第 40 卷 第 7 期 自 动 化 学 报 Vol. 40, No. 7
2014 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 2014

非均匀采样数据系统时变故障估计与调节最优集成设计

邱爱兵 [1] 吉虹钢 [1] 顾菊平 [1]

摘 要 针对一类发生连续时变故障的非均匀采样数据系统, 建立了一套主动容错控制最优设计方案. 首先, 为了实现基于非均匀离散采样输出对连续故障的估计, 同时鉴于现有自适应故障诊断方法无法直接推广于非均匀采样数据系统, 提出一种连续时间增广观测器最优设计方法, 既能保证故障估计误差快速收敛同时又对外界干扰鲁棒; 并且提出一个迭代算法对故障估计延迟与系统鲁棒性进行权衡; 进一步地, 基于所获得的故障信息, 并考虑估计误差和时变故障内采样特性对容错控制带来的不利因素, 设计基于状态反馈的非均匀采样容错控制器来快速恢复故障系统性能; 最后, 通过对四容水箱基准实例的仿真来验证所提方法的有效性.

关键词 时变故障调节, 非均匀采样, 采样容错控制, 性能权衡

引用格式 邱爱兵, 吉虹钢, 顾菊平. 非均匀采样数据系统时变故障估计与调节最优集成设计. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1493−1504

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01493

Optimal Integrated Design of Time-varying Fault Estimation and Accommodation for Nonuniformly Sampled Data Systems

QIU Ai-Bing[1] JI Hong-Gang[1] GU Ju-Ping[1]

Abstract In this paper, an active fault tolerant control design scheme is presented for a class of nonuniformly sampled data systems with continuous time-varying fault. Since the adaptive fault diagnosis technique can not be directly extended to such systems, an optimal continuous augmented observer is firstly designed to estimate the fault by use of nonuniform discrete output. The observer can not only guarantee fast convergence of estimation errors but also be robust to external disturbance. Then, an iterative algorithm is proposed to make a tradeoff between estimation delay and system robustness. Furthermore, with the obtained fault information, a nonuniformly sampled data fault tolerant controller based on state feedback is designed to recover the performance of the faulty system in consideration of the adverse impact of estimation errors and inter-sample behavior of continuous fault. Finally, the simulation results of an quadruple-tank example are included to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Time-varying fault accommodation, nonuniform sampling, sampled-data fault tolerant control, performance trade-off

Citation Qiu Ai-Bing, Ji Hong-Gang, Gu Ju-Ping. Optimal integrated design of time-varying fault estimation and accommodation for nonuniformly sampled data systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1493−1504

随着现代工业系统向复杂化和大型化发展, 对其安全性和可靠性的要求也越来越高, 特别是在一些安全至上的装置如飞行器和化工设备中, 要求系统在发生故障的情况下仍能实现预指定的性能目标, 或者至少保持系统稳定以避免灾难性的后果. 在此背景下, 故障诊断特别是容错控制在过去数十年中得以广泛关注和快速发展[1−3]. 一般而言, 容错控制可分为被动和主动两种形式, 相比于前者, 主动容错是在对系统进行故障诊断的基础上, 主动调整控制策略, 因而能更有针对性地设计容错控制器, 效果更佳. 故障调节是实现主动容错最有效的方法之一, 其基本思路是在判断故障发生后对其进行辨识和估计, 然后再通过修正或附加控制率来补偿故障带来的影响, 使系统尽量保持无故障时的性能[3−4]. 文献 [5] 基于多模型估计法对故障进行检测和诊断, 在获得故障信息的基础上, 利用特征匹配法设计重构控制率. 文献 [6] 利用神经网络方法来在线估计故障的信息, 在此基础上利用附加控制率的方法以保证故障系统稳定. 针对多输入多输出离散时间系统, 文献 [7] 应用系统分解和 Kalman 滤波方法对执行器故障进行估计, 然后通过重构控制器的期望输出来补

收稿日期 2013-10-22 录用日期 2014-01-07
Manuscript received October 22, 2013; accepted January 7, 2014
国家自然科学基金 (61104028, 61273024, 61374136, 61305031), 江苏省自然科学青年基金 (KB2012227) 资助
Supported by National Nature Science Foundation of China (61104028, 61273024, 61374136, 61305031) and Natural Science Foundation of Jiangsu Province (KB2012227)
本文责任编委 文成林
Recommended by Associate Editor WEN Cheng-Lin
1. 南通大学电气工程学院 南通 226019
1. School of Electrical Engineering, Nantong University, Nantong 226019

偿执行器失效. 由于自适应诊断观测器稳定且易于实现, 因此被广泛应用于连续时间 (线性或非线性) 系统的故障估计, 在获得故障估计结果后, 进一步修正控制率以恢复系统性能[8]. 综上可以看出, 故障估计是故障调节的核心, 然而相比于检测与隔离, 其难度更大, 因此关于故障调节的研究有待进一步深入探讨[3].

另一方面, 由于计算机等数字技术的普及, 现代工业系统本质上以采样数据系统呈现. 在这类系统中, 被控对象是连续时间的, 而控制输入和系统输出则分别是通过计算机或经过采样后获得的离散时间数据, 因此, 采样数据系统是一类包含连续和离散时间信号的混杂系统[9]. 与控制问题类似, 内采样特性是采样数据系统故障诊断关注的首要问题. 连续提升、混杂系统等方法被相继应用于采样数据系统故障诊断的直接设计研究中[10−11], 然而已有研究主要集中在故障检测和隔离上, 对故障辨识/估计等诊断高级任务的研究相对缺乏. 关于采样数据系统容错控制研究, 目前能查阅到的公开发表文献主要有文献 [12−13]. 文献 [12] 是通过结合 YJBK (Youla-Jabr-Bongiomo-Kucera) 参数化方法和连续提升技术, 发展了一种采样数据系统的主动容错控制方法, 然而所提方法仅适用于系统参数故障, 因此普适性较差. 文献 [13] 提出利用 Euler 离散模型来描述一类非线性采样数据系统, 进而在离散系统框架内研究相应的故障估计与容错控制方法, 然而应用 Euler 模型来描述采样数据系统在一定程度上忽略了系统内采样特性, 因此存在一定近似, 所提方案仅适用于采样周期非常小的情况.

进一步地, 文献 [12−13] 考虑的采样数据系统输入输出周期是单速率的. 然而随着分布式网络系统的普及, 由于网络通信延迟或丢包、传感器自身性能缺陷、实验数据分析延迟等因素影响, 系统输出可能是以不等间隔甚至是以不确定时变采样周期获得的, 即非均匀采样[14−15]. 而控制输入也会以非均匀方式更新, 例如因为处理器临时计算负荷过大导致计算延迟[14−15], 或为了精简通信而发展的各类基于事件驱动的采样控制方案等[16]. 然而这种采样或更新时刻的不确定性进一步给采样数据系统的故障诊断和容错控制增加了困难. 文献 [17−18] 基于等价空间和 Kalman 滤波器研究了一类非均匀采样系统的故障诊断问题, 所考虑的非均匀采样机制满足周期性假设, 即某段时间内采样非均匀, 而该时间段内的非均匀采样模式是周期重复的. 文献 [14−15] 突破上述周期性约束, 应用等价空间方法分别研究了非均匀采样系统的故障检测直接和间接设计方法, 然而文中假设输入更新和输出采样同步, 这大大限制了所提方案在实际中的应用. 文献 [19] 针对一般非均匀采样数据系统, 提出一种迭代算法解决了传感器最优鲁棒故障检测问题. 文献 [20] 初步探讨了非均匀采样数据系统的故障估计问题, 其基本思想是应用输出时滞方法设计增广观测器以实现基于非均匀离散采样输出对连续故障的估计. 然而文中对于发生在连续时间域的时变故障, 仅考虑了干扰鲁棒性, 缺乏有效手段来保证时变故障估计结果的及时性和准确性. 上述研究主要集中在故障诊断领域. 目前关于非均匀采样数据系统容错控制特别是主动容错的研究较少. 其原因一方面在于上面所提及的对连续时变故障的估计效果欠佳; 另一方面, 即使获得了准确及时的故障估计结果, 如何进而设计非均匀采样容错控制方案, 使之能够有效处理连续时变故障内采样特性也是一个难题. 据所能查阅的文献可知, 目前关于这方面的研究几乎为空白.

为此, 本文将针对发生连续时变故障的非均匀采样数据系统, 开展故障诊断与容错控制的最优集成设计研究. 首先, 基于对自适应诊断观测器无法应用于非均匀采样数据系统原因的分析, 给出一种改进的连续观测器设计方案, 来实现基于离散输出对连续故障和状态的快速估计, 并保证观测器对外界干扰的最优鲁棒性; 考虑到估计速度与干扰鲁棒性存在一定冲突, 进而发展相应算法对两者进行权衡; 最后, 应用所获得的故障和状态估计结果, 设计非均匀采样数据状态反馈容错控制器, 使之能有效地处理故障和状态估计误差、未知的时变故障内采样特性等不利因素, 从而保证故障系统快速恢复性能.

1 问题描述

1.1 系统描述

考虑如下非均匀采样数据系统:

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+E_d\boldsymbol{d}(t)+E_f\boldsymbol{f}(t)\\ \boldsymbol{y}(t_k)=C\boldsymbol{x}(t_k)+D_v\boldsymbol{v}(t_k)\end{array}\right. \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^{n_u}$ 为控制输入向量, $\boldsymbol{d}(t)\in\mathbf{R}^{n_d}$ 为连续过程噪声, $\boldsymbol{y}(t_k)\in\mathbf{R}^m$ 为采样输出向量, $\{t_1,t_2,\cdots,t_k,\cdots\}$ 为非均匀采样时刻, $\boldsymbol{v}(t_k)\in\mathbf{R}^{n_v}$ 为离散测量噪声, $\boldsymbol{f}(t)\in\mathbf{R}^{n_f}$ 为未知连续时变故障, 并且假设其导数是范数有界的, 即存在常数 f_0 满足 $\left\|\dot{\boldsymbol{f}}(t)\right\|\leq f_0$. A, B, E_d, E_f, C, D_v 为已知适维矩阵.

对于非均匀采样数据系统, 控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 也是以不等间隔周期进行更新. 令 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k,\cdots\}$ 为离散控制信号 $\boldsymbol{u}_d$ 的更新时刻, 则输入方程可描述为

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_d(\tau_k),\quad \tau_k\leq t<\tau_{k+1} \tag{2}$$

最后, 关于采样或更新间隔, 本文所考虑的非均匀采样系统无需满足周期性以及同步性等严格约束, 仅需满足一常规假设, 即最大间隔值小于常值:

$$(t_{k+1} - t_k) \leq h_1,\ \ (\tau_{k+1} - \tau_k) \leq h_2\ ,\ \forall k > 0 \tag{3}$$

1.2 自适应诊断观测器

本节将对连续时间系统的自适应诊断观测器进行简单回顾[21]. 常规的自适应诊断观测器需假定连续时间系统不受噪声干扰且故障类型为定值故障, 即式 (1) 中 $\boldsymbol{d}(t) = 0$, $\dot{\boldsymbol{f}}(t) = 0$, $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$. 基于上述假设, 构造如下自适应诊断观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + E_f\hat{\boldsymbol{f}}(t) - L(\hat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases} \tag{4}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\hat{\boldsymbol{y}}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\hat{\boldsymbol{f}}(t) \in \mathbf{R}^{n_f}$ 分别为系统状态、输出以及故障的估计值. 待设计参数为滤波器增益 $L \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

定义

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{e}_y(t) = \hat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t) \\ &\boldsymbol{e}_f(t) = \hat{\boldsymbol{f}}(t) - \boldsymbol{f}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

则相应误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = (A - LC)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) + E_f\boldsymbol{e}_f(t) \\ \boldsymbol{e}_y(t) = C\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases} \tag{6}$$

又因为 $\dot{\boldsymbol{f}}(t) = 0$, 则故障估计误差的变化率为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_f(t) = \dot{\hat{\boldsymbol{f}}}(t) \tag{7}$$

引理 1. 对于发生定值故障的连续时间系统, 如果存在矩阵 $P > 0$, 矩阵 F 以及滤波器增益 L 满足:

$$P(A - LC) + (A - LC)^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{8}$$

$$E_f^{\mathrm{T}}P = FC \tag{9}$$

则可设计如下自适应故障估计算法

$$\dot{\hat{\boldsymbol{f}}}(t) = -\Gamma F\boldsymbol{e}_y(t) \tag{10}$$

使得状态估计误差和故障估计误差均渐近收敛. 其中 $0 < \Gamma \in \mathbf{R}^{n_f \times n_f}$ 为自适应率.

证明. 定义 Lyapunov 函数如下

$$V(t) = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}(t)\Gamma^{-1}\boldsymbol{e}_f(t)$$

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = &\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)[P(A - LC) + (A - LC)^{\mathrm{T}}P]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) + \\ &2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)PE_f\boldsymbol{e}_f(t) - 2\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}(t)FC\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned}$$

根据式 (8) 和 (9), 相应有:

$$\dot{V}(t) = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)[P(A-LC) + (A-LC)^{\mathrm{T}}P]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) < 0$$

因此, 状态和故障估计误差是渐近收敛的. □

注 1. 尽管自适应诊断观测器已得到了一定应用, 但其仍存在如下两点不足: 1) 根据式 (10) 可以发现, 自适应率 Γ 对故障估计性能有决定性影响, 并且它增加了设计自由度, 然而如何选取自适应学习率 Γ 目前还没有具体有效的方法, 这在一定程度上限制了自适应故障诊断滤波器在实际中的推广应用; 2) 式 (8) 和 (9) 的求解. 尽管式 (8) 可以很容易地转化为线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI), 但是由于增加了等式约束 (9) 从而使得求解变得异常困难. 相关文献对该问题的求解提出了一些近似方法[7], 然而如何精确求解带有等式约束的 LMI 至今仍是一个难题.

2 故障估计设计

在本节中, 我们将设计一个连续时间观测器以实现基于非均匀离散采样输出对连续时变故障的最优估计. 为此首先应用最近在采样系统分析和综合问题中广泛使用的时滞方法, 将非均匀离散采样输出方程进行零阶保持, 得到如下连续时变时滞输出模型:

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t - \sigma(t)) + D_v\boldsymbol{v}(t - \sigma(t)) \tag{11}$$

其中, $\sigma(t) = t - t_k$, $t_k \leq t < t_{k+1}$.

构造如下连续时间观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = A\hat{\boldsymbol{x}}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + E_f\hat{\boldsymbol{f}}(t) - L(\hat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) = C\hat{\boldsymbol{x}}(t - \sigma(t)) \end{cases} \tag{12}$$

基于式 (5), 则有误差系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) + E_f\boldsymbol{e}_f(t) - E_d d(t) - \\ \qquad LC\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t - \sigma(t)) + LD_v\boldsymbol{v}(t - \sigma(t)) \\ \boldsymbol{e}_y(t) = C\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t - \sigma(t)) - D_v\boldsymbol{v}(t - \sigma(t)) \end{cases} \tag{13}$$

将上式与式 (6) 对比可以看出, 非均匀采样数据系统故障估计问题已被等价转化为含有时变时滞的连续系统的故障估计问题, 因此考虑将自适应诊断观测器推广到该类系统上.

回顾引理 1 的证明, 设计自适应诊断观测器的核心思想是在构造 Lyapunov 函数时, 将 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 分开建立二次型, 相应 Lyapunov 函数的导数项不含 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 的二次项, 并且交叉项仅是关于 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 的, 因此可以巧妙选择 Lyapunov 矩阵 P 和 Γ^{-1} 并要求式 (9) 成立来消除 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 的交叉

项. 自适应诊断观测器已被推广到各类确定性连续时滞系统上[22−24], 然而这些系统的时滞都仅出现在状态方程中, 这保证了在设计自适应诊断观测器时, 相应 Lyapunov 函数的导数仅增加了 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t-\sigma(t))$ 的二次项和 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t-\sigma(t))$ 的交叉项等. 而输出方程为正常输出 $\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)$, 相应输出误差项也不含时滞项, 即 $\boldsymbol{e}_y(t)=C\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$, 这保证了 Lyapunov 函数两个分项的导数还仅是关于 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 的交叉项, 因而可以将引理 1 中的自适应诊断观测器很容易地推广到该类时滞系统中.

然而对于非均匀采样数据系统, 故障估计只能基于时变时滞输出 (11). 即使系统不受过程和测量噪声影响, 如果仍将 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 分开构造 Lyapunov 函数, 由于输出误差为 $\boldsymbol{e}_y(t)=C\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t-\sigma(t))$, 两个分项的导数项所含有的交叉项分别是关于 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 和 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t-\sigma(t))$ 与 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 的, 因此无法构造等式约束来消除交叉项. 并且文中系统受到了连续过程噪声 $\boldsymbol{d}(t)$ 和离散测量噪声 $\boldsymbol{v}(t_k)$ 影响, 这也进一步增加了自适应诊断观测器推广的难度. 针对上述难题, 并鉴于注 1 中所述, 自适应率还没有很好的选取方法, 因此, 考虑在故障估计算法中去掉自适应率 Γ, 并将 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)$ 与 $\boldsymbol{e}_f(t)$ 增广成一个整体来进行设计. 为此构造如下故障估计算法:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{f}}}(t)=-F\boldsymbol{e}_y(t) \tag{14}$$

根据式 (14), 时变故障估计误差对时间的导数为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_f(t)=-FC\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t-\sigma(t))+FD_v\boldsymbol{v}(t-\sigma(t))-\dot{\boldsymbol{f}}(t) \tag{15}$$

定义

$$\bar{\boldsymbol{e}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t)\\ \boldsymbol{e}_f(t)\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{d}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}(t)\\ \dot{\boldsymbol{f}}(t)\end{bmatrix},\bar{A}=\begin{bmatrix}A & E_f\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_d=-\begin{bmatrix}E_d & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\bar{L}=\begin{bmatrix}L\\ F\end{bmatrix},\bar{C}=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}$$

根据式 (13) 和 (15), 状态和估计误差动态关系可增广描述为

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t)=&\bar{A}\bar{\boldsymbol{e}}(t)-\bar{L}\bar{C}\bar{\boldsymbol{e}}(t-\sigma(t))+\bar{E}_d\bar{\boldsymbol{d}}(t)+\\ &\bar{L}D_v\boldsymbol{v}(t-\sigma(t))\end{aligned} \tag{16}$$

定理 1. 给定标量 $\alpha>0$, 对于非均匀采样数据系统 (1) 和 (2), 连续时间观测器 (12) 和故障估计算法 (14) 可使得状态估计误差 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}$ 和故障估计误差 $\boldsymbol{e}_f$ 均以 α 指数衰减, 并满足最优 H_∞ 性能指标 $\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2^2\le\gamma_1^2(\|\bar{d}\|_2^2+\sum_{k=0}^{\infty}(t_{k+1}-t_k)\|\boldsymbol{v}(t_k)\|_2^2)$, 如果存在正定矩阵 $P>0$, $S>0$, $R>0$ 以及矩阵 N,Z 满足

$$\min\ \gamma_1\ \text{s.t.}\ (17)\sim(21)$$

$$\begin{bmatrix}\Pi_1+2\alpha(P-R)+2\alpha h_1S & \Pi_2+2\alpha R-2\alpha h_1S & 0\\ * & \Pi_3-2\alpha R+2\alpha h_1S & h_1\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}R\\ * & * & -h_1R\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0 \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}P+P\bar{A}-S+2\alpha(P-R) & -P\bar{L}\bar{C}+S+2\alpha R\\ * & -S-2\alpha R\end{bmatrix}+N\begin{bmatrix}I\\ -I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}I\\ -I\end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}+h_1Z<0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi_1+I & \Pi_2 & \Pi_4 & \Pi_7 & 0\\ * & \Pi_3 & \Pi_5 & -h_1S\bar{L}D_v & h_1\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}R\\ * & * & \Pi_6 & h_1\bar{E}_d^{\mathrm{T}}R\bar{L}D_v & 0\\ * & * & * & -\gamma_1^2I & h_1D_v^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}R\\ * & * & * & * & -h_1R\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0 \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi_8 & -P\bar{L}\bar{C}+S & P\bar{E}_d & P\bar{L}D_v\\ * & -S & 0 & 0\\ * & * & -\gamma_1^2I & 0\\ * & * & * & -\gamma_1^2I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}I\\ -I\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+h_1\begin{bmatrix}Z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} (1-2\alpha h_1)R & N^{\mathrm{T}} \\ * & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\Pi_1 = \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} - S + h_1\bar{A}^{\mathrm{T}}R\bar{A} + h_1(S\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}S)\\
&\Pi_2 = P\bar{L}\bar{C} + S - h_1\bar{A}^{\mathrm{T}}R\bar{L}\bar{C} - h_1S\bar{L}\bar{C} - h_1\bar{A}^{\mathrm{T}}S\\
&\Pi_3 = -S + h_1S\bar{L}\bar{C} + h_1\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}S\\
&\Pi_4 = P\bar{E}_d + h_1(S\bar{E}_d + \bar{A}^{\mathrm{T}}R\bar{E}_d)\\
&\Pi_5 = -h_1(S\bar{E}_d + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}R\bar{E}_d)\\
&\Pi_6 = -\gamma_1^2 I + h_1\bar{E}_d^{\mathrm{T}}R\bar{E}_d\\
&\Pi_7 = P\bar{L}D_v + h_1(S\bar{L}D_v + \bar{A}^{\mathrm{T}}R\bar{L}D_v)\\
&\Pi_8 = P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P - S + I
\end{aligned}$$

证明. 定义如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\bar{\boldsymbol{e}}(t) + (h_1-\sigma(t))\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s + (h_1-\sigma(t))\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t) \tag{22}$$

其中, $\boldsymbol{\eta}(t) = \bar{\boldsymbol{e}}(t) - \bar{\boldsymbol{e}}(t_k)$. 对上式进行求导有:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = &2\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) + (h_1-\sigma(t))\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) -\\ &\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t) + 2(h_1-\sigma(t))\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) -\\ &\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

首先考虑 α-指数稳定性约束. 为此令 $\bar{\boldsymbol{d}}(t) = 0$ 和 $\boldsymbol{v}(t_k) = 0$, 同时定义

$$W(t) = \dot{V}(t) + 2\alpha V(t)$$

如果 $W < 0$, 并注意到当 $t = t_k$ 时, $V(t)$ 的后两项等于 0, 因此有如下不等式成立:

$$\begin{aligned}&\lambda_{\min}(P)\|\bar{\boldsymbol{e}}(t)\|^2 \le V(t_k)\mathrm{e}^{-2\alpha(\mathrm{t}-\mathrm{t_k})} \le\\ &\lambda_{\max}(P)\|\bar{\boldsymbol{e}}(t_k)\|^2\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_k)}\end{aligned} \tag{23}$$

式中 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 分别表示矩阵的最小和最大奇异值. 式 (23) 表明系统 (16) 是指数稳定的, 衰减率为 α. 因此接下来只需寻找满足 $W < 0$ 的充分条件. 注意到

$$\begin{aligned}W(t) = &2\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) + (h_1-\sigma(t))\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) +\\ &2(h_1-\sigma(t))(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) + \alpha\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t)) -\\ &\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t) + 2\alpha\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\bar{\boldsymbol{e}}(t) +\\ &(-1+2\alpha h_1 - 2\alpha\sigma(t))\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{24}$$

对于上式中的最后一项, 可以分两部进行处理. 首先定义 $\boldsymbol{\xi}(t) = [\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t) \quad \bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t_k)]^{\mathrm{T}}$, 因为 $\boldsymbol{\eta}(t) = \int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s$, 根据 Moon′s 不等式, 对于任意矩阵 $N \in \mathbf{R}^{2(n+n_f)\times(n+n_f)}$, 有:

$$\begin{aligned}&-2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)N\boldsymbol{\eta}(t) = \int_{t_k}^{t} -2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)N\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s \le\\ &\sigma(t)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)Z\boldsymbol{\xi}(t) + (1-2\alpha h_1)\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{25}$$

其中, R, N, Z 满足式 (21). 又根据 Jensen′s 不等式有:

$$\begin{aligned}&\sigma(t)\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s =\\ &\int_{t_k}^{t}\mathrm{d}s\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s \ge\\ &\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}sR\int_{t_k}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(s)\mathrm{d}s = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{\eta}(t)\end{aligned} \tag{26}$$

将式 (25) 和 (26) 代入 (24) 有

$$\begin{aligned}&W(t) \le\\ &2\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) + (h_1-\sigma(t))\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) +\\ &2(h_1-\sigma(t))(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}(t) + \alpha\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t)) -\\ &\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)S\boldsymbol{\eta}(t) + 2\alpha\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)P\bar{\boldsymbol{e}}(t) + 2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)N\boldsymbol{\eta}(t) -\\ &2\alpha\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{\eta}(t) + \sigma(t)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)Z\boldsymbol{\xi}(t) =\\ &\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)(\Gamma_1^{\alpha} + (h_1-\sigma(t))\Gamma_2^{\alpha} + \sigma(t)Z)\boldsymbol{\xi}(t) < 0\end{aligned} \tag{27}$$

其中, $\Gamma_1^{\alpha} = 2M_1^{\mathrm{T}}PM_3 - M_2^{\mathrm{T}}SM_2 + 2NM_2 + 2\alpha M_1^{\mathrm{T}}PM_1 - 2\alpha M_2^{\mathrm{T}}RM_2$, $\Gamma_2^{\alpha} = M_3^{\mathrm{T}}RM_3 + 2M_2^{\mathrm{T}}SM_3 + 2\alpha M_2^{\mathrm{T}}SM_2$, $M_1 = [\, I \quad 0 \,]$, $M_2 = [\, I \quad -I \,]$, $M_3 = [\, \bar{A} \quad -\bar{L}\bar{C} \,]$.

根据凸函数性质, 式 (27) 成立的充要条件为

$$\Gamma_1^{\alpha} + h_1\Gamma_2^{\alpha} < 0, \quad \Gamma_1^{\alpha} + h_1 Z < 0 \tag{28}$$

展开式 (28) 并应用 Schur 补即可得式 (17) 和 (18).

接下来寻找满足 H_∞ 性能指标的约束条件. 对式 (22) 沿系统 (16) 求导, 并令式 (25) 中 $\alpha = 0$ 代

入 $\dot{V}(t)$, 则有:

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)=\\&\quad 2\bar{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)P\dot{\boldsymbol{e}}(t)-\boldsymbol{\eta}^{\rm T}(t)S\boldsymbol{\eta}(t)-\int_{t_k}^{t}\dot{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(s)R\dot{\boldsymbol{e}}(s){\rm d}s+\\&\quad(h_1-\sigma(t))(\dot{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)R\dot{\boldsymbol{e}}(t)+2\boldsymbol{\eta}^{\rm T}(t)S\dot{\boldsymbol{e}}(t))\leq\\&\quad 2\bar{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)P\dot{\boldsymbol{e}}(t)+\sigma(t)\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(t)Z\boldsymbol{\xi}(t)-\\&\quad\boldsymbol{\eta}^{\rm T}(t)S\boldsymbol{\eta}(t)+2\boldsymbol{\xi}^{\rm T}(t)N\boldsymbol{\eta}(t)+\\&\quad(h_1-\sigma(t))(\dot{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)R\dot{\boldsymbol{e}}(t)+2\boldsymbol{\eta}^{\rm T}(t)S\dot{\boldsymbol{e}}(t))\end{aligned}\tag{29}$$

定义 $\boldsymbol{\zeta}(t)=[\ \bar{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)\quad\bar{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t_k)\quad\bar{d}^{\rm T}(t)\quad\boldsymbol{v}^{\rm T}(t_k)\ ]^{\rm T}$, 相应有:

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{e}}(t)=M_1'\boldsymbol{\zeta}(t),\boldsymbol{\eta}(t)=M_2'\boldsymbol{\zeta}(t),\dot{\boldsymbol{e}}(t)=M_3'\boldsymbol{\zeta}(t)\\&\boldsymbol{\xi}(t)=M_4'\boldsymbol{\zeta}(t),[\bar{\boldsymbol{d}}^{\rm T}(t)\quad\boldsymbol{v}^{\rm T}(t_k)]^{\rm T}=M_5'\boldsymbol{\zeta}(t)\end{aligned}$$

其中, $M_1'=[\ I\quad 0\quad 0\quad 0\ ], M_2'=[\ I\quad -I\quad 0\quad 0\ ], M_3'=[\ \bar{A}\quad -\bar{L}\bar{C}\quad \bar{E}_d\quad \bar{L}D_v\ ]$, $M_4'=[\ I\quad I\quad 0\quad 0\ ], M_5'=[\ 0\quad 0\quad I\ ]$.

接下来寻求

$$\begin{aligned}J=\ &\dot{V}(t)+\bar{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(t)\bar{\boldsymbol{e}}(t)-\\&\gamma_1^2(\bar{\boldsymbol{d}}^{\rm T}(t)\bar{\boldsymbol{d}}(t)+\boldsymbol{v}^{\rm T}(t_k)\boldsymbol{v}(t_k))<0\end{aligned}\tag{30}$$

成立的条件. 将式 (29) 代入上式易得式 (30) 成立的充分条件为

$$\Gamma_1'+h_1\Gamma_2'<0,\quad \Gamma_1'+h_1\begin{bmatrix}Z&0\\0&0\end{bmatrix}<0\tag{31}$$

其中, $\Gamma_1'=2{M_1'}^{\rm T}PM_3'-{M_2'}^{\rm T}SM_2'+2{M_4'}^{\rm T}NM_2'+{M_1'}^{\rm T}M_1'-\gamma_1^2{M_5'}^{\rm T}M_5', \Gamma_2'={M_3'}^{\rm T}RM_3'+2{M_2'}^{\rm T}SM_3'$.

将式 (31) 进行展开并应用 Schur 补定理可得到式 (19) 和 (20). 注意到, 若式 (31) 成立, 则当 $\alpha=0$ 时, 式 (28) 也成立, 即状态估计误差 $\boldsymbol{e_x}$ 和故障估计误差 $\boldsymbol{e}_f$ 渐近稳定. 由于 $J<0$, 对式 (30) 从 0 到 ∞ 积分, 则有 H_∞ 性能指标成立. □

注 2. 非均匀采样数据系统的分析和综合问题在近几年中得到了广泛关注[25−28], 所采取的方法主要可分为连续时滞和离散系统两类. 本文为了估计连续时变故障而采用了前者. 定理 1 借鉴了文献 [28] 所提出的 Lyapunov 函数构造方法, 然而两者仍存在如下不同: 1) 相比于文献 [28] 所用的标准方法, 定理 1 利用了 Moon′s 不等式来消除 Lyapunov 函数导数项中的 $(-1+2\alpha h_1)\int_{t_k}^{t}\dot{\boldsymbol{e}}^{\rm T}(s)R\dot{\boldsymbol{e}}(s){\rm d}s$, 这在一定程度上降低了结论的保守性; 2) 文献 [20] 仅是考虑系统的稳定性问题, 它是通过求解最大采样间隔值 h 来验证其结论的优越性, 因此控制器增益 K 是给定的, 从而保证结论中的矩阵不等式是线性的. 然而定理 1 研究的是带有指数约束的 H_∞ 鲁棒观测器设计问题, 因而最大采样间隔值 h 给定, 未知参数变为观测器增益 $\bar{L}$, 相应结论中矩阵不等式 (17) ∼ (20) 是非线性的. 尽管一些迭代算法可以用来求解 (17) ∼ (20), 但计算代价过大. 为此令 $S=n_1P$, $R=n_2P$, $P\bar{L}=Y$, 这样定理 1 中的矩阵不等式可转变为线性的, 待设计参数 L,F 可以通过求解 $\bar{L}=P^{-1}Y$ 获得.

注 3. 文献 [20] 初步探讨了采样数据系统的故障估计问题, 然而文中没有考虑测量噪声, 同时对于时变故障仅考虑了 H_∞ 性能指标, 因此估计效果欠佳. 为此定理 1 引入指数衰减率 α 以调节估计速度从而保证对时变故障估计的及时性. 众所周知, α 越大, 系统衰减速度越快, 相应故障和状态估计也越及时[29]. 然而 α 的增大也会导致 H_∞ 性能指标 γ_1 的增大, 即系统鲁棒性能变差. 因此 α 的设定需要考虑估计延迟和鲁棒性两者之间的权衡. 直观上, γ_1 与 α 的比值可用来实现该目标. 另外考虑到 α 值一般相对较小, 因此可利用下面的迭代算法来选择合理的 $\alpha_{\rm set}$.

算法 1. 令 μ 为足够小的可调参数.

步骤 1. 令 $i=0$, $\alpha_i=0$, 根据定理 1 计算出最优值 γ_1^0;

步骤 2. 令 $i=i+1$, 定义 $\alpha_i=\alpha_{i-1}+\mu$, 根据定理 1 计算出相应的 γ_1^i, 计算 γ_1^i/α_i;

步骤 3. 如果 $\gamma_1^i/\alpha_i\leq\gamma_1^{i-1}/\alpha_{i-1}$, 返回步骤 2; 如果 $\gamma_1^i/\alpha_i>\gamma_1^{i-1}/\alpha_{i-1}$, 则停止, $\alpha_{\rm set}=\alpha_i$.

上述算法如果在整个迭代过程中, 直到定理 1 不存在可行解, 仍无法找到 α_i 满足 $\gamma_1^i/\alpha_i>\gamma_1^{i-1}/\alpha_{i-1}$, 则需要进一步调小 μ.

3 非均匀采样数据故障调节设计

基于上节所估计的故障和状态信息, 本节将进行状态反馈非均匀采样容错控制器设计. 首先给出如下常规假设[8]:

假设 1. ${\rm rank}(B,E_f)={\rm rank}(B)$.

该假设条件意味着存在矩阵 $B^\dagger\in\mathbf{R}^{n_u\times n}$ 满足 $(I-BB^\dagger)E_f=0$. 对于采样数据容错控制器而言, 为了能够更多地获得系统信息以保证系统在故障情况下的性能, 一般是以尽可能快的速率对连续时间状态和故障估计信息进行采样. 然而又因为计算或通信延迟等不利因素影响, 控制输入最终是以如下非均匀方式进行更新:

$$\boldsymbol{u}(t)=-K\hat{\boldsymbol{x}}(\tau_k)-B^\dagger E_f\hat{\boldsymbol{f}}(\tau_k),\quad t\in[\tau_k\ \ \tau_{k+1})\tag{32}$$

其中控制器增益 $K \in \mathbf{R}^{n_u \times n}$ 为待设计参数, 将上式代入式 (1) 中的状态方程有:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = &A\boldsymbol{x}(t) - BK\boldsymbol{x}(\tau_k) - BK\boldsymbol{e}(\tau_k) - \\ &E_f(\hat{\boldsymbol{f}}(\tau_k) - \boldsymbol{f}(t)) + E_d\boldsymbol{d}(t) = \\ &A\boldsymbol{x}(t) - BK\boldsymbol{x}(\tau_k) - BK\boldsymbol{e}(\tau_k) - \\ &E_f\boldsymbol{e}_f(\tau_k) + E_d\boldsymbol{d}(t) + \tau(t)E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t)\end{aligned} \tag{33}$$

其中, $\tau(t) = t - \tau_k$.

式 (33) 中 $\boldsymbol{e}(\tau_k)$, $\boldsymbol{e}_f(\tau_k)$ 分别为状态和故障估计误差, 它们给容错控制增加了困难, 所谓的集成设计需要克服这些不利因素. 考虑到上节所设计的连续观测器可以保证误差值渐近收敛, 因此这些估计误差可以被视为一种外界干扰, 相应可设计容错控制器对其鲁棒. $\tau(t)\dot{\boldsymbol{f}}(t)$ 描述了连续故障的内采样特性, 保守做法也可以将其看成为一种干扰, 接下来我们将借助不等式方法给出一个更为有效的设计方法.

定理 2. 非均匀采样数据容错控制器 (32) 可保证系统稳定且满足如下最优 H_∞ 性能指标:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le &\gamma_2^2\|\boldsymbol{d}\|_2^2 + \gamma_2^2\sum_{k=0}^{\infty}(\tau_{k+1} - \tau_k)\times \\ &(\|\boldsymbol{e}(\tau_k)\|_2^2 + \|\boldsymbol{e}_f(\tau_k)\|_2^2)\end{aligned} \tag{34}$$

如果存在正定矩阵 $\tilde{P} > 0, \tilde{S} > 0, \tilde{R} > 0$, 适维矩阵 $\tilde{N}', \tilde{Z}', Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ 满足:

$$\min\ \gamma_2\ \text{s.t.}\ (35) \sim (37)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + h_2Q_2 & \Omega_3 & \Omega_2 & -\tilde{P}E_f - \frac{h_2^2}{4}A^{\mathrm{T}}Q_6E_f & \tilde{P}E_d + \frac{h_2^2}{4}A^{\mathrm{T}}Q_6E_d & 0 \\ * & -\tilde{S} + \frac{h_2^2}{4}Q_4 & 0 & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_f & -\frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_d & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6 \\ * & * & -\gamma_2^2I & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_f & -\frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_d & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6 \\ * & * & * & -\gamma_2^2I + \frac{h_2^2}{4}E_f^{\mathrm{T}}Q_6E_f & -\frac{h_2^2}{4}E_f^{\mathrm{T}}Q_6E_d & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma_2^2I + \frac{h_2^2}{4}E_d^{\mathrm{T}}Q_6E_d & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{h_2^2}{4}Q_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{N}' \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{N}' \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + h_2\begin{bmatrix} \tilde{Z}' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_3 & \Theta_2 & \Theta_5 & \Theta_9 & 0 \\ * & \Theta_4 & h_2\tilde{S}BK & \Theta_6 & \Theta_{10} & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6 + h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R} \\ * & * & -\gamma_2^2I & \Theta_7 & \Theta_{11} & \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6 + h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R} \\ * & * & * & \Theta_8 & \Theta_{12} & 0 \\ * & * & * & * & \Theta_{13} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{h_2^2}{4}Q_6 - h_2\tilde{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{N}' \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{N}' \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{N}'^{\mathrm{T}} \\ * & \tilde{Z}' \end{bmatrix} > 0,\ \begin{bmatrix} Q_1 & E_f^{\mathrm{T}}\tilde{P} \\ * & Q_2 \end{bmatrix} > 0,\ \begin{bmatrix} Q_3 & E_f^{\mathrm{T}}\tilde{S} \\ * & Q_4 \end{bmatrix} > 0,\ \begin{bmatrix} Q_5 & E_f^{\mathrm{T}}\tilde{R} \\ * & Q_6 \end{bmatrix} > 0 \tag{37}$$

其中

$$\Omega_1 = \tilde{P}A + A^{\mathrm{T}}\tilde{P} - \tilde{S} + \frac{h_2^2}{4}(Q_4 + A^{\mathrm{T}}Q_6A) + I$$
$$\Omega_2 = -\tilde{P}BK - \frac{h_2^2}{4}A^{\mathrm{T}}Q_6BK$$
$$\Omega_3 = \Omega_2 + \tilde{S} - \frac{h_2^2}{4}Q_4$$
$$\Theta_1 = \Omega_1 + h_2(A^{\mathrm{T}}\tilde{R}A + \tilde{S}A + A^{\mathrm{T}}\tilde{S})$$
$$\Theta_2 = \Omega_2 - h_2(A^{\mathrm{T}}\tilde{R}BK + \tilde{S}BK)$$
$$\Theta_3 = \Omega_3 - h_2(A^{\mathrm{T}}\tilde{R}BK + \tilde{S}BK + A^{\mathrm{T}}\tilde{S})$$
$$\Theta_4 = -\tilde{S} + \frac{h_2^2}{4}Q_4 + h_2\tilde{S}BK + h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{S}$$
$$\Theta_5 = -\tilde{P}E_f - \frac{h_2^2}{4}A^{\mathrm{T}}Q_6E_f - h_2A^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f - h_2\tilde{S}E_f$$
$$\Theta_6 = \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_f + h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f + h_2\tilde{S}E_f$$
$$\Theta_7 = \frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_f + h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f$$
$$\Theta_8 = -\gamma_2^2I + \frac{h_2^2}{4}E_f^{\mathrm{T}}Q_6E_f + h_2E_f^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f$$
$$\Theta_9 = \tilde{P}E_d + \frac{h_2^2}{4}A^{\mathrm{T}}Q_6E_d + h_2A^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_d + h_2\tilde{S}E_d$$
$$\Theta_{10} = -\frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_d - h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_d - h_2\tilde{S}E_d$$
$$\Theta_{11} = -\frac{h_2^2}{4}K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Q_6E_d - h_2K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_d,$$
$$\Theta_{12} = -\frac{h_2^2}{4}E_f^{\mathrm{T}}Q_6E_d - h_2E_f^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_d$$
$$\Theta_{13} = -\gamma_2^2I + \frac{h_2^2}{4}E_d^{\mathrm{T}}Q_6E_d + h_2E_d^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_d$$

证明. 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}\boldsymbol{x}(t) + (h_2 - \tau(t))\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) + (h_2 - \tau(t))\int_{\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\mathrm{d}s \tag{38}$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(\tau_k)$.

首先考虑系统稳定性. 令 $\boldsymbol{e}(\tau_k) = 0$, $\boldsymbol{e}_f(\tau_k) = 0$, $\boldsymbol{d}(t) = 0$. 并定义 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = [\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau_k)\ ]^{\mathrm{T}}$, 相应有:

$$\boldsymbol{x}(t) = \tilde{M}_1\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t), \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \tilde{M}_2\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \tilde{M}_3\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \tau(t)E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t)$$

其中, $\tilde{M}_1 = [\ I \quad 0\ ]$, $\tilde{M}_2 = [\ I \quad -I\ ]$, $\tilde{M}_3 = [\ A \quad -BK\ ]$.

由于 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \int_{\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$, 并应用 Moon's 不等式, 相应有:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t) = \\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) - \int_{\tau_k}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s + \\
&(h_2 - \tau(t))(\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + 2\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}\dot{\boldsymbol{x}}(t)) \le \\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) + \tau(t)\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{Z}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \\
&2\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{N}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) + (h_2 - \tau(t))(\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)) + \\
&2(h_2 - \tau(t))\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \\
&\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\Big[2\tilde{M}_1^{\mathrm{T}}\tilde{P}\tilde{M}_3 - \tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_2 + \tau(t)\tilde{Z} + 2\tilde{N}\tilde{M}_2 + \\
&(h_2 - \tau(t))(\tilde{M}_3^{\mathrm{T}}\tilde{R}\tilde{M}_3 + 2\tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_3)\Big]\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \\
&2\tau(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) + 2(h_2 - \tau(t))\tau(t)\times \\
&(\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{M}_3^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t)) + \\
&(h_2 - \tau(t))\tau^2(t)\dot{f}^{\mathrm{T}}(t)E_f^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t)
\end{aligned}$$

其中, $\tilde{R} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\tilde{N} \in \mathbf{R}^{2n\times n}$, $\tilde{Z} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$ 满足 $\begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{N}^{\mathrm{T}} \\ * & \tilde{Z} \end{bmatrix} > 0$.

又基于式 (37) 和 Moon's 不等式有:

$$\begin{aligned}
&2\tau(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{P}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) \le \\
&\quad \tau(t)\dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{\boldsymbol{f}}(t) + \tau(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_2\boldsymbol{x}(t) \le \\
&\quad \tau(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_2\boldsymbol{x}(t) + h_2f_0^2\lambda_{\max}(Q_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(h_2 - \tau(t))\tau(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{S}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) \le \\
&\quad \frac{h_2^2}{4}\Big[\dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(t)Q_3\dot{\boldsymbol{f}}(t) + \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)Q_4\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)\Big] \le \\
&\quad \frac{h_2^2}{4}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{T}}(t)Q_4\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) + \frac{h_2^2}{4}f_0^2\lambda_{\max}(Q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(h_2 - \tau(t))\tau(t)\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{M}_3^{\mathrm{T}}\tilde{R}E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) \le \\
&\quad \frac{h_2^2}{4}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{M}_3^{\mathrm{T}}Q_6\tilde{M}_3\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \frac{h_2^2}{4}f_0^2\lambda_{\max}(Q_5) \\
&\quad (h_2 - \tau(t))\tau^2(t)\dot{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{T}}(t)E_f^{\mathrm{T}}RE_f\dot{\boldsymbol{f}}(t) \le \\
&\quad \frac{h_2^2}{8}f_0^2\lambda_{\max}(E_f^{\mathrm{T}}RE_f)
\end{aligned}$$

将上述 4 个不等式代入 $\dot{V}(t)$ 有:

$$\dot{V}(t) \le \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\tilde{\Gamma}_1 + (h_2 - \tau(t))\tilde{\Gamma}_2 + \tau(t)\tilde{\Gamma}_3\Big]\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \delta \tag{39}$$

其中, $\tilde{\Gamma}_1 = 2\tilde{M}_1^{\mathrm{T}}\tilde{P}\tilde{M}_3 - \tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_2 + 2\tilde{N}\tilde{M}_2 + h_2^2(\tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_4\tilde{M}_2 + \tilde{M}_3^{\mathrm{T}}Q_6\tilde{M}_3)/4$, $\tilde{\Gamma}_2 = \tilde{M}_3^{\mathrm{T}}\tilde{R}\tilde{M}_3 +$

$2\tilde{M}_2^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_3$, $\tilde{\Gamma}_3 = \tilde{M}_1^{\mathrm{T}}Q_2\tilde{M}_1 + \tilde{Z}$, $\delta = h_2 f_0^2\lambda_{\max}(Q_1) + h_2^2 f_0^2[\lambda_{\max}(Q_3) + \lambda_{\max}(Q_5)/4 + h_2 \times \lambda_{\max}(E_f^{\mathrm{T}}RE_f)/2]$.

根据式 (39), 如果 $\tilde{\Gamma}_1+(h_2-\tau(t))\tilde{\Gamma}_2+\tau(t)\tilde{\Gamma}_3<0$, 那么 $\dot{V}(t)\le-\varepsilon\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right\|^2+\delta$, 其中 $\varepsilon=\lambda_{\min}[-(\tilde{\Gamma}_1+(h_2-\tau(t))\tilde{\Gamma}_2+\tau(t)\tilde{\Gamma}_3)]$. 因此当 $\varepsilon\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right\|^2>\delta$ 时, $\dot{V}(t)<0$ 成立. 根据 Lyapunov 稳定性理论, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ 最终将收敛于集合 $\Psi=\{\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\big|\left\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)\right\|^2\le\delta/\varepsilon\}$. 因此系统是一致最终有界的.

接下来我们来寻求满足 H_∞ 性能指标 (34) 的要求. 定义

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(t)=[\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau_k)\quad \boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}(\tau_k)\quad \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(t)\ ]^{\mathrm{T}}$$
$$\tilde{M}_1'=[\ \tilde{M}_1\quad 0\quad 0\quad 0\ ],\ \tilde{M}_2'=[\ \tilde{M}_2\quad 0\quad 0\quad 0\ ]$$
$$\tilde{M}_3'=[\ \tilde{M}_3\quad -BK\quad -E_f\quad E_d\ ],\ \tilde{M}_4'=[\ 0\quad I\ ]$$

相应有

$$\boldsymbol{x}(t)=\tilde{M}_1'\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(t),\quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)=\tilde{M}_2'\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(t)$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\tilde{M}_3'\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(t)+\tau(t)E_f\dot{\boldsymbol{f}}(t)$$

定义

$$\begin{aligned}J=\dot{V}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)-\gamma_2^2(\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{d}(t)+\\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau_k)\boldsymbol{e}(\tau_k)+\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}(\tau_k)\boldsymbol{e}_f(\tau_k))\end{aligned}\tag{40}$$

对 $V(t)$ 沿着系统 (33) 的迹求导, 然后类似于上述稳定性证明过程, 最终可得 $J<0$ 成立的充分条件:

$$\tilde{\Gamma}_1'+(h_2-\tau(t))\tilde{\Gamma}_2'+\tau(t)\tilde{\Gamma}_3'<0\tag{41}$$

其中 $\tilde{\Gamma}_1'=2\tilde{M}_1'^{\mathrm{T}}\tilde{P}\tilde{M}_3'-\tilde{M}_2'^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_2'+2\tilde{N}'\tilde{M}_2'+h_2^2/4\times\tilde{M}_2'^{\mathrm{T}}\tilde{Q}_4\tilde{M}_2'+h_2^2/4\cdot\tilde{M}_3'^{\mathrm{T}}Q_6\tilde{M}_3'+\tilde{M}_1'^{\mathrm{T}}\tilde{M}_1'-\gamma_2^2\tilde{M}_4'^{\mathrm{T}}\tilde{M}_4'$, $\tilde{\Gamma}_2'=\tilde{M}_3'^{\mathrm{T}}\tilde{R}\tilde{M}_3'+2\tilde{M}_2'^{\mathrm{T}}\tilde{S}\tilde{M}_3'$, $\tilde{\Gamma}_3'=\tilde{M}_1'^{\mathrm{T}}Q_2\tilde{M}_1'+\tilde{Z}'$. 式中 $\tilde{N}'\in\mathbf{R}^{(3n+n_f+n_w)\times n}$, $\tilde{Z}'\in\mathbf{R}^{3n+n_f+n_w}$ 满足式 (37) 的第一项.

根据凸函数性质, 式 (41) 成立的充要条件为

$$\tilde{\Gamma}_1'+h_2\tilde{\Gamma}_2'<0,\quad \tilde{\Gamma}_1'+h_2\tilde{\Gamma}_3'<0\tag{42}$$

将式 (42) 展开并应用 Schur 补引理可得式 (35) 和 (36). 又因 $J<0$, 对其从 0 到 ∞ 进行积分最终得式 (34). □

注 4. 求解式 (35) ~ (37) 可借鉴注 3 所提出的简单方法. 令 $\tilde{R}=\varepsilon_1\tilde{P}$, $\tilde{S}=\varepsilon_2\tilde{P}$, $Q_2=m_1\tilde{P}$, $Q_4=m_2\tilde{P}$, $Q_6=m_3\tilde{P}$, $\tilde{Y}=\tilde{P}BK$, 相应矩阵不等式可转化为 LMI, 反馈增益矩阵 $K=(\tilde{P}B)^{\dagger}\tilde{Y}$.

4 仿真实例

本节将借助于一个四容位水箱基准实例来验证方法的有效性[30−31]. 其连续时间模型参数为

$$A=\begin{bmatrix}-0.016 & 0 & 0.042 & 0\\ 0 & -0.011 & 0 & 0.033\\ 0 & 0 & -0.042 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.033\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0.083 & 0\\ 0 & 0.063\\ 0 & 0.048\\ 0.031 & 0\end{bmatrix},E_d=\begin{bmatrix}0.01\\ 0.01\\ 0\\ 0.01\end{bmatrix},C=0.5I_4$$

其中, 状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 中的任一分量 $x_i(t)$ $(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 个水箱的水位变化量. $\boldsymbol{y}(t)$ 中的任一分量 $y_i(t)$ 表示对变化量的观测, 0.5 为传感器增益. 测量噪声矩阵 $D_v=[\ 0.01\quad 0\quad 0.01\quad 0.01\ ]^{\mathrm{T}}$, 水箱由两个水泵供水, $\boldsymbol{u}(t)$ 为施加在两个水泵的电压值. 假设故障发生在第一个输入通道, 则可令故障矩阵为 $E_f=-[\ 0.083\quad 0\quad 0\quad 0.031\ ]^{\mathrm{T}}$, 相应假设 1 得以满足. 构造如下连续时变故障:

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{cases}0, & t\le 100\\ 2+2\sin 0.1\pi(t-100), & 100<t\le 800\end{cases}$$

文献 [31] 中传感器采样周期为非均匀, 但需满足周期性重复约束. 本仿真中突破该约束, 假设采样周期为不确定时变的, 满足区间 [0.1, 0.6] 的均匀分布, 因此有 $h_1=0.6$. 仿真中假设噪声 $\boldsymbol{d}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t_k)$ 分别为零均值方差为 0.01 的白噪声过程和序列, 初始状态 $\boldsymbol{x}=[\ 4\quad 4\quad 2\quad 2\ ]^{\mathrm{T}}$. 令 $n_1=1.2, n_2=0.9$, 根据算法 1, 选择 $\mu=0.001$, 则有 $\alpha_{\mathrm{set}}=0.028$, 此时对应的最优值 $\gamma_1=1.6762$, 待设计参数为

$$L=\begin{bmatrix}3.7730 & 0.0068 & -3.3825 & -0.1905\\ 1.4384 & 0.0933 & 2.4692 & -3.8956\\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0014 & -0.0000\\ 1.4080 & 0.0214 & -1.2140 & -0.1214\end{bmatrix}$$

$$F=[\ -30.4955\quad -0.0523\quad 26.6870\quad 2.0909\ ]$$

图 1 给出了故障估计结果, 可以看出所设计观测器能够实现对连续时变故障的准确及时估计. 为了进一步验证算法 1 的有效性, 下面将比较不同衰减率下的故障估计性能. 值得说明的是, 当 $\alpha>0.032$ 时, 定理 1 无解. 图 2 和图 3 给出了衰减率 $\alpha=0,0.01,0.02,0.03$ 与 $\alpha=0.028$ 时的故障估计误差曲线. 从图 2 和 3 中可以看出, 当 $\alpha=0,0.01,0.02$ 时, 估计结果要明显差于算法 1 即当 $\alpha=0.028$ 时的估计结果. 特别的, 当 $\alpha=0$

时, 估计效果最差, 这说明了相比于文献 [20], 本文引入衰减率显著改善了时变故障估计性能. 而对于 $\alpha = 0.030$, 则无法从图中直接观察它与 $\alpha = 0.028$ 的优劣. 表 1 进一步列出了不同衰减率下的 γ_1^2, γ_1/α, 以及故障估计误差范数 $\|\boldsymbol{e}_f\|_2$ 等性能指标值. 从表 1 中可以看出, 最优值 γ_1 是随着 α 的增大而增大的. 并且当 $\alpha = 0.028$ 时, γ_1/α 最小, 对应的 $\|\boldsymbol{e}_f\|_2$ 也为最小值, 这再次验证了算法 1 的优越性.

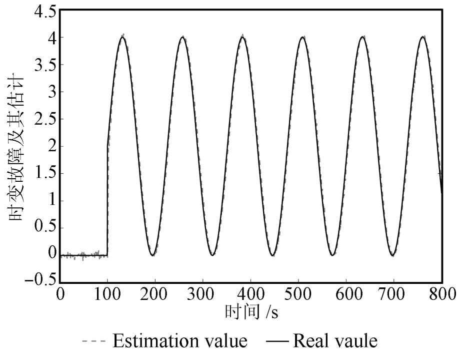

图 1 连续时变故障及其估计 ($\alpha = 0.028$)

Fig. 1 The continuous time-varying fault and its estimation ($\alpha = 0.028$)

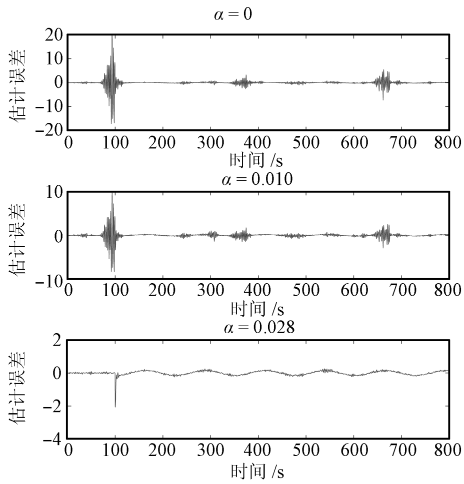

图 2 不同衰减率下的故障估计误差 ($\alpha = 0, 0.01, 0.028$)

Fig. 2 The fault estimations errors under different cases ($\alpha = 0, 0.01, 0.028$)

接下来设计非均匀采样数据容错控制器. 根据 $(I - BB^{\dagger})E_f = 0$ 计算 $B^{\dagger}$ 有:

$$B^{\dagger} = \begin{bmatrix} 11.9550 & -10.5732 & 0 & 0.2469 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

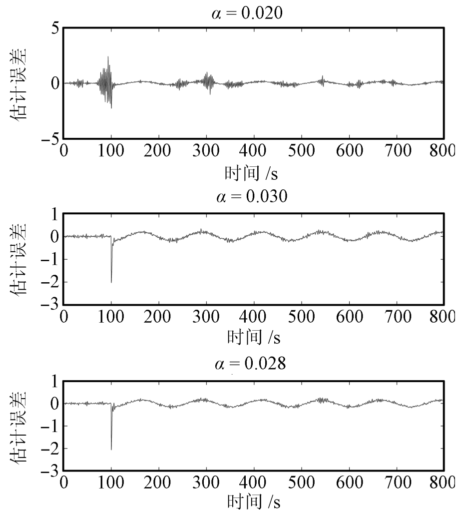

图 3 不同衰减率下的故障估计误差 ($\alpha = 0.02, 0.03, 0.028$)

Fig. 3 The fault estimations errors under different cases ($\alpha = 0.02, 0.03, 0.028$)

进一步假设控制输入也是非等间隔更新的, 更新周期满足区间 [0.1, 1] 的随机均匀分布, 则有 $h_2 = 1$. 令 $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0.92$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0.1$, 求解定理 2, 可得最优值 $\gamma_2 = 1.2721$, 以及

$$K = \begin{bmatrix} 1.3932 & -0.5688 & 0.0944 & 2.6290 \\ 0.0484 & 0.0053 & 0.6033 & 0.1883 \end{bmatrix}$$

图 4 给出了三种情况下的系统输出曲线, 可以看出在发生故障时, 如果控制器无容错能力, 则系统输出受故障影响较大; 而利用本文所设计的容错控制几乎可以重现系统在无故障时的性能.

5 结论

本文研究了一类非均匀采样数据系统的主动容

表 1 不同衰减率下的相关性能指标

Table 1 some performance indexes under different cases

α	0.000	0.010	0.020	0.025	0.026	0.027	0.028	0.029	0.030	0.031	0.032
γ_1^2	2.6420	2.6700	2.6994	2.7155	2.7190	2.7230	2.8095	3.2645	4.0894	5.8677	12.8567
$\frac{\gamma_1}{\alpha}$	∞	163.4001	82.1491	65.9149	63.4210	61.1165	59.8629	62.3032	67.4079	78.1400	112.0508
$\|\boldsymbol{e}_f\|_2$	72.6907	37.3438	11.9439	9.3070	6.7464	6.6828	6.4369	6.8442	7.4780	8.4312	8.5384

错最优设计问题. 由于所考虑的故障是连续时变的, 为此在分析自适应诊断观测器适用范围的基础上, 提出改进的连续时间观测器设计方法, 使得误差系统能够满足 α 指数稳定性和 H_∞ 鲁棒性两项性能指标, 并同时提出算法对两者进行权衡. 进而利用所获得的故障和状态信息, 设计非均匀采样容错控制器来保证故障系统性能, 所设计的控制器有效地处理了估计误差以及未知的时变故障内采样特性等不利因素, 因此为故障诊断和容错控制集成设计方案.

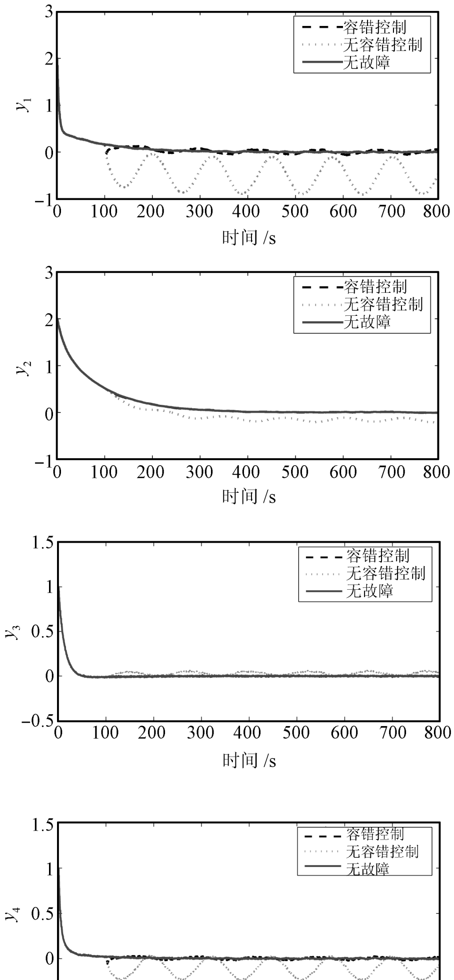

图 4 系统输出曲线

Fig. 4 system outputs

References

1 Zhou Dong-Hua, Ye Yin-Zhong. *Modern Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Beijing: Tsinghua Press, 2000
(周东华, 叶银忠. 现代故障诊断与容错控制. 北京: 清华大学, 2000)

2 Zhou Dong-Hua, Liu Yang, He Xiao. Review on fault diagnosis techniques for closed-loop systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1933−1943
(周东华, 刘洋, 何潇. 闭环系统故障诊断技术综述. 自动化学报, 2013, **39**(11): 1933−1943)

3 Jiang Bin, Mao Ze-Hui, Yang Hao, Zhang You-Min. *Fault Diagnosis and Fault Accommodation for Control Systems*. Beijing: Defense Industrial Press, 2009
(姜斌, 冒泽慧, 杨浩, 张友民. 控制系统的故障诊断与故障调节. 北京: 国防工业出版社, 2009)

4 Jin Xiao-Zheng, Yang Gang-Hong, Chang Xiao-Heng, Che Wei-Wei. Robust fault-tolerant H_∞ control with adaptive compensation. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(1): 31−42
(金小峥, 杨光红, 常晓恒, 车伟伟. 容错控制系统鲁棒 H_∞ 和自适应补偿设计. 自动化学报, 2013, **39**(1): 31−42)

5 Zhang Y M, Jiang J. Integrated active fault-tolerant control using IMM approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, **37**(4): 1221−1235

6 Polycarpou M M. Fault accommodation of a class of multivariable nonlinear dynamical systems using a learning approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(5): 736−742

7 Jiang B, Chowdhury F N. Fault estimation and accommodation for linear MIMO discrete-time systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**(3): 493−499

8 Jiang B, Staroswiecki M, Cocquempot V. Fault accommodation for nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(9): 1578−1583

9 Chen T W, Francis B A. *Optimal Sampled-data Control Systems*. New York: Springer, 1995

10 Iman I, Chen T W, Zhao Q. Norm invariant discretization for sampled-data fault detection. *Automatica*, 2005, **41**(9): 1633−1637

11 Qiu Ai-Bing, Wen Cheng-Lin, Jiang Bin. A hybrid system approach to robust fault detection for a class of sampled-data systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1182−1188
(邱爱兵, 文成林, 姜斌. 基于混杂系统方法的一类采样数据系统鲁棒故障检测. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1182−1188)

12 Niemann H, Stoustrup J. Fault tolerant controllers for sampled-data systems. In: Proceedings of the 2004 American Control Conference. Boston, MA: IEEE, 2004. 3490−3495

13 Mao Z H, Jiang B, Shi P. Fault tolerant control for a class of nonlinear sampled-data systems via a Euler approximate observer. *Automatica*, 2010, **46**(11): 1852−1859

14 Iman I, Shah S L, Chen T. A direct approach to fault detection in non-uniformly sampled systems. In: Proceedings of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 10148−10153

15 Iman I, Shah S L, Chen T W. Parity space fault detection based on irregularly sampled data. In: Proceedings of the 2008 American Control Conference. Seattle, WA: IEEE, 2008. 2798−2803

16 You Ke-You, Xie Li-Hua. Survey of recent progress in networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(2): 101−118
(游科友, 谢立华. 网络控制系统的最新研究综述. 自动化学报, 2013, **39**(2): 101−118)

17 Li W H, Han Z G, Shah S L. Subspace identification for FDI in systems with non-uniformly sampled multirate data. *Automatica*, 2006, **42**(4): 619−627

18 Li W H, Shah S L, Xiao D Y. Kalman filters in non-uniformly sampled multirate systems: for FDI and beyond. *Automatica*, 2008, **44**(1): 199−208

19 Qiu Ai-Bing, Jiang Bin. An output delay approach to sensor fault detection for non-uniformly sampled-data systems. *Control Theory and Applications*, 2010, **27**(12): 1757−1765
(邱爱兵, 姜斌. 基于输出时滞方法的非均匀采样数据系统传感器故障检测. 控制理论与应用, 2010, **27**(12): 1757−1765)

20 Wen C L, Qiu A B, Jiang B. An output delay approach to fault estimation for sampled-data systems. *Science China: Information Science*, 2012, **55**(9): 2128−2138

21 Wang H, Daley S. Actuator fault diagnosis: an adaptive observer-based technique. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(7): 1073−1078

22 Jiang B, Staroswiecki M, Cocquempot V. Fault identification for a class of time-delay systems. In: Proceedings of the 2002 American Control Conference. Anchorage AK: IEEE, 2002. 2239−2244

23 Zhang Ke, Jiang Bin, Shumsky Alexey. A new criterion of fault estimation for neutral delay systems using adaptive observer. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(1): 85−91
(张柯, 姜斌, SHUMSKY Alexey. 一种新的基于自适应观测器中立时滞系统故障估计的设计方法. 自动化学报, 2009, **35**(1): 85−91)

24 Jiang B, Zhang K, Shi P. Less conservative criteria for fault accommodation of time-varying delay systems using adaptive fault diagnosis observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, **24**(4): 322−334

25 Naghshtabrizi P, Hespanha J P, Teel A R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, 2008, **57**(5): 378−385

26 Fujioka H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(10): 2440−2445

27 Oishi Y, Fujioka H. Stability and stabilization of aperiodic sampled-data control systems using robust linear matrix inequalities. *Automatica*, 2010, **46**(8): 1327−1333

28 Seuret A. Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 8130−8135

29 Liu Kang-Zhi, Yao Yu. *Linear Robust Control*. Beijing: Science Press, 2013
(刘康志, 姚郁. 线性鲁棒控制. 北京: 科学出版社, 2013)

30 Johansson K H. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2000, **8**(3): 456−465

31 Li W H, Shah S. Fault detection and isolation in non-uniformly sampled systems. In: Proceedings of IFAC Sypmosium on Dynamics and Control of Process Systems. Cambridge, MA: IFAC, 2004. 1−6

邱爱兵 博士, 南通大学电气工程学院讲师. 主要研究方向为故障诊断与容错控制, 采样系统控制.
E-mail: aibqiu@ntu.edu.cn
(**QIU Ai-Bing** Ph. D., lecture at the School of Electrical Engineering, Nantong University. His research interest covers fault diagnosis, fault tolerant control, and sampled-data control.)

吉虹钢 南通大学电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为基于事件触发的故障诊断与容错控制.
E-mail: jhg19891215@163.com
(**JI Hong-Gang** Master student at the School of Electrical Engineering, Nantong University. His research interest covers event-triggered fault diagnosis and fault tolerant control.)

顾菊平 博士, 南通大学电气工程学院教授. 主要研究方向为电机及控制, 机器人及控制. 本文通信作者.
E-mail: gu.jp@ntu.edu.cn
(**Gu Ju-Ping** Ph. D., professor at the School of Electrical Engineering, Nantong University. Her research interest covers motor and its control, robot and its control. Corresponding author of this paper.)