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m$, 有 $\text{sat}_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathbf{a}) = [\text{sat}_{\bar{a}_1}(a_1), \text{sat}_{\bar{a}_2}(a_2), \dots, \text{sat}_{\bar{a}_m}(a_m)]^T$, 其中 $\bar{\mathbf{a}} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m\}$. 将引理 1 拓展成向量形式^[16], 重写如下:

引理 2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, 如果 \mathbf{a} 满足 $\bar{b}_i^1 \leq a_i \leq \bar{b}_i^2, i = 1, 2, \dots, m$, 那么

$$[(\gamma + 1)\mathbf{a} - (\gamma\mathbf{b} + \text{sat}_{\bar{\mathbf{b}}}(\mathbf{b}))]^T \Lambda [\mathbf{b} - \text{sat}_{\bar{\mathbf{b}}}(\mathbf{b})] \leq 0 \quad (42)$$

证明过程详见文献 [20].

定义 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T = \mathbf{X} - \mathbf{X}_d$ 为实现系统输出对理想轨迹的跟踪, 定义滤波误差 $e_f = [\mathbf{c}^T \mathbf{1}] \mathbf{e}$, 其中 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]^T$ 使得 $s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + \dots + c_1$ 是 Hurwitz 多项式. 定义 $\nu_1 = y_d^{n-1} - [\mathbf{c}^T, 0] \mathbf{e}$ 和 $\nu = -y_d^n + [0, \mathbf{c}^T] \mathbf{e}$, 因此有 $\dot{\nu}_1 = -\nu$, 对 e_f 求导, 得:

$$\begin{aligned} \dot{e}_f &= \frac{1}{\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta)} (f(\mathbf{X}, \varphi_f) + g(\mathbf{X}, \theta(t)) + u + \\ &\quad \eta(\mathbf{X}, t)) + \nu \end{aligned} \quad (43)$$

设计控制器如下:

$$u = -k_3 e_f - \hat{\varphi}^T \omega(\mathbf{z}) - h(\mathbf{z}) - \hat{\theta}^T(t) \mathbf{v}(\mathbf{X}) - \hat{\alpha} \rho(\mathbf{X}) \tanh\left(\frac{e_f \rho(\mathbf{X})}{\varepsilon^j}\right) \quad (44)$$

其中, $k_3 > 0$ 是正常数, $\mathbf{z} = [\mathbf{X}^T, \mathbf{X}_d^T, \mathbf{y}_d^{(n)}]^T$,

$$\omega(\mathbf{z}) = \left[\omega_f, \frac{1}{e_f} \int_0^{e_f} \left(\sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_\beta^T}{\partial x_i} x_{i+1} + \nu \omega_\beta \right) d\sigma \right]$$

$$h(\mathbf{z}) = f_0 + \frac{1}{e_f} \int_0^{e_f} \left(\sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \beta_0}{\partial x_i} x_{i+1} + \nu \beta_0 \right) d\sigma$$

$\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\varphi} = [\hat{\varphi}_\beta^T, \hat{\varphi}_f^T]^T$ 分别为 α 和 $\varphi = [\varphi_\beta^T, \varphi_f^T]^T$ 的估计, 给出 α 和 φ 的自适应律:

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_5 \varepsilon^j \hat{\alpha} + \gamma_5 e_f \rho(x) \tanh\left(\frac{e_f \rho(x)}{\varepsilon^j}\right) \quad (45)$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = \Phi \omega(\mathbf{z}) e_f \quad (46)$$

其中, $\gamma_5 > 0$, 对角阵 $\Phi > 0$. $\hat{\theta}(t)$ 是参数 $\theta(t)$ 的估计, 其学习律同样采用部分限幅和全限幅形式:

1) 部分限幅学习律:

$$\hat{\theta}(t) = \begin{cases} \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}(t-T)) + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{X}) e_f, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases} \quad (47)$$

2) 全限幅学习律:

$$\hat{\theta}^*(t) = \begin{cases} \hat{\theta}(t-T) + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{X}) e_f, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases}$$

$$\hat{\theta}(t) = \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}^*(t)) \quad (48)$$

其中, 对角阵 $\Gamma > 0$, $\bar{\theta}$ 表示 $\hat{\theta}(t)$ 的上下限幅, 假设 $\theta(t)$ 也在 $\bar{\theta}$ 内.

定理 2. 系统 (40) 满足假设 1~4, 在控制器 (44) 和参数自适应律 (45)、(46) 的作用下, 分别采用部分限幅学习律 (47) 或全限幅学习律 (48), 均能保证系统输出误差渐近收敛于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证明. 选择 Lyapunov-like 函数: $V(t) = V_f(t) + V_\alpha(t) + V_\varphi(t) + V_\theta(t)$, 其中:

$$V_f = \frac{1}{2} \int_0^{e_f} \beta(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1, \theta_\beta) d\sigma^2$$

$$V_\alpha = \frac{1}{2\gamma_5} \tilde{\alpha}^2, \tilde{\alpha} = \alpha - \hat{\alpha}$$

$$V_\varphi = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}^T(\tau) \Phi^{-1} \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$$

$$V_\theta = \frac{1}{2} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}^T(\tau) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(\tau) d\tau, \tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$$

对 $V_f(t)$ 求导, 得:

$$\dot{V}_f = \beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta) e_f \dot{e}_f + \int_0^{e_f} \sigma \left(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} + \frac{\partial \beta}{\partial \nu_1} \dot{\nu}_1 \right) d\sigma \quad (49)$$

将式 (43) 代入上式等号右边第 1 项, 有:

$$\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta) e_f \dot{e}_f = e_f (f + g + u + \eta) + b e_f \nu \quad (50)$$

根据假设 3, 式 (49) 等号右边第 2 项和第 3 项分别为:

$$\int_0^{e_f} \sigma \frac{\partial \beta}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} d\sigma = \int_0^{e_f} \left(\sigma \frac{\partial \theta_\beta^T \omega_\beta(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} + \sigma \frac{\partial \beta_0(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} \right) d\sigma \quad (51)$$

和

$$\int_0^{e_f} \sigma \frac{\partial \beta}{\partial \nu_1} \dot{\nu}_1 d\sigma = -\beta e_f \nu + \nu \int_0^{e_f} (\theta_\beta^T \omega_\beta + \beta_0) d\sigma \quad (52)$$

其中, $\bar{x}_{n-1} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$, 将式 (50)~(52) 和控制器 (44) 代入式 (49), 得:

$$\dot{V}_f = e_f [\varphi^T \omega(\mathbf{z}) + \theta^T(t) \mathbf{v}(\mathbf{X}) + h(\mathbf{z}) + u + \eta(\mathbf{X}, t)] = e_f \left[\tilde{\varphi}^T \omega(\mathbf{z}) + \tilde{\theta}^T(t) \mathbf{v}(\mathbf{X}) - k_3 e_f + \eta(\mathbf{X}, t) - \hat{\alpha} \rho(\mathbf{X}) \tanh\left(\frac{e_f \rho(\mathbf{X})}{\varepsilon^j}\right) \right] \quad (53)$$

对 $V_\alpha(t)$ 求导, 并将自适应律 (45) 代入, 化简得:

$$\dot{V}_\alpha = -\varepsilon^j \left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2} \alpha \right)^2 - \alpha e_f \rho(\mathbf{X}) \tanh\left(\frac{e_f \rho(\mathbf{X})}{\varepsilon^j}\right) + \frac{1}{4} \varepsilon^j \alpha^2 + \hat{\alpha} e_f \rho(\mathbf{X}) \tanh\left(\frac{e_f \rho(\mathbf{X})}{\varepsilon^j}\right) \quad (54)$$

对 $V_\varphi(t)$ 求导, 并将自适应律 (46) 代入, 化简得:

$$\dot{V}_\varphi = -\tilde{\varphi}^T \omega(\mathbf{z}) e_f \quad (55)$$

对 V_θ 求差分, 分别将部分限幅学习律或全限幅学习

律代入, 并应用引理 2, 化简得:

$$\begin{aligned} \Delta V_\theta &= V_\theta(t) - V_\theta(t - T) \leq \\ & - \int_{t-T}^t e_f \mathbf{v}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} d\tau - \frac{1}{2} \int_{t-T}^t e_f^2 \mathbf{v}^T \Gamma \mathbf{v} d\tau \end{aligned} \quad (56)$$

或

$$\begin{aligned} \Delta V_\theta &= V_\theta(t) - V_\theta(t - T) \leq \\ & - \int_{t-T}^t e_f \mathbf{v}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} d\tau - \frac{1}{2} \int_{t-T}^t (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau) - \\ & \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau - T))^T \Gamma^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau - T)) d\tau \end{aligned} \quad (57)$$

因此, 有:

$$\Delta V_\theta \leq - \int_{t-T}^t e_f \mathbf{v}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} d\tau \quad (58)$$

对 $V(t)$ 求差分, 并将式 (53) ~ (55) 和式 (58) 代入上式, 有:

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= V(t) - V(t - T) = \\ & \int_{t-T}^t (\dot{V}_f + \dot{V}_\alpha + \dot{V}_\varphi) d\tau + \Delta V_\theta(t) \leq \\ & \int_{t-T}^t \left((e_f \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{v} - k_3 e_f^2 + e_f \eta) + \frac{1}{4} \varepsilon^j \alpha^2 - \right. \\ & \left. \varepsilon^j \left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2} \alpha \right)^2 - \alpha e_f \rho \tanh \left(\frac{e_f \rho}{\varepsilon^j} \right) \right) d\tau - \\ & \int_{t-T}^t e_f \mathbf{v}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} d\tau \leq \int_{t-T}^t \left(-k_3 e_f^2 + e_f \eta + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \varepsilon^j \alpha^2 - \alpha e_f \rho \tanh \left(\frac{e_f \rho}{\varepsilon^j} \right) \right) d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

根据假设 4, $|\eta(X, t)| \leq \alpha \rho(X)$ 代入上式, 得:

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &\leq \int_{t-T}^t \left(-k_3 e_f^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^j \alpha^2 + \right. \\ & \left. |e_f| \alpha \rho - \alpha e_f \rho \tanh \left(\frac{e_f \rho}{\varepsilon^j} \right) \right) d\tau \leq \\ & \int_{t-T}^t -k_3 e_f^2 d\tau + \left(\frac{1}{4} \alpha^2 + \alpha \delta \right) \varepsilon^j T \end{aligned} \quad (60)$$

其中, $\delta > 0$ 是常数, 满足 $\delta = e^{-(\delta+1)}$. 由此, 得到了类似式 (33) 的结果, $\forall t \in [iT, (i+1)T], i \in \mathbf{Z}^+, t_0 \in [0, T]$, 有:

$$V(t) = V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t - jT) \quad (61)$$

将式 (60) 代入上式, 得:

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t - jT) = \\ & V(t_0) - k_3 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau + \\ & (\alpha \delta + \frac{1}{4} \alpha^2) T \sum_{j=0}^{i-1} \Delta^{i-j} \end{aligned} \quad (62)$$

同样需要证明 $V(t_0)$ 的有界性. $\forall t \in [0, T]$, 对 $V(t)$ 求导, 并将式 (53) ~ (55) 和式 (58)) 代入上式, 得:

$$\dot{V}(t) \leq -k_3 e_f^2 + \left(\alpha \delta + \frac{1}{4} \alpha^2 \right) \Delta \quad (63)$$

在区间 $[0, t_0]$ 上对上式两边取积分, 得

$$V(t_0) \leq V'(0) - k_3 \int_0^{t_0} e_f^2 d\tau \quad (64)$$

其中, $V'(0) = V(0) + t_0(\alpha \delta + (1/4)\alpha^2)\Delta$. 因为 $V(0)$ 有界, $t_0 \in [0, T]$, 所以 $V'(0)$ 有界; 又因为 $V(t_0) - V'(0) \leq -k_3 \int_0^{t_0} e_f^2 d\tau \leq 0$, 所以有 $0 < V(t_0) \leq V'(t)$, 即 $V(t_0)$ 有界. 对式 (62) 两边取极限, 得:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) &\leq \max_{t_0 \in [0, T]} V(t_0) + \\ & \left(\alpha \delta + \frac{1}{4} \alpha^2 \right) T \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i-j} - \\ & k_3 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau \end{aligned} \quad (65)$$

因为 $-k_3 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau \leq 0$, $V(t_0)$ 有界, 而 $V(t) > 0$, 结合式 (15) 可知 $V(t)$ 有界, 即 $e_f(t)$ 、 $\hat{\alpha}(t)$ 、 $\hat{\varphi}(t)$ 有界, $\hat{\theta}(t)$ 积分有界; 进一步地, 在 (47) 或式 (48) 的限幅作用下, $\hat{\theta}(t)$ 有界, 根据式 (44) 控制器 $u(t)$ 有界, 则闭环系统内所有信号有界. 进而根据式 (43) 可知 \dot{e}_f 有界, 所以 e_f 一致连续. 由式 (65) 得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t e_f^2 d\tau = 0 \quad (66)$$

因为 $e_f(t)$ 一致连续, 所以有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_f(t)| = 0$. 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. \square

与文献 [20] 相比, 系统多了非参数化扰动, 利用鲁棒自适应方法予以消除.

4 神经网络自适应鲁棒重复控制

系统 (12) 中的非线性项 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是已知的, 而系统 (40) 中的非线性项 $f(\mathbf{X}, \varphi_f)$ 和 $g(\mathbf{X}, \theta(t))$ 是可参数化的. 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知且不可参数化时, 利用基于神经网络的自适应控制方法^[32], 系统模型重写如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (67)$$

其中, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $u \in \mathbf{R}$ 是控制输入, $y \in \mathbf{R}$ 是系统输出, $f(\mathbf{X})$ 和 $g(\mathbf{X})$ 是未知的光滑函数.

针对上述系统设计控制器 $u = -k(t)e_s - \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z})$ ^[32], 其中 e_s 是滤波误差, 下文有明确定义; $\hat{\mathbf{W}}$ 是对神经网络权值的估计, 相应有一个自适应估计律; $\mathbf{S}(\mathbf{z})$ 是已知的基函数. 通过这种基于神经网络的自适应控制方法, 使系统输出有界, 且收敛于理想轨迹, 这个界的大小与神经网络的逼近误差有关. 如果系统中含有周期时变的不确定性, 记为 $\theta(t) = \theta(t-T)$, 系统重新描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})(u + \theta(t)) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (68)$$

式中, $\theta(t)$ 可采用重复控制方法进行估计, $f(\mathbf{X})$ 和 $g(\mathbf{X})$ 仍然使用神经网络进行逼近, 但同时注意到一个新的问题, 即逼近误差的存在会随着参数的重复估计而不断累加, 最终导致输出发散. 应用本文提出的自适应鲁棒控制方法, 使逼近误差随着周期数的增加而逐渐减少, 使系统输出误差最终趋于 0. 下面进行具体的控制器设计和收敛性分析.

假设 5. $g(\mathbf{X})$ 的符号已知, 存在常数 g_{\min} 和有界函数 $\bar{g}(\mathbf{X}) > 0$ 使得 $0 < g_{\min} \leq |g(\mathbf{X})| \leq \bar{g}(\mathbf{X}) < \infty, \forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$.

上述假设说明光滑函数 $g(\mathbf{X})$ 是严格正的或负的, 不失一般性, 假设 $g(\mathbf{X}) \geq g_{\min} > 0, \forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$. 定义 $\mathbf{X}_d(t) = [y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d^{(n-1)}(t)]^T$, 其中理想轨迹 $y_d(t)$ 具有 n 阶有界导数. 定义 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T = \mathbf{X} - \mathbf{X}_d$, 为实现系统输出对理想轨迹的跟踪, 定义滤波误差 $e_f = [c^T \ 1]e$, 其中 $c = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]^T$ 使得 $s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + \dots + c_1$ 是 Hurwitz 多项式. 定义 $\nu_1 = y_d^{(n-1)} - [c^T, 0]e$ 和 $\nu = -y_d^{(n)} + [0, c^T]e$, 因此有 $\dot{\nu}_1 = -\nu$, 对 e_f 求导, 得:

$$\dot{e}_f = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})(u + \theta(t)) + \nu \quad (69)$$

设计理想反馈控制器如下:

$$u^* = -k_4 e_f - \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} - h'(\mathbf{z}) - \theta(t) \quad (70)$$

其中, $k_4 > 0$ 是设计参数; $\mathbf{z} = [\mathbf{X}^T, e_f, \nu, \nu_1]^T$, $h'(\mathbf{z})$ 表示如下:

$$h'(\mathbf{z}) = \frac{1}{e_f} \int_0^{e_f} \left(\sigma \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g^{-1}(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)}{\partial x_i} x_{i+1} + \frac{\nu}{g(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)} \right) d\sigma \quad (71)$$

其中, $\bar{x}_{n-1} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$. 由于 $f(\mathbf{X})$ 和 $g(\mathbf{X})$ 未知, 设计理想神经网络如下:

$$\mathbf{W}^{*T} \mathbf{S}(\mathbf{z}) + \mu_l = \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} + h'(\mathbf{z}) \quad (72)$$

其中, 逼近误差 $|\mu_l| < \bar{\rho}$, $\bar{\rho}$ 未知. \mathbf{W}^{*T} 是理想网络权值定义如下:

$$\mathbf{W}^* := \arg \min_{\mathbf{W} \in \Omega_w} \left\{ \sup_{\mathbf{z} \in \Omega_z} \left| \mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} - g(\mathbf{z}) \right| \right\}$$

其中, Ω_w, Ω_z 是紧集. 设计实际控制器:

$$u = -k_4 e_f - \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - \hat{\theta}(t) - \hat{\rho} \tanh\left(\frac{e_f}{\varepsilon^j}\right) \quad (73)$$

其中, $\hat{\mathbf{W}}, \hat{\rho}, \hat{\theta}(t)$ 分别为 $\mathbf{W}^*, \bar{\rho}, \theta$ 的估计, 设计如下:

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma_6 \mathbf{S}(\mathbf{z}) e_f \quad (74)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma_7 \varepsilon^j \hat{\rho} + \gamma_7 e_f \tanh\left(\frac{e_f}{\varepsilon^j}\right) \quad (75)$$

1) 部分限幅学习律:

$$\hat{\theta}(t) = \begin{cases} \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}(t-T)) + \gamma_8 e_f, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases} \quad (76)$$

2) 全限幅学习律:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^*(t) &= \begin{cases} \hat{\theta}(t-T) + \gamma_8 e_f, & t \in [0, \infty) \\ 0, & t \in [-T, 0) \end{cases} \\ \hat{\theta}(t) &= \text{sat}_{\bar{\theta}}(\hat{\theta}^*(t)) \end{aligned} \quad (77)$$

其中, $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8 > 0$ 是设计参数, $\text{sat}_{\bar{\theta}}(\cdot)$ 由定义 2 给出.

定理 3. 系统 (68) 满足假设 5, 在控制器 (73) 和参数自适应律 (74) 和 (75) 的作用下, 分别采用部分限幅学习律 (76) 或全限幅学习律 (77), 均能保证系统输出误差渐近收敛于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证明. 将控制器 (73) 代入式 (69), 得:

$$\begin{aligned} \dot{e}_f &= f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})(u + \theta(t)) + \nu = \\ & f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X}) \left(-k_4 e_f - \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) + \tilde{\theta}(t) - \right. \\ & \left. \hat{\rho} \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) \right) + \nu \end{aligned} \quad (78)$$

选取 Lyapunov-like 函数 $V = V_{e_f} + V_{\tilde{\mathbf{W}}} + V_{\tilde{\rho}} + V_{\tilde{\theta}}$, 其中:

$$\begin{aligned} V_{e_f} &= \int_0^{e_f} \frac{\sigma}{g(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)} d\sigma \\ V_{\tilde{\mathbf{W}}} &= \frac{1}{2\gamma_6} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \\ V_{\tilde{\rho}} &= \frac{1}{2\gamma_7} \tilde{\rho}^2 \\ V_{\tilde{\theta}} &= \frac{1}{2\gamma_8} \int_{t-T}^t \tilde{\theta}^2 d\tau \end{aligned}$$

其中, $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$, $\tilde{\rho} = \bar{\rho} - \hat{\rho}$, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. 对 V_{e_f} 求导, 并将式 (78) 代入, 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_f} &= \frac{\partial V_{e_f}}{\partial e_f} \dot{e}_f + \frac{\partial V_{e_f}}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} + \frac{\partial V_{e_f}}{\partial \nu_1} \dot{\nu}_1 = \\ & \frac{e_f \dot{e}_f}{g(\mathbf{X})} + \dot{\nu}_1 \int_0^{e_f} \sigma \frac{\partial g^{-1}}{\partial \nu_1} d\sigma + \\ & \int_0^{e_f} \sigma \left(\frac{\partial g^{-1}(\bar{x}_{n-1}, \sigma + \nu_1)}{\partial \bar{x}_{n-1}} \dot{\bar{x}}_{n-1} \right) d\sigma = \\ & -k_4 e_f^2 + e_f \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) + e_f \tilde{\theta}(t) + e_f \mu_l - \\ & e_f \hat{\rho} \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) \end{aligned} \quad (79)$$

对 $V_{\tilde{\mathbf{W}}}$ 求导, 并将式 (74) 代入, 得:

$$\dot{V}_{\tilde{\mathbf{W}}} = -\gamma_6^{-1} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) e_f \quad (80)$$

对 $V_{\tilde{\rho}}$ 求导, 并将式 (75) 代入, 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\rho}} &= \frac{1}{\gamma_7} (\dot{\tilde{\rho}}) \left(-\gamma_7 \varepsilon^j \hat{\rho} + \gamma_7 e_f \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) \right) = \\ & -\varepsilon^j \left(\hat{\rho} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \right)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^j \bar{\rho}^2 - \bar{\rho} e_f \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) + \\ & \hat{\rho} e_f \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

对 $V_{\tilde{\theta}}$ 求差分, 分别将式 (76) 和式 (77) 代入上式, 应用引理 1, 得:

$$\Delta V_{\tilde{\theta}}(t) = V_{\tilde{\theta}}(t) - V_{\tilde{\theta}}(t-T) \leq \int_{t-T}^t -e_f \tilde{\theta}(\tau) d\tau \quad (82)$$

对 $V(t)$ 求差分, 并将式 (79) ~ (82) 代入上式, 得:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{t-T}^t (\dot{V}_{e_f} + \dot{V}_{\tilde{\mathbf{W}}} + \dot{V}_{\tilde{\rho}}) d\tau + \\ & V_{\tilde{\theta}}(t) - V_{\tilde{\theta}}(t-T) \leq \\ & \int_{t-T}^t \left(-k_4 e_f^2 + |e_f| \bar{\rho} + \frac{1}{4} \varepsilon^j \bar{\rho}^2 - \right. \\ & \left. \bar{\rho} e_f \tanh \left(\frac{e_f}{\varepsilon^j} \right) \right) d\tau \leq -k_4 \int_{t-T}^t e_f^2 d\tau + \\ & \left(\delta \bar{\rho} + \frac{1}{4} \bar{\rho}^2 \right) T \varepsilon^j \end{aligned} \quad (83)$$

其中, $\delta > 0$ 是常数, 满足 $\delta = e^{-(\delta+1)}$. $\forall t \in [iT, (i+1)T], i \in \mathbf{Z}^+, t_0 \in [0, T]$, 有:

$$V(t) = V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t-jT) \quad (84)$$

将式 (83) 代入上式, 得:

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta V(t-jT) = \\ & V(t_0) - k_4 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau + \\ & \left(\delta \bar{\rho} + \frac{1}{4} \bar{\rho}^2 \right) T \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i-j} \end{aligned} \quad (85)$$

需证 $V(t_0)$ 的有界性. $\forall t \in [0, T]$, 对 $V(t)$ 求导, 并将式 (79) ~ (82) 代入, 得:

$$\dot{V}(t) \leq -k_4 e_f^2 + \left(\delta \bar{\rho} + \frac{1}{4} \bar{\rho}^2 \right) \varepsilon \quad (86)$$

在区间 $[0, t_0]$ 上对上式两边取积分, 得:

$$V(t_0) \leq V'(0) - k_4 \int_0^{t_0} e_f^2 d\tau \quad (87)$$

其中, $V'(0) = V(0) + t_0(\delta \bar{\rho} + \frac{1}{4} \bar{\rho}^2) \varepsilon$. 因为 $V(0)$ 有界, $t_0 \in [0, T]$, 所以 $V'(0)$ 有界, 又因为 $V(t_0) - V'(0) \leq -k_4 \int_0^{t_0} e_f^2 d\tau \leq 0$, 所以有 $0 < V(t_0) \leq V'(t)$, 即 $V(t_0)$ 有界. 对式 (85) 两边取极限, 得:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) &\leq \max_{t_0 \in [0, T]} V(t_0) + \\ & \left(\delta \bar{\rho} + \frac{1}{4} \bar{\rho}^2 \right) T \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i-j} - \\ & k_4 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau \end{aligned} \quad (88)$$

因为 $-k_4 \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t-(j+1)T}^{t-jT} e_f^2 d\tau \leq 0$, $V(t_0)$ 有界, 而 $V(t) > 0$, 结合式 (15) 可知 $V(t)$ 有界, 即 $e_f(t)$ 、 $\hat{W}(t)$ 、 $\hat{\rho}(t)$ 有界, $\hat{\theta}(t)$ 积分有界. 进一步地, 在式 (76) 或式 (77) 的限幅作用下, $\hat{\theta}(t)$ 有界, 根据式 (73), 则控制器 $u(t)$ 有界, 则闭环系统内所有信号有界. 进而根据式 (69) 可知 \dot{e}_f 有界, 所以 e_f 一致连续. 由式 (88) 得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-T}^t e_f^2 d\tau = 0 \quad (89)$$

因 $e_f(t)$ 一致连续, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_f(t)| = 0$. 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. \square

5 仿真

例 1. 采用倒立摆模型^[33]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mLx_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{M+m}}{L \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right) + \frac{\cos x_1}{M+m}} + \frac{u}{L \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (90)$$

其中, x_1 和 x_2 分别是倒立摆系统的角位移和角速度, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 是重力加速度, M 和 m 分别是车和杆子的质量, L 是杆子一半的长度, u 是控制力. 模型的真实值为 $M = 0.1 \text{ kg}$, $m = 0.2 \text{ kg}$, $L = 0.5 \text{ m}$, 初始状态 $x_1(0) = 0, x_2(0) = \pi^2/3$, 理想跟踪轨迹设为 $y_d(t) = \pi/6 \sin(t)$.

为应用控制器 (44), 将上述模型转化为式 (40) 的形式, 其中:

$$f(\mathbf{X}, \varphi_f) = (M+m) \frac{\sin x_1}{\cos x_1} g, \varphi_f = M+m$$

$$\omega_f(\mathbf{X}) = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} g, f_0(\mathbf{X}) = 0$$

$$g(\mathbf{X}, \theta(t)) = -mLx_2^2 \sin x_d, \theta(t) = -mL \sin x_d$$

$$v(\mathbf{X}) = x_2^2$$

$$\eta(\mathbf{X}, t) = mL(\sin x_d - \sin x_1)x_2^2$$

$$\alpha = mL, \rho(\mathbf{X}) = x_2^2$$

$$\beta(\mathbf{X}, \varphi_\beta) = \frac{4}{3}L(M+m) \frac{1}{\cos x_1} - mL \cos x_1$$

$$\varphi_\beta = \left[\frac{4}{3}L(M+m), -mL \right]^T$$

$$\omega_\beta(\mathbf{X}) = \left[\frac{1}{\cos x_1}, \cos x_1 \right]^T$$

采用控制器 (44)、(45)、(46) 和 (48), 其中:

$$\omega(\mathbf{z}) = \left[\frac{\sin x_1}{\cos x_1} g \quad \frac{\sin x_1}{\cos^2 x_1} x_2 + v \frac{1}{\cos x_1} \right. \\ \left. -x_2 \sin x_1 + v \cos x_1 \right]^T, h(\mathbf{z}) = 0$$

控制器参数选择如下:

$$k_3 = 90, \gamma_5 = 5, \Gamma = 0.01$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta}^j = [-5 \quad 5], \quad \varepsilon^j = \frac{8}{j^2}$$

仿真结果如图 1~5 所示. 图 1 中实线表示系统实际输出, 虚线表示理想轨迹, 经过 1 秒左右, 系统输出渐近跟踪上理想轨迹. 较文献 [33] 收敛速度有了明显提高. 图 2 给出了误差的具体收敛过程, 随着周期数的增加, 误差在不断降低, 经过大约 5 个周期的学习, 收敛精度稳定在 10^{-5} 附近, 证明了所设计的控制器适用于非线性参数化系统的跟踪控制. 图 3 和图 4 表示参数估计的变化, 随着时间的推移, 估计值逐步趋于稳定, 并略带周期性, 但始终在一定范围内波动, 体现了加饱和的学习律对保证参数估计有界的作用. 图 5 是呈周期变化的控制输入.

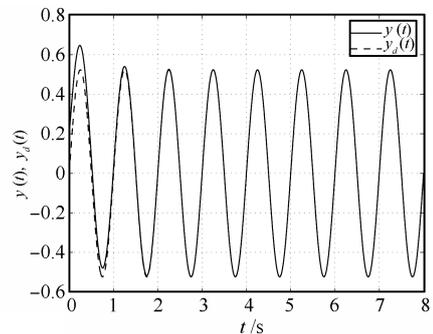


图 1 系统输出和理想轨迹

Fig. 1 System output and ideal trajectories

例 2. 采用机械臂模型验证神经网络自适应鲁棒重复控制算法^[21], 其动力学方程为:

$$J\ddot{x}_1 + \nu\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{2}m + M \right) gl \sin x_1 = u(t) + \theta(t) \quad (91)$$

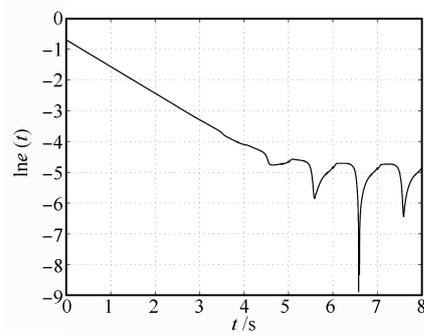


图 2 系统误差
Fig. 2 System error

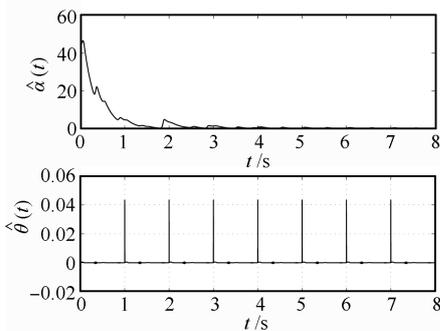


图 3 参数估计
Fig. 3 Parameter estimations

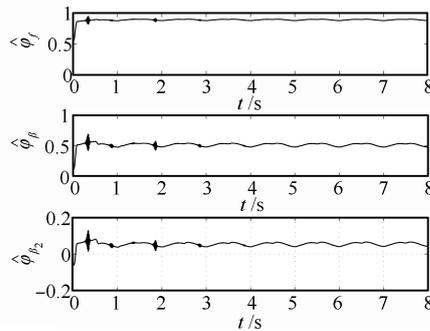


图 4 参数估计
Fig. 4 Parameter estimations

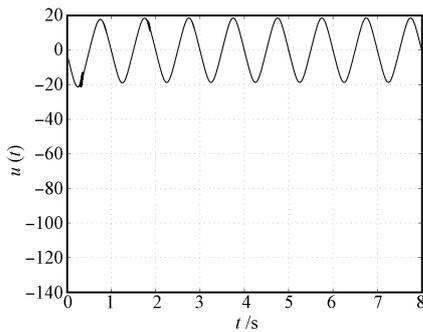


图 5 控制输入
Fig. 5 Control input

其中, x_1 是机械臂转动的角坐标, u 是驱动转矩, m, M, l, ν 分别是机械臂的质量、长度以及阻尼系数. g 为重力加速度. $J = Ml^2 + 1/3ml^2$ 为转动惯量, 假设 $\theta(t) = 2 \sin 6t$ 为控制扰动. 各参数真值如下: $m = 1 \text{ kg}, M = 2 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, \nu = 1 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)/\text{s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

将模型 (91) 写成系统 (68) 的形式, 即:

$$f(\mathbf{X}) = -\frac{\nu}{J}x_2 - \left(\frac{1}{2J}m + \frac{M}{J}\right)gl \sin x_1$$

$$g(\mathbf{X}) = \frac{1}{J}$$

采用控制律 (73)、(74)、(75) 和 (78), 其中神经网络采用具有 7 个节点的径向基神经网络, 网络输入 $\mathbf{z} = [x_1, x_2, e_f, \nu, \nu_1]^T$, 基函数采用高斯函数:

$$s_i(\mathbf{z}) = e^{-\frac{\|\mathbf{z}-\mathbf{c}_i\|^2}{2b_i^2}}, \quad i = 1, \dots, 7$$

选取中心点矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} -50 & -30 & -10 & 0 & 10 & 30 & 50 \\ -50 & -30 & -10 & 0 & 10 & 30 & 50 \\ -50 & -30 & -10 & 0 & 10 & 30 & 50 \\ -50 & -30 & -10 & 0 & 10 & 30 & 50 \\ -50 & -30 & -10 & 0 & 10 & 30 & 50 \end{bmatrix}$$

网络基宽 $b_i = 100/\sqrt{14}$, 控制器参数选择如下: $k_4 = 10, \gamma_6 = 2, \gamma_7 = 3, \gamma_8 = 500, \epsilon^j = 10/j^6$.

仿真结果如图 6~10 所示. 图 6 表示系统输出和理想轨迹, 在初始误差比较大的情形下, 系统输出经过 1.5 秒左右, 收敛于理想轨迹; 图 7 给出了误差精度随时间的变化情况, 经过 4 个周期的参数学习, 大约 3 秒左右, 收敛精度稳定在 10^{-3} 附近, 文献 [21] 需要经过 40 次左右的迭代学习误差收敛精度也能达到 10^{-3} , 所以本文方法在收敛时间上有所提升. 从图 7 可以看出, 本文的控制器设计方法能有效消除神经网络逼近误差的影响, 从而达到控制目标. 图 8 是网络逼近误差的估计 $\hat{\rho}$ 和周期参数的估计 $\hat{\theta}(t)$ 均呈周期性变化, 并能保持在一定区域内而未发散, 说明了饱和和学习律能在系统状态收敛的同时, 保证参数估计的有界性. 图 9 是神经网络权值的估计 $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_7$. 图 10 是呈周期性变化的控制输入, 通过调节函数 ϵ^j 的参数, 避免了颤振.

6 总结

本文解决了周期时变系统的重复控制问题. 在系统具有非周期不确定性的情形下, 设计鲁棒自适应重复控制器. 针对非线性参数化系统, 在跟踪周期轨迹的前提下, 利用部分限幅或全限幅学习律逼近

周期时变函数, 与现有重复控制不同的是将周期学习的重复特性充分融入到控制器的鲁棒项中, 使由不确定性扰动引起的误差随着周期数的增加而递减, 最终实现系统输出跟踪周期轨迹, 并将此方法用于消除神经网络逼近误差对重复控制系统的影响. 理论上, 当周期数趋于无穷时, 双曲函数趋于符号函数, 系统会出现颤振现象, 因此在实际设计中, 需通过参数调节来避免该现象的出现.

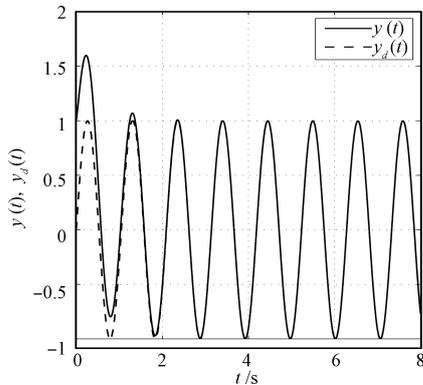


图 6 系统输出和理想轨迹

Fig. 6 System output and ideal trajectories

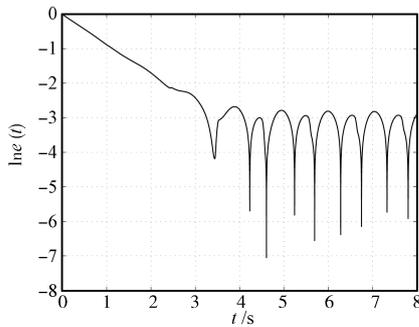


图 7 系统误差

Fig. 7 System error

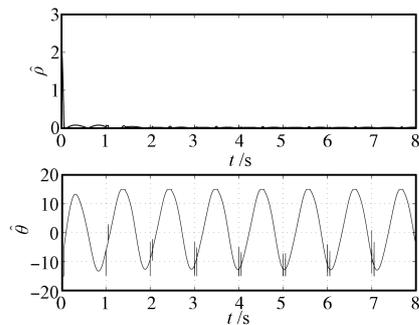


图 8 参数估计

Fig. 8 Parameter estimations

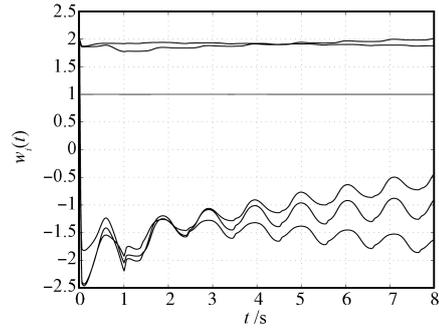


图 9 神经网络权值 $\hat{w}_i, i = 1, \dots, 7$

Fig. 9 The weights of neural network $\hat{w}_i, i = 1, \dots, 7$

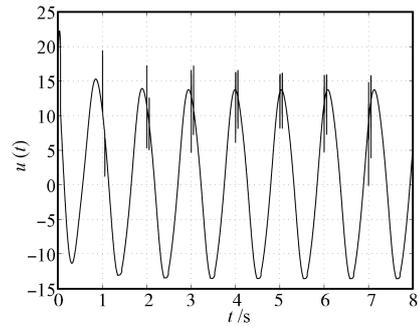


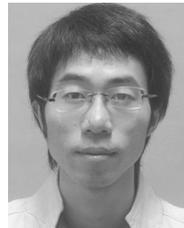
图 10 控制输入

Fig. 10 Control input

References

- 1 Richards J A. *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- 2 Bittanti S, Colaneri P. *Periodic Systems: Filtering and Control*. London: Springer-Verlag, 2009.
- 3 Sinha S C, Joseph P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via Liapunov-Floquet transformation. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1994, **116**(4): 650–658
- 4 Liuzzo S, Tomei P. Global adaptive learning control of robotic manipulators by output error feedback. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, **23**(1): 97–109
- 5 Chen W, Tian Y P. Neural network approximation for periodically disturbed functions and applications to control design. *Neurocomputing*, 2009, **72**(16): 3891–3900
- 6 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. S-class functions based adaptive controller design for a class of periodically time-varying nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1137–1143
(朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 基于 S 类函数的严格反馈非线性周期系统的自适应控制. *自动化学报*, 2010, **36**(8): 1137–1143)
- 7 Bodson M, Sacks A, Pradeep K. Harmonic generation in adaptive feedforward cancellation schemes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1939–1944
- 8 Ding Z T. Asymptotic rejection of general periodic disturbances in output-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(2): 303–308
- 9 Lee R C H, Smith M C. Nonlinear control for robust rejection of periodic disturbances. *Systems and Control Letters*, 2000, **39**(2): 97–107

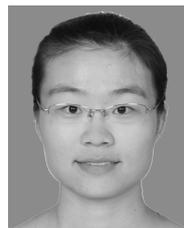
- 10 Inoue T, Nakano M, Iwai S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring. In: Proceedings of the 10th Annual Symposium on Incremental Motion Control Systems and Devices. Champaign: Incremental Motion Control Society, 1981. 282–292
- 11 Sun M X, Xie H Y, Wang H. Switching-function dynamics designs for uncertain variable structure systems with repetitive control. *International Journal of Control*, 2011, **84**(7): 1196–1208
- 12 Sun M X. Partial-period adaptive repetitive control by symmetry. *Automatica*, 2012, **48**(9): 2137–2144
- 13 Hu C X, Yao B, Chen Z, Wang Q F. Adaptive robust repetitive control of an industrial biaxial precision gantry for contouring tasks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, **19**(6): 1559–1568
- 14 Chen W S, Zhang Z Q. Nonlinear adaptive learning control for unknown time-varying parameters and unknown time-varying delays. *Asian Journal of Control*, 2011, **13**(6): 903–913
- 15 Sun Ming-Xuan, Yu Lin-Jiang, He Hai-Gang. Discrete adaptive repetitive control: convergence analysis and implementation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 400–406 (孙明轩, 余林江, 何海港. 离散自适应重复控制: 收敛性分析与实现. *自动化学报*, 2013, **39**(4): 400–406)
- 16 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, Wang Xue-Jie, Li Yan-Jun, Fang Zhi-Gang. Robust repetitive control for a class of nonlinear systems with input deadzone. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 908–912 (朱胜, 孙明轩, 王雪洁, 李艳君, 方志刚. 具有输入死区的非线性系统的鲁棒重复控制. *自动化学报*, 2013, **39**(6): 908–912)
- 17 Jiang Y A, Clements D J, Hesketh T. Adaptive repetitive control of nonlinear systems. In: Proceeding of the 34th Conference on Decision and Control. New Orleans: IEEE, 1995. 1708–1713
- 18 Dixon W E, Zergeroglu D M, Dawson D M, Costic B T. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, **32**(4): 538–545
- 19 Xu J X. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 579–583
- 20 Sun M, Ge S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(10): 1684–1688
- 21 Sun M X, Ge S S, Marreels I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, **29**(33): 563–568
- 22 Xu J X, Yan R, Chen Y Q. Repetitive learning control: existence of solution, convergence and robustification. In: Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE, 2006. 958–963
- 23 Polycarpou M M, Ioannou P A. A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica*, 1996, **32**(3): 423–427
- 24 Qu Z H. Adaptive and robust controls of uncertain systems with nonlinear parameterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(10): 1817–1823
- 25 Peterson B B, Narendra K S. Bounded error adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, **27**(6): 1161–1168
- 26 Ioannou P A, Kokotovic P V. Adaptive systems with reduced models. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Vol. 47. New York: Springer-Verlag, 1983.
- 27 Ioannou P A, Tsakalis K S. A robust direct adaptive controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(11): 1033–1043
- 28 Narendra K S, Annaswamy A M. *Stable Adaptive Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- 29 Feng G. New robust model reference adaptive control algorithm. *IEE Proceedings-Control Theory Applications*, 1994, **141**(3): 177–180
- 30 Astrom K J, Whittenmark B. *Adaptive Control*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989
- 31 Xu J X, Yan R. On repetitive learning control for periodic tracking tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(11): 1842–1848
- 32 Zhang T, Ge S S, Hang C C. Stable adaptive control for a class of nonlinear systems using a modified Lyapunov function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(1): 129–132
- 33 Ge S S, Hang C C, Zhang T. A direct adaptive controller for dynamic systems with a class of nonlinear parameterizations. *Automatica*, 1999, **35**(4): 741–747



朱胜 博士, 浙江大学城市学院讲师。主要研究方向为学习控制。
E-mail: zhus@zucc.edu.cn
(ZHU Sheng Ph.D., lecturer at Zhejiang University City College. His research interest covers learning control.)



王雪洁 浙江大学城市学院副教授。主要研究方向为电机控制。本文通信作者。
E-mail: xjwang@zucc.edu.cn
(WANG Xue-Jie Associate professor at Zhejiang University City College. Her research interest covers repetitive control. Corresponding author of this paper.)



刘玮 浙江大学城市学院讲师。主要研究方向为学习控制。
E-mail: liuwei@zucc.edu.cn
(LIU Wei Lecturer at Zhejiang University City College. Her research interest covers learning control.)