# 一类含输入时滞非线性系统的干扰观测器控制

文新宇 [1]

**摘 要** 基于干扰观测器控制 (Disturbance-observer-based control, DOBC) 作为一种有效的干扰补偿策略取得了广泛的应用. 然而, 当干扰和控制输入不能在同一时刻进入控制通道时, 外部信号很难得到实时估计和补偿. 提出一种复合 DOBC 结构, 包括干扰观测、干扰预测和反馈调节三个部分. 该方法的特点是即使一类非线性系统存在输入时滞, 同样可以继承传统 DOBC 的优点. 最后, 通过构造辅助观测器给出了预测误差以及复合闭环系统的稳定性分析方法.

**关键词** 干扰观测器, 干扰预测, 辅助观测器, 输入时滞

**引用格式** 文新宇. 一类含输入时滞非线性系统的干扰观测器控制. 自动化学报, 2014, **40**(9): 1882−1888

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2014.01882

## Disturbance Observer Based Control for a Class of Nonlinear Systems with Input Time-delay

WEN Xin-Yu[1]

**Abstract** Disturbance-observer-based control (DOBC) has been considered as an effective disturbance rejection scheme in applications. However, if the control input and disturbance cannot enter the control channel at the same time, it will be difficult to estimate and compensate the exogenous signals in real time. A compound DOBC method, consisting of a disturbance observer, disturbance prediction and a feedback regulation part, is thus developed. One novel feature of the proposed method is that the merits of DOBC can be inherited for a class of nonlinear systems with input time-delay. Moreover, stability analysis for both the dynamic prediction error system and the composite closed-loop system is provided by designing an auxiliary observer.

**Key words** Disturbances observer, disturbance prediction, auxiliary observer, input time-delay

**Citation** Wen Xin-Yu. Disturbance observer based control for a class of nonlinear systems with input time-delay. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(9): 1882−1888

时滞是自然界中广泛存在的一种物理现象, 是引起系统不稳定的重要因素, 给系统分析和控制器的设计带来了很大的困难. 如何抑制由时滞和干扰而造成的系统性能下降, 成为控制理论研究的难点问题.

在许多抗干扰策略中, 基于干扰观测器控制 (Disturbance-observer-based control, DOBC) 方法可以通过对外部干扰进行估计和补偿, 由于结构简单, 得到了非常广泛的应用[1]. 采用时域设计方法, 可以将 DOBC 结构引入到非线性系统[2−5]. 在 DOBC 策略中, 特性不可描述的外部干扰一般被当做有界信号来处理[6−10], 能够实现干扰的近似补偿. 如果干扰动态特性已知, 通过构造观测器抵消外部干扰会具有更小的保守性. 这种 DOBC 可以对估计误差以及闭环系统构成的复合系统进行优化设计[2−5,11−14], 同时避免了偏微分方程的求解[15]. 近年来, DOBC 方法已经推广到相对阶非匹配和状态时滞情况下干扰的补偿[4, 11, 16]. 然而, 现有的理论要求输入与干扰时间的匹配条件, 即输入作用和干扰必须同一时刻进入控制通道, 原因在于干扰观测器经过输入通道后与真实干扰存在一定的相位差. 目前, 常用的方法是将干扰作为有界或慢时变信号实现某种程度的补偿, 忽略了干扰的主要特性. 因此, 要利用观测器对干扰实现完全补偿, 除了要估计当前时刻干扰的影响, 同时要预测未来时刻干扰的动态, 通过 "超前" 控制器补偿干扰的影响.

本文将实现对一类带输入时滞非线性系统的抗干扰控制, 利用辅助观测器对外部干扰进行预估, 根据 Lyapunov 函数方法实现系统的稳定性分析, 并且该方法能够推广到干扰关键参数未知情况下的时

收稿日期 2013-07-18 录用日期 2013-09-29
Manuscript received July 18, 2013; accepted September 29, 2013
国家自然科学基金 (61203049), 太原科技大学校博士启动资金 (20122048), 山西省高校科技研究开发项目 (20121068) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61203049), Taiyuan University of Science and Technology Doctor Priming Foundation (20122048), and Research Development Program of Science and Technology of Higher Education of Shanxi Province (20121068)
本文责任编委 刘德荣
Recommended by Associate Editor LIU De-Rong
1. 太原科技大学电子信息工程学院 太原 030024
1. School of Electronic Information Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024

滞系统.

## 1 问题描述

考虑如下形式的同时具有干扰和输入时滞的广义对象:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t),t) + B[\boldsymbol{u}(t-\tau) + \boldsymbol{d}(t) + \bar{\boldsymbol{d}}(t)] \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$、$\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ $(n \geq m)$ 分别为状态和控制输入矢量, $\tau$ 为时间滞后量. $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 且 $\mathrm{rank}(B) = m$, 是系统系数矩阵. $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}(t),t)$ 为已知的非线性函数, $F_1$ 为适当维数的权矩阵. 式 (1) 中, $\boldsymbol{d}(t) = [d_1(t) \quad d_2(t) \cdots d_m(t)]^{\mathrm{T}}$ 是输入通道中具有一个子系统模型的动态干扰. 在经典的 DOBC 策略以及输出调节理论中[15], 外部可建模干扰用外部系统描述为:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}}_i = \Gamma_i\boldsymbol{w}_i \\ d_i = \boldsymbol{V}_i\boldsymbol{w}_i \end{cases}, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{2}$$

其中, $\Gamma_i$、$\boldsymbol{V}_i$ 一致可观. 为阐述本文的主要思想, 仅考虑二阶正弦干扰, 即 $\boldsymbol{w}_i \in \mathbf{R}^2, \Gamma_i \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, 并将矩阵对 $(\Gamma_i, \boldsymbol{V}_i)$ 描述为能观标准形, 即

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, i = 1,2,\cdots,m \tag{3}$$

系统 (1) 包含了不可建模有界信号 $\bar{\boldsymbol{d}}(t) = [\bar{d}_1(t) \quad \bar{d}_2(t) \cdots \bar{d}_m(t)]^{\mathrm{T}}$. 而在文献 [6−10] 中, $\boldsymbol{d}(t)$ 和 $\bar{\boldsymbol{d}}(t)$ 统一被认作有界等价干扰, 忽略了干扰的自身规律. 本文目的在于设计出多干扰环境下特定外部信号 $\boldsymbol{d}(t)$ 的预估方法, 同时保证闭环系统的鲁棒性.

根据式 (2) 和式 (3) 不难得出 $\boldsymbol{w}_i = \phi_i\boldsymbol{w}_0^i$. 其中, 未知矢量 $\boldsymbol{w}_0^i$ 是式 (2) 的初始状态, 并且

$$\phi_i(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t)/\omega_i \\ -\omega_i\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

在实际应用中, 许多工程中遇到的干扰可以由这类模型描述, 如机械臂系统[2] 和飞行器控制[4] 等.

**假设 1.** 对给定系统 (1), 存在一个稳定控制律 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$, 使得 $\boldsymbol{x} = 0$ 是标称模型 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t),t) + B\boldsymbol{u}_0(t-\tau)$ 的一致渐近稳定平衡点, 并且存在一个函数 $\Omega_0(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ 满足

$$\begin{aligned} &\gamma_1\|\boldsymbol{x}\| \leq \Omega_0(\boldsymbol{x}) \leq \gamma_2\|\boldsymbol{x}\|, \|\frac{\partial\Omega_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\| \leq \gamma_3\|\boldsymbol{x}\| \\ &\frac{\partial\Omega_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x} + F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t),t) + B\boldsymbol{u}_0(t-\tau)) \leq \\ &\qquad -\gamma_4\|\boldsymbol{x}\| \end{aligned} \tag{5}$$

其中, $\gamma_1\|\cdot\|$、$\gamma_2\|\cdot\|$、$\gamma_3\|\cdot\|$ 为 $K_\infty$ 类函数, $\gamma_4\|\cdot\|$ 是 $K$ 类函数. 本文利用辅助观测器来给出不确定参数 $\boldsymbol{\omega}_i$, $i = 1,2,\cdots,m$ 和 $\boldsymbol{d}(t)$ 以及 $\bar{\boldsymbol{d}}(t)$ 之间的关系, 不需要估计干扰初始状态的真实值, 避免了自适应辨识带来的系统负半定特性问题.

## 2 辅助干扰观测器设计

首先考虑干扰的估计问题, 由式 (2) 可以将干扰描述如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}} = \Gamma\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{d}(t) = V\boldsymbol{w} \end{cases} \tag{6}$$

其中, $\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^{2m}$, $\Gamma \in \mathbf{R}^{2m\times 2m}$ 并且

$$\Gamma = \mathrm{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m\}, V = \mathrm{diag}\{V_1, V_2, \cdots, V_m\} \tag{7}$$

在系统状态可测, 即 $\boldsymbol{x}$ 可测的条件下, 构造如下辅助观测器

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varrho} \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = G(\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varrho}) - L\check{B}F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) - \\ \qquad L\check{B}A\boldsymbol{x} - L\check{B}B(\boldsymbol{u} - \tau) \\ \boldsymbol{\varrho} = L\check{B}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{8}$$

其中,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{\xi}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_i = \begin{bmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$G$ 和 $L$ 是给定常数矩阵且具有如下形式:

$$G = \mathrm{diag}\{G_1, G_2, \cdots, G_m\}$$
$$L = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2, \cdots, \boldsymbol{L}_m\}$$

并且

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_{i1} & g_{i2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{L}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

首先选择合适的参数 $g_{i1}$ 和 $g_{i2}$ 使得 $G_i$ 满足 Hurwitz 条件, 考虑到 $\mathrm{rank}(B) = m \leq n$, 可以找到伪逆矩阵 $\check{B}$ 使得 $\check{B}B = I$, 这样由式 (8) 可以推出:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = G\boldsymbol{\xi} + L\boldsymbol{d} + L\bar{\boldsymbol{d}} \tag{11}$$

再结合式 (2)、(8) 和 (11) 可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & LV \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{d}} \tag{12}$$

**引理 1.** 对扰动模型 (6), 如果 $G_i$ 和 $\boldsymbol{L}_i$ 具有形式 (10), 那么存在一个可逆矩阵 $P_i$ 使得下式成立:

$$\Pi_i \dot{\boldsymbol{w}}_i + \dot{\boldsymbol{\xi}}_i = G_i(\Pi_i \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{\xi}_i) + P_i^{-1} \boldsymbol{L}_i \bar{d}_i \tag{13}$$

**证明.** 考虑一个可逆矩阵

$$P_i^{-1} = \begin{bmatrix} I & \Pi_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中,

$$\Pi_i = \frac{\begin{bmatrix} -(g_{i1} - \omega_i^2) & g_{i2} \\ -\omega_i^2 g_{i2} & -(g_{i1} - \omega_i^2) \end{bmatrix}}{(g_{i1} - \omega_i^2)^2 + (g_{i2}^2 \omega_i^2)} \tag{15}$$

很明显 $\Pi_i$ 在 $\omega_i^2$ 取值范围是可逆的, 可以证明:

$$\Pi_i^{-1} = \begin{bmatrix} -g_{i1} + \omega_i^2 & -g_{i2} \\ \omega_i^2 g_{i2} & -g_{i1} + \omega_i^2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

根据式 (12) 可以得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}_i \\ \dot{\boldsymbol{w}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_i & \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{V}_i \\ 0 & \Gamma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_i \bar{d}_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

定义如下坐标变换

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \\ \bar{\boldsymbol{w}}_i \end{bmatrix} = P_i^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} \tag{18}$$

结合式 (14) 和 (15) 可以推出:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_i \\ \dot{\bar{\boldsymbol{w}}}_i \end{bmatrix} = P_i^{-1} \begin{bmatrix} G_i & \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{V}_i \\ 0 & \Gamma_i \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}}_i \\ \bar{\boldsymbol{w}}_i \end{bmatrix} + P_i^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_i \bar{d}_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

和

$$P_i^{-1} \begin{bmatrix} G_i & \boldsymbol{L}_i \boldsymbol{V}_i \\ 0 & \Gamma_i \end{bmatrix} P_i = \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & \Gamma_i \end{bmatrix} \tag{20}$$

最后, 根据式 (16) 和 (17) 可以证明式 (13) 成立. □

由引理 1 可以看出, 当不存在有界信号 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 的影响时, 通过辅助观测器 $\boldsymbol{\xi}_i$ 可以完全逼近干扰 $\boldsymbol{d}$. 由于 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 完全未知, 只能尽可能利用已有信息给出干扰 $d_i$ 的另外一种形式

$$d_i = \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{w}_i(t) = -\bar{\boldsymbol{V}}_i \boldsymbol{\xi}_i(t) + \bar{\boldsymbol{V}}_i \bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t) \tag{21}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w}_i(t) = -\Pi_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i(t) + \Pi_i^{-1} \bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t) \\ &\bar{\boldsymbol{V}}_i = \boldsymbol{V}_i \Pi_i^{-1} \\ &\bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t) = \boldsymbol{\xi}_i(t) + \Pi_i \boldsymbol{w}_i(t) \end{aligned} \tag{22}$$

并且满足

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\xi}}}_i = G_i \bar{\boldsymbol{\xi}}_i + P_i^{-1} \boldsymbol{L}_i \bar{d}_i \tag{23}$$

事实上, 由于控制输入存在输入滞后, 式 (21) 不能直接用来补偿干扰, 下面介绍如何利用辅助观测器来设计相位超前的干扰补偿控制器. 根据式 (3) 和 (4) 可以给出如下关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t+\tau) = &-\Pi \boldsymbol{w}(t+\tau) + \boldsymbol{\xi}(t+\tau) + \Pi \boldsymbol{w}(t+\tau) = \\ &-\Pi \phi(t+\tau) \boldsymbol{w}(0) + \boldsymbol{\xi}(t+\tau) + \\ &\Pi \boldsymbol{w}(t+\tau) = -\Pi \psi(\omega, \tau) \phi(t) \boldsymbol{w}(0) + \\ &\boldsymbol{\xi}(t+\tau) + \Pi \boldsymbol{w}(t+\tau) = \\ &-\Pi \psi(\omega, \tau) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\xi}(t+\tau) + \Pi \boldsymbol{w}(t+\tau) \end{aligned} \tag{24}$$

其中,

$$\begin{aligned} \Pi &= \mathrm{diag}\{\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_m\} \\ \psi(\omega, \tau) &= \mathrm{diag}\{\psi(\omega_1, \tau), \psi(\omega_2, \tau), \cdots, \psi(\omega_m, \tau)\} \\ \phi(t) &= \mathrm{diag}\{\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_m(t)\} \\ \psi(\omega_i, \tau) &= \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \tau) & \dfrac{\sin(\omega_i \tau)}{\omega_i} \\ -\omega_i \sin(\omega_i \tau) & \cos(\omega_i \tau) \end{bmatrix}, \\ & i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{25}$$

由式 (24) 可以推出:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_i(t+\tau) = &-\Pi_i \psi(\omega_i, \tau)(-\Pi_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i(t) + \Pi_i^{-1}(\boldsymbol{\xi}_i(t) + \\ &\Pi \boldsymbol{w}_i(t))) + \boldsymbol{\xi}_i(t+\tau) + \Pi_i \boldsymbol{w}_i(t+\tau) \end{aligned} \tag{26}$$

结合式 (20) 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_i(t+\tau) = &-\boldsymbol{V}_i \Pi_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i(t+\tau) + \bar{\boldsymbol{V}}_i \bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t+\tau) = \\ &-\boldsymbol{V}_i \psi(\omega_i, \tau) \Pi_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i(t) + \\ &\boldsymbol{V}_i \psi(\omega_i, \tau) \Pi_i^{-1} \bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t) + 2\bar{\boldsymbol{V}}_i \bar{\boldsymbol{\xi}}_i(t+\tau) = \\ &-\boldsymbol{V}_i \psi(\omega_i, \tau) \Pi_i^{-1} \boldsymbol{\xi}_i(t) + \bar{\bar{\boldsymbol{V}}}_i \boldsymbol{\delta}_i(t+\tau) \end{aligned} \tag{27}$$

其中,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{V}}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_i\psi(\omega_i,\tau)\Pi_i^{-1} & 2\bar{\boldsymbol{V}}_i \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\delta}_i(t+\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}}_i^{\mathrm{T}}(t) & \bar{\boldsymbol{\xi}}_i^{\mathrm{T}}(t+\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

式 (27) 的显著特点是 $d_i(t+\tau)$ 可以由一个辅助观测器和衰减矢量 $\boldsymbol{\delta}_i(t+\tau)$ 来表示, 由此可以预测在时刻 $t+\tau$ 时干扰的输出值

$$\hat{d}_i(t+\tau) = -\boldsymbol{V}_i\psi(\omega_i,\tau)\Pi_i^{-1}\boldsymbol{\xi}_i(t) \tag{28}$$

从式 (27) 中 $\boldsymbol{\delta}_i$ 的定义和式 (23) 可以看出, 当系统仅含有单一可建模干扰时, $d_i(t+\tau)$ 和 $\hat{d}_i(t+\tau)$ 的误差会逐渐趋于 0, 即观测值将逐渐跟踪到实际值. 在不考虑时滞和干扰参数的情况下, 采用文献 [3, 8] 的观测器形式可以得到同样的效果. 从式 (16) 和式 (21) 可以看出, 本文设计的观测器可以给出辅助观测器、干扰参数和滞后时间之间的映射关系, 即使存在其他外界干扰源, 也同样能够保证系统的鲁棒性.

## 3 DOBC 设计与稳定性分析

下面介绍基于干扰补偿的控制器设计方法, 为方便描述, 我们在假设 1 成立的前提下, 由分离性原理构造带输入时滞的 DOBC 控制器为:

$$\boldsymbol{u}(t) = -\hat{\boldsymbol{d}}(t+\tau) + \boldsymbol{u}_o \tag{29}$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{d}}(t+\tau) = \begin{bmatrix} \hat{d}_1(t+\tau) \\ \hat{d}_2(t+\tau) \\ \vdots \\ \hat{d}_m(t+\tau) \end{bmatrix}$$

这样动态系统 (1) 可以被重新描述为:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) =& A\boldsymbol{x}(t) + F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t),t)+ \\ & B[\boldsymbol{u}_0(t-\tau) + \boldsymbol{d}(t) - \hat{\boldsymbol{d}}(t) + \bar{\boldsymbol{d}}(t)]\end{aligned} \tag{30}$$

下面对复合系统 (30) 的稳定性进行分析.

**定理 1.** 对辅助系统 (8), 如果式 (10) 得到满足, 闭环系统 (30) 在单一干扰 $\boldsymbol{d}$ 以及 DOBC 律 (29) 作用下渐近稳定, 存在其他有界干扰 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 情况下可保证系统一致最终有界特性.

**证明.** 首先定义衰减矢量

$$\boldsymbol{\delta}(t+\tau) = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t) & \bar{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t+\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

和

$$P_d = \mathrm{diag}\{P_1^{-1}\boldsymbol{L}_1, P_2^{-1}\boldsymbol{L}_2, \cdots, P_m^{-1}\boldsymbol{L}_m\}$$
$$\bar{\bar{\boldsymbol{d}}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}}(t-\tau) & \bar{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

根据式 (27) 可以得到:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(t+\tau) =& -V\Pi^{-1}\boldsymbol{\xi}(t+\tau) + \bar{V}\bar{\boldsymbol{\xi}}(t+\tau) = \\ & -V\psi(\omega,\tau)\Pi^{-1}\boldsymbol{\xi}(t)+ \\ & V\psi(\omega,\tau)\Pi^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}(t) + 2\bar{V}\bar{\boldsymbol{\xi}}(t+\tau) = \\ & -V\psi(\omega,\tau)\Pi^{-1}\boldsymbol{\xi}(t) + \bar{\bar{V}}\boldsymbol{\delta}(t+\tau)\end{aligned} \tag{31}$$

其中,

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{diag}\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \cdots, \boldsymbol{V}_m\} \\ \bar{V} &= \mathrm{diag}\{\boldsymbol{V}_1\Pi_1^{-1}, \boldsymbol{V}_2\Pi_2^{-1}, \cdots, \boldsymbol{V}_m\Pi_m^{-1}\} \\ \bar{\bar{V}} &= \begin{bmatrix} V\boldsymbol{\psi}(\omega,\tau)\Pi^{-1} & 2\bar{V} \end{bmatrix} \\ \bar{\boldsymbol{\xi}} &= \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\xi}}_1^{\mathrm{T}} & \bar{\boldsymbol{\xi}}_2^{\mathrm{T}} & \cdots & \bar{\boldsymbol{\xi}}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{32}$$

结合式 (28) 可知估计误差满足:

$$\boldsymbol{d}(t) - \hat{\boldsymbol{d}}(t) = \bar{\bar{V}}\boldsymbol{\delta}(t) \tag{33}$$

并且

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \bar{G}\boldsymbol{\delta}(t) + \bar{P}_d\bar{\bar{\boldsymbol{d}}} \tag{34}$$

其中,

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \bar{P}_d = \begin{bmatrix} P_d & 0 \\ 0 & P_d \end{bmatrix} \tag{35}$$

由 $\bar{P}_d\bar{\bar{\boldsymbol{d}}}$ 的有界性不难证明 $\delta$ 也是范数有界的. 根据式 (10) 和式 (35) 可知, $\bar{G}$ 同样满足 Hurwitz 条件, 所以能够找到正定有界矩阵 $P>0$, 使得

$$\bar{G}P + P\bar{G} = -I \tag{36}$$

定义如下 Lyapunov 函数 $\Omega(t)$

$$\Omega(t) = \Omega_0(t) + \gamma\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{\delta}(t) \tag{37}$$

结合式 (34) 对 $\Omega(t)$ 求导可得:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}(t) =& \frac{\partial\Omega_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}(A\boldsymbol{x}(t) + F_1\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t),t)+ \\ & B_0\boldsymbol{u}_0(t-\tau) + B_0\bar{\boldsymbol{d}}(t) + \bar{\bar{V}}\boldsymbol{\delta}(t))+ \\ & \gamma\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}(t)(\bar{G}^{\mathrm{T}}P + P\bar{G})\boldsymbol{\delta}(t)+ \\ & 2\gamma\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}P\bar{P}_d\bar{\bar{\boldsymbol{d}}} \le -\gamma_4\|\boldsymbol{x}\|+ \\ & \gamma_3\|\boldsymbol{x}\|\|\bar{\bar{V}}\boldsymbol{\delta}(t)\| - \gamma\|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2+ \\ & \gamma_3\|\boldsymbol{x}\|\|B_0\bar{\boldsymbol{d}}(t)\| + 2\gamma\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}P\bar{P}_d\bar{\bar{\boldsymbol{d}}}\end{aligned} \tag{38}$$

由假设 1 和式 (26) 中 $\bar{\bar{V}}$ 的定义可知, 能够找到相应的常数 $\gamma_5 > 0$ 使得:

$$\dot{\Omega} \leq -\gamma_5 \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\delta}(t) \end{bmatrix} \right\| + 2\gamma \parallel \boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}} P \bar{P}_d \bar{\bar{\boldsymbol{d}}} \parallel + \gamma_3 \|\boldsymbol{x}\| \|B_0 \bar{\boldsymbol{d}}(t)\|$$

其中, $\gamma_5$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\delta}(t)$ 的 $K$ 类函数.

从上式可以看出, 当不可建模有界干扰 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 不存在时, 闭环系统渐近稳定. 此外, 由 $\boldsymbol{\delta}$ 以及 $P\bar{P}_d\bar{\bar{\boldsymbol{d}}}$ 的有界性可知系统一致最终有界. 由分离原理可知, 闭环系统收敛速度以及稳态精度可以通过选择与干扰无关的开环控制律 $\boldsymbol{u}_0$ 和参数 $G$ 来调节. □

相对于已有抗干扰方法, 本文对干扰进行分类, 充分利用了干扰信息来预估补偿干扰, 具有较强的鲁棒性和较少的保守性.

## 4 仿真算例

为说明本文方法的有效性, 考虑非线性时滞系统 (1), 其中相应系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

本文选择非线性函数 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t), t) = \boldsymbol{x}(t)\sin(t)$, 外部干扰 $d = \sin(t)$ 时滞 $\tau = 3$. 在假设 1 中, 选择 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, 并且

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.121 & 0.175 \end{bmatrix} \tag{39}$$

取

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

首先考虑理想情况: 系统仅有单一干扰, 此时不可建模信号 $\bar{d} = 0$. 图 1 和图 2 是采用本文方法得到的干扰的补偿效果和系统输出曲线. 从图 1～2 可以看出, 在 3 秒前受到时滞的影响补偿作用为 0. 在 10 秒时, 实际的干扰补偿信号可以完全跟踪外部干扰. 而且在式 (29) 作用下, 系统稳态误差小于 0.01. 在 12 秒时, 可以得到满意的控制性能. 受到输入时滞的影响, 在实施干扰补偿策略时, 不但要求估计干扰, 而且需要对干扰进行预测. 现有观测器方法在存在时滞时, 大多考虑常值或慢时变干扰, 避免时滞对干扰相位差的影响. 理论上, 现有方法在处理输入时滞问题时, 很难实现干扰的完全补偿, 具有一定的保守性.

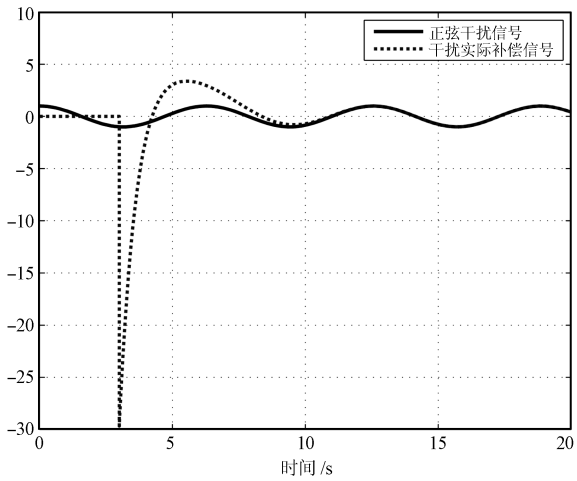


图 1 利用辅助观测器干扰的实际补偿效果 ($\tau = 3$)

Fig. 1 Disturbance tracking property using the proposed auxiliary observer ($\tau = 3$)

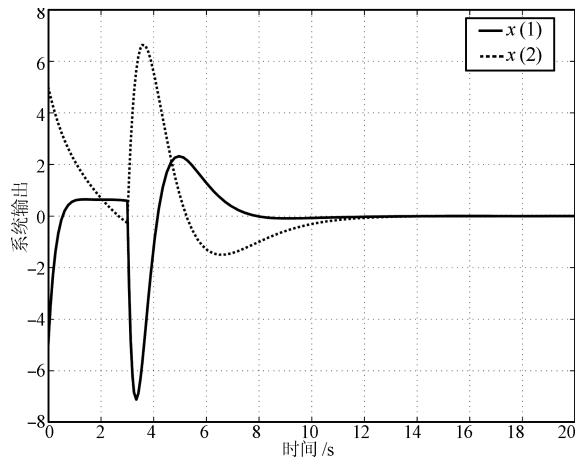


图 2 采用本文方法系统输出响应曲线 ($\tau = 3$)

Fig. 2 Output response using the proposed DOBC in this paper ($\tau = 3$)

从图 3 可以看出, 存在输入时滞时, 观测器无法及时对干扰进行补偿, 实际补偿信号与干扰存在较大相位误差. 系统动态响应在 20 秒后仍然会反复波动, 无法保证稳态精度 (如图 4 所示). 本文考虑的是时滞已知条件下谐波干扰的补偿问题. 从定理 1 可以看出, 当假设 1 成立时, 时滞大小不会对干扰估计的准确性和复合系统的稳定性造成影响. 当滞后量 $\tau$ 已知时, 按照本文的 DOBC 步骤, 可以有效地估计预测干扰. 图 5 给出了当 $\tau = 2$ 时干扰的补偿效果. 由图 5 可知, 在 11 秒后, 稳态误差会小于 0.01, 并最终收敛到给定值. 图 6 说明了多干扰环境下方法的鲁棒特性, 仿真中未知信号 $\bar{d}$ 为 $-0.5 \sim 0.5$ 的随机信号. 由图 6 可以看出, 在 11 秒时, 稳态误差会被抑制在非常小的范围. 如前所述, 由于多干扰相互影响耦合, 现有方法并不能区分 $d$ 和 $\bar{d}$ 两种干扰.

本方法可以在多种干扰影响下有针对性地预测可建模干扰, 进一步减少了设计保守性.

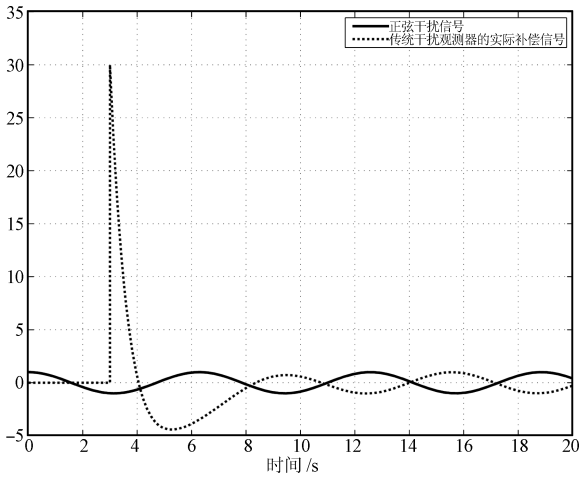


图 3　采用传统观测器干扰的补偿效果 ($\tau = 3$)

Fig. 3　Output response using the traditional DOBC ($\tau = 3$)

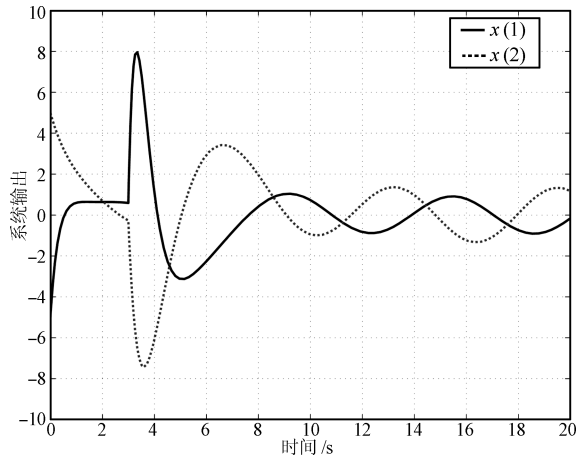


图 4　采用传统 DOBC 系统的输出曲线 ($\tau = 3$)

Fig. 4　Output response using the traditional DOBC ($\tau = 3$)

本文提出的观测器设计方法不需要估计 $\boldsymbol{w}_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ 的值, 通过构造辅助观测器和适当的坐标变换来预测干扰, 直接给出了干扰关键参数和超前干扰之间的关系.

## 5　结论

通过结合干扰观测器和反馈控制器, 本文解决了一类带输入时滞扰动补偿问题. 本文在多干扰环境下, 对特定外部扰动进行估计和预测, 能够保证系统一致最终有界特性, 且具有较少的保守性. 本文主要考虑了被控对象和干扰模型精确条件下的控制问题, 如何推广到不确定系统和变时滞系统是下一步要研究的工作.

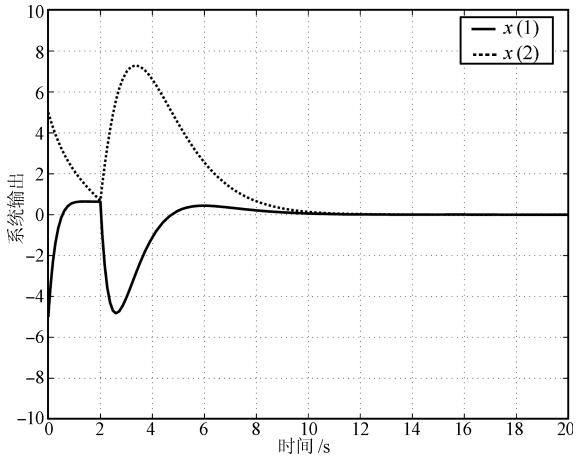


图 5　采用本文方法系统输出响应曲线 ($\tau = 2$)

Fig. 5　Output response using the proposed DOBC in this paper ($\tau = 2$)

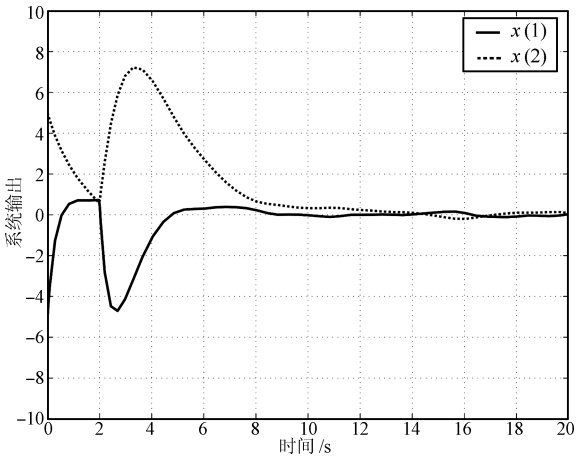


图 6　多干扰环境下系统输出响应曲线 ($\tau = 2$)

Fig. 6　Output response with multiple disturbances ($\tau = 2$)

## References

1 Guo L, Feng C, Chen W. A survey of disturbance-observer-based control for dynamic nonlinear system. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems-series B: Applications & Algorithms*, 2006, **13E**: 79−84

2 Chen W H, Ballance D J, Gawthrop P J, O′Reilly J. A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronic*, 2000, **47**(4): 932−938

3 Wei X J, Guo L. Composite disturbance observer-based control and control for $H_\infty$ complex continuous models. *International Journal of Robust and nonlinear Control*, 2010, **20**(1): 106−118

4 Guo L, Chen W H. Disturbance attenuation and rejection for systems with nonlinearity via DOBC approach. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2005, **15**(2): 109−125

5 Guo L, Wen X Y. Hierarchical anti-distance adaptive control for non-linear systems with composite disturbances. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2011, **33**(8): 942−956

6 Yang Z J, Hiroshi T, Kanae S, Wada K. A novel robust nonlinear motion controller with disturbance observer. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, **16**(1): 137−147

7 Chen X K, Su C Y, Fukuda T. A nonlinear disturbance observer for multi-variable systems and its application to magnetic bearing systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, **2**(4): 569−577

8 Back J, Shim H. Adding robustness to nominal output-feedback controllers for uncertain nonlinear systems: A nonlinear version of disturbance observer. *Automatica*, 2008, **44**(9): 2528−2537

9 Hu Zhi-Kun, Sun Yan, Jiang Bin, He Jing, Zhang Chang-Fan. An optimal unknown input observer based fault diagnosis method. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **39**(8): 1225−1230
(胡志坤, 孙岩, 姜斌, 何静, 张昌凡. 一种基于最优未知输入观测器的故障诊断方法. 自动化学报, 2012, **39**(8): 1225−1230)

10 Yin Zheng-Nan, Su Jian-Bo, Gao Xiu-Xing. Systematic design method of disturbance observer guaranteeing closed-loop systems robust stability. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 12−22
(尹正男, 苏剑波, 高秀行. 保证闭环系统鲁棒稳定性的干扰观测器系统性设计方法. 自动化学报, 2012, **38**(1): 12−22)

11 Yang J, Li S H, Yu X H. Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, **60**(1): 160−169

12 Yang J, Li S H, Y X H. Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances. *Automatica*, 2013, **49**(7): 2287−2291

13 Li S H, Yang J, Chen W H, Chen X S. Generalized extended state observer based control for systems with mismatched uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(12): 4792−4802

14 Li S H, Yang J. Robust autopilot design for bank-to-turn missiles using disturbance observers. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, **49**(1): 558−579

15 Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(2): 131−140

16 Wu H S. Adaptive robust state observers for a class of uncertain nonlinear dynamical systems with delayed state perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1407−1411

**文新宇** 太原科技大学副教授. 主要研究方向为干扰估计和抗干扰控制.
E-mail: wxysunrain@163.com
(**WEN Xin-Yu** Associate professor at Taiyuan University of Science and Technology. His research interest covers disturbance estimation and anti-disturbance control.)