

基于二进神经网络的 0/1 分布系统可靠性分析

杨娟^{1,2} 陆阳¹ 黄镇谨^{1,3}

摘要 系统可靠性的计算依赖于各基本单元的 0/1 分布关系及其构成的布尔逻辑. 本文利用二进制神经网络可以完备实现布尔逻辑的特性, 提出一种基于二进制神经网络的可靠性分析方法. 该方法针对每个二进制神经元的输入都是 0/1 逻辑关系的线性组合这一特点, 提出并且证明了 0/1 分布的线性组合的概率分布函数; 建立系统功能与布尔函数间的等价关系, 将系统转化为相应的二进制神经网络; 利用线性组合的概率分布函数, 通过逐层计算该二进制神经网络的 0/1 输出概率, 解决了一般系统的可靠性计算问题.

关键词 二进制神经网络, 系统可靠性, 分布函数, 线性组合

引用格式 杨娟, 陆阳, 黄镇谨. 基于二进神经网络的 0/1 分布系统可靠性分析. 自动化学报, 2014, 40(7): 1472–1480

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01472

Reliability of Systems with 0/1 Distribution Based on Binary Neural Networks

YANG Juan^{1,2} LU Yang¹ HUANG Zhen-Jin^{1,3}

Abstract The computing of system reliability relies on the relationship of 0/1 distribution of components and their boolean logic. With the help of the characteristic that binary neural networks can complete the whole boolean function, we propose a method of reliability analysis based on binary neural networks. According to the input of every binary neuron is a 0 or 1 logic variable, we provide and prove the distribution function of the linear combination of 0/1 distribution. Then the equivalent relation between the system function and boolean function is established, and the system is converted to an equivalent binary neural network. As a result, using the distribution function, we can successfully resolve the problem of reliability analysis of general systems by computing the 0/1 output probability layer by layer.

Key words Binary neural networks, system reliability, distribution function, linear combination

Citation Yang Juan, Lu Yang, Huang Zhen-Jin. Reliability of system with 0/1 distribution based on binary neural networks. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1472–1480

系统的可信性指该系统可以提供确实可信服务的综合能力^[1-2], 而可靠性是可信性的属性之一, 也是最早为人们所公认的评估可信性的标准之一, 是系统在一定时间内保持正常运行的概率. 可靠性研究起源于军事技术, 现已经扩展到国民经济的许多领域, 给企业与社会带来了巨大经济效益, 因而引起了广泛的重视. 然而精确评估系统可靠性是相当困难的, 在有些情况下几乎是不可能的, 如果得到了系

统的结构, 系统可靠性分析往往比较容易. 从上个世纪 80 年代起, 很多学者对此进行了研究, 但往往局限于一些典型的系统如串联系统、并联系统、冷储备系统和温储备系统等^[3], 对于线性多数表决系统是近年来研究的热点^[4-6]. 目前系统可靠性的分析方法很多都是基于图论中最小割算法^[7], 而对于一般的系统, 还没有统一的方法.

所谓系统, 是为完成某一特定功能, 由若干个彼此有联系而又能相互协调工作的单元组成的综合体. 由于二进制神经网络可以表达完备的布尔函数^[8-11], 因此单元相互协调实现的逻辑功能可以通过训练学习得到一个二进制神经网络. 本文利用文献 [12] 提出的学习算法将系统功能训练为二进制神经网络, 每个神经元表达了单元间的线性组合, 再通过讨论线性组合的概率分布函数, 进而得到系统的可靠性.

1 二进制神经网络与系统功能

二进制神经网络是输入与输出均为二进制的一种人工神经网络, 可以精确实现任意给定的布尔函数. 二进制神经网络主要采用输入层、隐层、输出层三层结构, 神经元采用硬限幅函数作为激发函数, 每个神经元等价于一个分类超平面. 对于布尔函数, 分为线

收稿日期 2013-03-12 录用日期 2013-12-09
Manuscript received March 12, 2013; accepted December 9, 2013

安徽省自然科学基金项目 (1408085QF117), 合肥工业大学博士专项科研资助基金 (2013HGBZ0182), 合肥工业大学青年教师创新项目 (2013HGQC0019) 资助

Supported by Natural Science Foundation of Anhui Province (1408085QF117), Doctoral Special Research Fund of Hefei University of Technology (2013HGBZ0182), Young Teacher Innovation Project of Hefei University of Technology (2013HGQC0019)

本文责任编辑 董海荣

Recommended by Associate Editor DONG Hai-Rong

1. 合肥工业大学计算机与信息学院 合肥 230009 2. 合肥工业大学信息与通信工程博士后科研流动站 合肥 230009 3. 广西工学院计算机工程系 柳州 545006

1. School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009 2. Postdoctoral Programs at Information and Communication Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009 3. Department of Computer Engineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545006

性可分与线性不可分两种类型; 线性可分的布尔函数隐层仅用一个神经元即可以实现, 而线性不可分的函数隐层需要多于一个神经元才可以实现. 由于每个二进神经元都对应于一个分类超平面, 因此所有的布尔函数都等价于一个或者多个分类超平面. 在 n 维布尔空间中, 设输入为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 输出为 y , 输入与神经元间的连接权为 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 阈值为 θ , 则神经元表示为

$$y = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \geq 0 \\ 0, & \sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta < 0 \end{cases}$$

神经元所对应的分类超平面为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$.

对于一个含有 n 个单元组成的系统, 设单元为 x_1, x_2, \dots, x_n , 并且每个单元只有两种状态, 即正常与不正常, 假设单元间是相互独立的, 这些单元可由一个 2-值函数表达: 对于 $t > 0$, 设 $x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{时间 } t \text{ 正常} \\ 0, & \text{时间 } t \text{ 不正常} \end{cases}$, 且假设单元在每个时刻服从 0/1 分布: $X \sim \text{Bern}(p_i(t))$.

其中, 对于每个单元在 $t > 0$ 时刻的寿命假设服从指数分布 $p_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, 下面为讨论方便, 将 $p_i(t)$ 简写为 p_i .

系统所实现的功能是各单元联合作用的结果, 故系统功能可以视为单元的布尔函数, 即设系统功能为 F , 则其可以表示为 $B_2^n \rightarrow B_2$ 的映射 $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若 $F = 1$, 表示正确实现系统功能, 若 $F = 0$, 表示不能正确实现系统功能. 由于系统能否正常工作可由一个关于单元的布尔函数来表达, 布尔函数又可以训练为一个二进神经网络, 二进神经网络又等价于一个或多个分类超平面, 故对于系统能否正常工作可以转化为对分类超平面的研究.

因而, 对于一个给定的系统, 首先对于单元的所有状态与相应时刻系统工作状态训练成一个二进神经网络, 即将系统功能与单元间的关系映射成二进神经网络, 如图 1 所示.

图 1 中每个隐层分类超平面为:

$$\begin{cases} S_1 : w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \dots + w_{1n}x_n - \theta_1 = 0 \\ S_2 : w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \dots + w_{2n}x_n - \theta_2 = 0 \\ \vdots \\ S_L : w_{L1}x_1 + w_{L2}x_2 + \dots + w_{Ln}x_n - \theta_L = 0 \end{cases} \quad (1)$$

且

$$S_i = \begin{cases} 1, & w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \dots + w_{in}x_n \geq \theta_i \\ 0, & w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \dots + w_{in}x_n < \theta_i \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, L$, L 个隐层神经元在输出层所构成的分类超平面为 $W_1 S_1 + W_2 S_2 + \dots + W_L S_L - \theta = 0$, 故系统功能

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & W_1 S_1 + W_2 S_2 + \dots + W_L S_L \geq \theta \\ 0, & W_1 S_1 + W_2 S_2 + \dots + W_L S_L < \theta \end{cases}$$

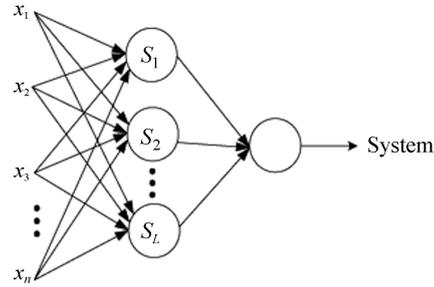


图 1 二进神经网络实现系统功能结构图
Fig.1 Implementation the system function by binary neural networks

可靠性定义为在规定的条件下, 在规定的时间内, 完成规定功能的概率. 为了研究系统的可靠性, 需讨论在 $t > 0$ 时刻 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ 的概率, 即需考虑 $W_1 S_1 + W_2 S_2 + \dots + W_L S_L - \theta$ 的分布函数, 为此首先需要得到每个神经元 S_1, S_2, \dots, S_L 的分布函数, 由于单元 x_1, x_2, \dots, x_n 服从 0/1 分布, 即需考虑 0/1 分布的线性组合的概率分布函数. 在第 2 节中首先讨论线性组合 $Y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$ 的分布, 设其分布函数为 $\Phi(x) = p\{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n \leq x\}$.

2 系统可靠性分析方法

2.1 0/1 分布的线性组合的概率分布函数

对于随机变量 $Y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$, 在相等系数 $w_1 = w_2 = \dots = w_n$ 的情况下, 已有明确的分布函数, 但二进神经元的权值往往是不相等的, 目前其分布情况仍然未知. 本节针对此问题, 首先提出求解随机变量 Y 的分布函数的算法步骤, 再给出其理论证明.

实现 $Y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$ 分布函数的具体步骤如下:

步骤 1. 建立一个集合 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2^n}\}$, 其中 $b_i = \sum_{l=1}^n a_{il} w_l$, a_{il} 为将 $i-1$ 转化为 n 位二进制的第 l 位, $1 \leq i \leq 2^n, 1 \leq l \leq n$;

步骤 2. 将集合 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2^n}\}$ 中元素从小到大排序, 并存入集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{2^n}\}$ 中, 其中 $c_k (1 \leq k \leq 2^n)$ 包含 b_i 与其角标 i 两条记录;

步骤 3. 将数轴 $(-\infty, +\infty)$ 划分为 $2^n + 1$ 个区间, 在每个区间内分别求 Y 的分布函数, 区间划分如

下: $(-\infty, c_1), [c_1, c_2), \dots, [c_k, c_{k+1}), \dots, [c_{2^n-1}, c_{2^n}), [c_{2^n}, +\infty)$, 为进一步得到

1) 当 $x \in [c_{2^n}, +\infty)$ 时, $\Phi_1(x) = p\{Y \leq x\} = 1$;

2) 当 $x \in [c_{2^n-1}, c_{2^n})$ 时, $\Phi_2(x) = p\{Y \leq x\} = 1 - \prod_{j=1}^n p_j$;

3) 当 $x \in [c_{2^n-2}, c_{2^n-1})$ 时, 找到集合 B 中所对应的元素 i , 进而得到 $i-1$ 转化为 n 位二进制数的每一位 $a_{il} (l = 1, 2, \dots, n)$, 进一步得到

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) &= p\{Y \leq x\} = \\ &1 - \prod_{j=1}^n p_j - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} = \\ &\Phi_2(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} \end{aligned}$$

4) 当 $x \in [c_{2^n-3}, c_{2^n-2})$ 时, 找到集合 B 中所对应的元素 c_{2^n-2} , 及相应的角标 i , 进而得到 $i-1$ 转化为 n 位二进制数的每一位 $a_{il} (l = 1, 2, \dots, n)$, 进一步得到

$$\Phi_4(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_3(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})}$$

依此类推, 得到.

$2^n + 1 - k$ 当 $x \in [c_k, c_{k+1})$ 时, 找到集合 B 中所对应的元素 c_{k+1} , 及相应的角标 i , 进而得到 $i-1$ 转化为 n 位二进制数的每一位 $a_{il} (l = 1, 2, \dots, n)$,

$$\begin{aligned} \Phi_{2^n+1-k}(x) &= p\{Y \leq x\} = \\ &\Phi_{2^n-k}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} \end{aligned}$$

依此类推, 最后可得.

2^n 当 $x \in [c_1, c_2)$ 时, 找到集合 B 中所对应的元素 c_2 , 及相应的角标 i , 进而得到 $i-1$ 转化为 n 位二进制数的每一位 $a_{il} (l = 1, 2, \dots, n)$, 进一步得到

$$\begin{aligned} \Phi_{2^n}(x) &= p\{Y \leq x\} = \\ &\Phi_{2^n-1}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} \end{aligned}$$

$2^n + 1$ 当 $x \in (-\infty, c_1)$ 时, $\Phi_{2^n+1}(x) = p\{Y \leq x\} = 0$.

由此可得到分布函数 $\Phi(x) = p\{Y = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n \leq x\}$ 为式 (2). 另外, 如果 $c_k = c_{k+1}$, 则将区间 $[c_{k-1}, c_k), [c_k, c_{k+1})$ 合并得到 $[c_{k-1}, c_{k+1})$, 如果 $c_{k-1} = c_{k+1}$, 再继续合并, 直到区间存在为止, 然后在新的区间如 $[c_{k-1}, c_{k+1})$, 找到 c_{k+1} 所对应的集合 B 中的元素, 及其相应的角标 i , 进而得到 $i-1$ 转化为的 n 位二进制数的每一位 $a_{il} (l = 1, 2, \dots, n)$, 再计算其分布函数为:

$$\begin{aligned} \Phi_{2^n+2-k}(x) &= \Phi_{2^n+1-k}(x) = p\{Y \leq x\} = \\ &\Phi_{2^n-k}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) = p\{Y \leq x\} = 1, & x \in [c_{2^n}, +\infty) \\ \Phi_2(x) = p\{Y \leq x\} = 1 - \prod_{j=1}^n p_j, & x \in [c_{2^n-1}, c_{2^n}) \\ \Phi_3(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_2(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})}, & x \in [c_{2^n-2}, c_{2^n-1}) \\ \Phi_4(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_3(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})}, & x \in [c_{2^n-3}, c_{2^n-2}) \\ \vdots & \\ \Phi_{2^n+1-k}(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_{2^n-k}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})} & x \in [c_k, c_{k+1}) \\ \vdots & \\ \Phi_{2^n}(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_{2^n-1}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1 - p_l)^{(1-a_{il})}, & x \in [c_1, c_2) \\ \Phi_{2^n+1}(x) = p\{Y \leq x\} = 0, & x \in (-\infty, c_1) \end{cases} \quad (2)$$

下面定理保证了该算法的正确性.

定理 1. 设随机变量在每时刻均服从 0/1 分布: $X \sim \text{Bern}(p_i(t))$.

对于任意实数 w_1, w_2, \dots, w_n , 随机变量 $Y = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n$ 的分布函数为式 (2).

证明. 同上述算法设集合 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2^n}\}$, $b_i = \sum_{l=1}^n a_{il}w_l$, 其中 a_{il} 为将 $i-1$ 转化为 n 位二进制数的第 l 位, 故集合 B 中元素相当于是从 w_1, w_2, \dots, w_n 中任选 s ($0 \leq s \leq n$, s 为 a_{il} 中不为 0 的个数和) 项不重复的元素和, 由于 x_1, x_2, \dots, x_n 服从 0/1 分布, 故 $Y = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n$ 的值属于集合 B . 集合 B 中的元素从小到大排序放入集合 C 中, 当 $x \in [c_k, c_{k+1})$ 时, 故有

$$\Phi_{2^{n+1-k}}(x) = p\{Y \leq x\} = p\{Y = c_k\} + p\{Y = c_{k-1}\} + \dots + p\{Y = c_1\}$$

当 $x \in [c_{k+1}, c_{k+2})$ 时, 有

$$\Phi_{2^{n-k}}(x) = p\{Y \leq x\} = p\{Y = c_{k+1}\} + p\{Y = c_k\} + p\{Y = c_{k-1}\} + \dots + p\{Y = c_1\}$$

故有

$$\Phi_{2^{n+1-k}}(x) = \Phi_{2^{n-k}}(x) - p\{Y = c_{k+1}\} \quad (3)$$

对于 $p\{Y = c_{k+1}\}$ 即表示为 w_1, w_2, \dots, w_n 中任选 s 项不重复的元素和为 c_{k+1} 的概率, 故此由集合 B 与集合 C 可得

$$p\{Y = c_{k+1}\} = \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1-p_l)^{(1-a_{il})} \quad (4)$$

代入式 (3) 可得

$$\Phi_{2^{n+1-k}}(x) = \Phi_{2^{n-k}}(x) - p\{Y = c_{k+1}\} = \Phi_{2^{n-k}}(x) - \prod_{l=1}^n p_l^{a_{il}} (1-p_l)^{(1-a_{il})}$$

故可得式 (2). \square

2.2 简化布尔函数训练方法

在 n 维布尔函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中, 经常会存在某个变量 x_i 与其余变量构成的子系统间关系为逻辑“与”的情况, 可表述为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i \wedge F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$; 或者变量 x_i 与其余变量构成的子系统间关系为逻辑“或”的情况, 可表述为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i \vee F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. 则可以首先将这类变量 x_i 与其它变量构成的子系统间的逻辑“与”或

者逻辑“或”关系提取出来, 进而可以在低维的情况下训练神经网络, 相应地减少网络训练的复杂程度; 其次再把提取出的逻辑关系补充到简化的网络中, 最终可以得到实现系统功能的完整网络结构. 本小节中定理 3 和定理 4 分别给出了以逻辑“与”关系和以逻辑“或”关系还原网络的理论依据.

根据布尔空间线性可分的概念, 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是定义于 $\{0,1\}$ 的 n 维线性可分布尔函数, $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$ 是 F 的分类超平面, 则 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ 时, $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \geq 0$; $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 时, $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta < 0$. 对于如下结构的二进神经元

$$O = U\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta\right), U(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则称二进神经元 O 表达布尔函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 记 O 为 $O(X, W, \theta)$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

定义 1. 二进神经网络中, 设 x_i 的权值为 w_i , 定义

$$x_i^* = \begin{cases} x_i, & w_i > 0 \\ \bar{x}_i, & w_i < 0 \end{cases}$$

其中 \bar{x}_i 为对 x_i 取非逻辑.

定义 1 表明在 x_i^* 中正逻辑变量的权值为正数, 负逻辑变量的权值为负数. 如 $x_1 \wedge x_2$ 表示正逻辑变量 x_1 与 x_2 的与运算, $x_1 \wedge \bar{x}_2$ 表示正逻辑变量 x_1 与负逻辑变量 \bar{x}_2 的与运算; 如 $x_1^* \wedge x_2^* = x_1 \wedge \bar{x}_2$, 则对应的权值有 $w_1 > 0, w_2 < 0$.

定理 2^[13]. 二进神经元输入输出定义于 $\{0,1\}$, $X = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$, $X' = (x_1^*, x_2^*, \dots, \bar{x}_j^*, \dots, x_n^*)$, 如果对于布尔函数 $F(X)$, 用二进神经元 $O(X, W_1, \theta_1)$ 可以表达, 则对于布尔函数 $F(X')$, 可以用二进神经元 $O(X', W_2, \theta_2)$ 表达, 其中

$$\begin{cases} w_{2i} = w_{1i}, i \neq j \\ w_{2j} = -w_{1j} \\ \theta_2 = \theta_1 - w_{1j} \end{cases}$$

$W_1 = \{w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}\}$, $W_2 = \{w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}\}$.

根据定理 2, 对于二进神经元 $O(X, W, \theta)$, 可将其权系数集合 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 中负权值, 调整为正权值, 并相应的调节阈值, 形成新的神经元 $O(X, W', \theta')$, 使其权系数均为正数, 故本小节内假设神经元的权系数均为正值.

定理 3. 若函数 $F'(x_2, \dots, x_n)$ 是 $n-1$ 维线性可分函数, 其分类超平面是 $\sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta = 0$, 且 $w_i > 0$, 则对于 n 维布尔函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

也为线性可分函数, 其分类超平面为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - (\theta + w_1) = 0$, 且 $\sum_{i=2}^n w_i < \theta + w_1$, $w_1 > 0$.

证明. 对于布尔函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$, 若 $x_1 = 0$, 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \wedge F'(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

又因为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - (\theta + w_1) = \sum_{i=2}^n w_i x_i - (\theta + w_1)$, 且 $w_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 及 $\sum_{i=2}^n w_i < \theta + w_1$, 故

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i x_i - (\theta + w_1) &= \sum_{i=2}^n w_i x_i - (\theta + w_1) \leq \\ &\sum_{i=2}^n w_i - (\theta + w_1) < 0 \end{aligned}$$

若 $x_1 = 1$, 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \wedge F'(x_2, x_3, \dots, x_n) = F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

又因为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - (\theta + w_1) = w_1 + \sum_{i=2}^n w_i x_i - (\theta + w_1) = \sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta$, 故 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \wedge F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$ 为线性可分函数, 其分类超平面为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - (\theta + w_1) = 0$. \square

定理 4. 若函数 $F'(x_2, \dots, x_n)$ 是 $n-1$ 维线性可分函数, 其分类超平面是 $\sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta = 0$, 且 $w_i > 0$, 则对于 n 维布尔函数,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

也为线性可分函数, 其分类超平面为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$, 且 $w_1 \geq \theta > 0$.

证明. 若 $x_1 = 0$, 有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \vee F'(x_2, x_3, \dots, x_n) = F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$, 又因

为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = \sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta$, 故当 $x_1 = 0$ 时结论成立.

若 $x_1 = 1$, 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \vee F'(x_2, x_3, \dots, x_n) = 1$$

又因为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = w_1 + \sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta$, 且 $w_i > 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 及 $w_1 \geq \theta > 0$, 故

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = w_1 + \sum_{i=2}^n w_i x_i - \theta \geq w_1 - \theta \geq 0$$

故有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee F'(x_2, x_3, \dots, x_n)$ 为线性可分函数, 其分类超平面为 $\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta = 0$. \square

2.3 系统可靠性分析步骤

根据第 2.2 节分析, 可以首先对系统做化简, 将某些单元以并联或串联间的关系提取出来, 故针对系统可靠性分析可以按下述步骤进行:

步骤 1. 根据系统的功能框图画出系统的可靠性框图, 本文主要考虑在可靠性框图已知的基础上进行研究, 故此步骤不做进一步说明;

步骤 2. 按照可靠性框图化简并联或串联单元, 得到需分析讨论的精简结构;

步骤 3. 对于已经得到的简化后的可靠性框图, 写出其真值表;

步骤 4. 根据其真值表, 将其训练成二进神经网络;

步骤 5. 再将所提取出的单元补充到原网络结构中, 相应调整神经元权值及阈值;

步骤 6. 根据每个神经元的权值及阈值情况, 得到单元间线性组合的分布函数;

步骤 7. 最后得到系统的可靠性.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) = p\{Y \leq x\} = 1, & x \in [1.2, +\infty) \\ \Phi_2(x) = p\{Y \leq x\} = 1 - p_1 p_2 p_3, & x \in [1.1, 1.2) \\ \Phi_3(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_2 - (1 - p_1) p_2 p_3, & x \in [0.9, 1.1) \\ \Phi_4(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_3 - p_1 (1 - p_2) p_3, & x \in [0.8, 0.9) \\ \Phi_5(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_4 - (1 - p_1) (1 - p_2) p_3, & x \in [0.4, 0.8) \\ \Phi_6(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_5 - p_1 p_2 (1 - p_3), & x \in [0.3, 0.4) \\ \Phi_7(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_6 - (1 - p_1) p_2 (1 - p_3), & x \in [0.1, 0.3) \\ \Phi_8(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_7 - p_1 (1 - p_2) (1 - p_3), & x \in [0, 0.1) \\ 0 & x \in [-\infty, 0) \end{cases} \quad (5)$$

3 实例验证

本节首先对三个典型系统进行分析, 其中包括串联系统、并联系统、表决系统、验证本文提出算法的有效性; 其次, 再针对一个非线性系统进行分析, 以便说明可靠性分析的具体步骤. 此处为简单起见, 前三个举例中考虑系统只有 3 个单元 x_1, x_2, x_3 , 并且对于 $t > 0$ 均服从 0/1 分布, $X \sim \text{Bern}(p_i(t))$. 且 $p_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$.

例 1. 串联系统: 系统由 n 个单元组成, 任一单元失效就引起系统失效, 图 2 表示由 n 个单元组成的串联系统可靠性框图.

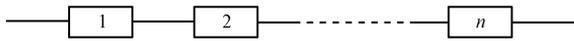


图 2 串联系统可靠性框图

Fig. 2 The reliability block diagram of the series system

考虑线性组合 $Y = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3$, 其中, $w_1 = 0.3, w_2 = 0.1, w_3 = 0.8$, 如果设 $\theta_1 = \sum_{i=1}^3 |w_i| - \min(|w_1|, |w_2|, |w_3|) = 1.1$, $\theta_2 = \sum_{i=1}^3 |w_i| = 1.2$, 文献 [14] 表明若 $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ 时, 二进神经元 $O(X, W, \theta)$ 表达逻辑关系 $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, 此逻辑表达即为含有 3 个单元 x_1, x_2, x_3 的串联系统, 且当 $O(X, W, \theta) = 1$ 时, 即 $Y = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \geq \theta$, 系统正常工作.

采用 2.1 节提出的算法, 首先计算集合 $B = \{0, 0.3, 0.1, 0.4, 0.8, 1.1, 0.9, 1.2\}$, 再将集合 B 排序得到集合 $C = \{0(1), 0.1(3), 0.3(2), 0.4(4), 0.8(5), 0.9(7), 1.1(6), 1.2(8)\}$, 将数轴分成 $2^3 + 1 = 9$ 个区间, 在每个区间分别计算 Y 的分布函数, 最后得到其分布函数为式 (5).

当 $Y \geq \theta$ 时系统正常工作, 且 $1.1 < \theta \leq 1.2$, 故正常工作的概率为

$$p\{Y \geq \theta\} = p\{Y > \theta\} = 1 - p\{Y \leq \theta\} = 1 - \Phi_2(x) = p_1p_2p_3$$

与经典理论分析的结果是一致的.

例 2. 并联系统: 系统由 n 个单元组成, 只有当这 n 单元都失效时才引起系统失效, 图 3 表示由 n

个单元组成的并联系统可靠性框图.

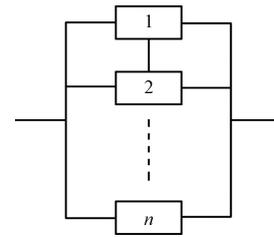


图 3 并联系统可靠性框图

Fig. 3 The reliability block diagram of the parallel system

同样考虑线性组合 $Y = 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.8x_3$, 文献 [14] 表明若 $0 < \theta \leq 0.1$ 时, 二进神经元 $O(X, W, \theta)$ 表达逻辑关系 $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, 此逻辑表达即为含有 3 个单元 x_1, x_2, x_3 的并联系统, 且当 $O(X, W, \theta) = 1$ 时, 即 $Y \geq \theta$, 系统正常工作. 因为其权系数和例 1 相同, 故此处 Y 的分布函数仍为式 (5). 当 $Y \geq \theta$ 时系统正常工作, 且 $0 < \theta \leq 0.1$, 故正常工作的概率为

$$p\{Y \geq \theta\} = p\{Y > \theta\} = 1 - p\{Y \leq \theta\} = 1 - \Phi_8(x)$$

再由式 (5), 可一步得 $p\{Y \geq \theta\} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$, 与经典理论分析的结果是一致的.

例 3. 表决系统: n 中取 k 的表决系统由 n 个单元组成, 当 n 个单元中有 k 个或 k 个以上单元正常工作时, 系统才正常工作 ($1 \leq k \leq n$), 即当失效的单元数大于或等于 $n - k + 1$ 时, 系统失效, 通常记为 $k/n(G)$ 系统, 图 4 表示由 n 个单元组成的 $k/n(G)$ 系统可靠性框图.

此处以表决系统 $2/3(G)$ 为例, 从真值表中分析, 运用几何学习算法^[15] 可以判断实现该系统的布尔函数是线性可分函数, 因而隐层仅需一个神经元即可以实现, 由文献 [12] 定理 2 可以得到相应的权系数 $w_1 = 2, w_2 = 2, w_3 = 2$, 及阈值 $2 < \theta \leq 4$, 由 3.1 节提出的算法可以得到 $Y = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$ 的分布函数为式 (6).

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x) = p\{Y \leq x\} = 1, & x \in [6, +\infty) \\ \Phi_2(x) = p\{Y \leq x\} = 1 - p_1p_2p_3, & x \in [4, 6) \\ \Phi_3(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_2(x) - (1 - p_1)p_2p_3 - p_1(1 - p_2)p_3 - p_1p_2(1 - p_3), & x \in [2, 4) \\ \Phi_4(x) = p\{Y \leq x\} = \Phi_3(x) - (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 - (1 - p_1)p_2(1 - p_3) - p_1(1 - p_2)(1 - p_3), & x \in [0, 2) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (6)$$

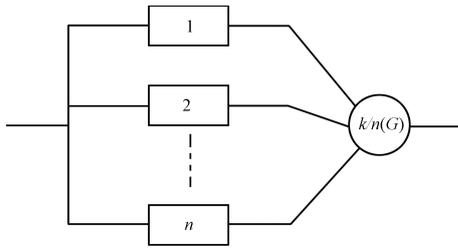


图 4 表决系统 $k/n(G)$ 可靠性框图

Fig. 4 The reliability block diagram of the voting system $k/n(G)$

当 $Y \geq \theta$ 时系统正常工作, 且 $2 < \theta \leq 4$, 故正常工作的概率为

$$\begin{aligned}
 p\{Y \geq \theta\} &= p\{Y > \theta\} = \\
 &1 - p\{Y \leq \theta\} = 1 - \Phi_3(x) = \\
 &p_1 p_2 p_3 + (1 - p_1) p_2 p_3 + \\
 &p_1 (1 - p_2) p_3 + p_1 p_2 (1 - p_3)
 \end{aligned}$$

与经典理论分析的结果是一致的.

上述三个典型系统与经典理论的分析结果是一致的, 更为复杂的系统往往是由典型系统所组成的, 故该算法可以应用到一般的系统可靠性分析. 由于经典理论的方法局限于一些典型的系统, 对于一般系统目前没有统一的分析方法, 本文提出的算法可以适合于一般系统的可靠性分析, 通过对单元的所有状态与相应时刻系统工作状态训练成一个二进神经网络, 再借助 2.1 节的算法分析系统可靠性. 下面以含 6 个单元的一般的非线性系统为例.

例 4. 假设某系统的可靠性框图如图 5, 并假设所有单元的可靠性都为 p .

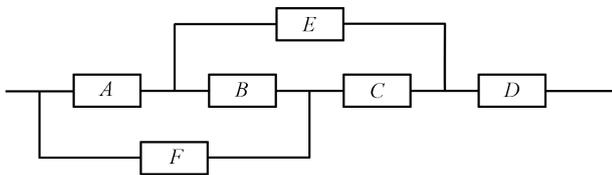


图 5 非线性系统可靠性框图

Fig. 5 The reliability block diagram of the nonlinear system

由可靠性框图 5 可知, 如果系统正常工作, 则元件 D 一定是正常的, 故若假设系统功能的函数为 $F(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F)$, 则该功能可进一步分解为

$$\begin{aligned}
 F(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F) &= \\
 &x_D \wedge G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)
 \end{aligned}$$

故此处只需根据可靠性框图写出 $G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 的真值表, 如表 1.

表 1 $G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 的真值表

Table 1 The truth table of $G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$

No.	x_A	x_B	x_C	x_E	x_F	G	No.	x_A	x_B	x_C	x_E	x_F	G
0	0	0	0	0	0	0	16	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	17	1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	1	1	0	18	1	1	0	1	1	1
3	0	0	0	1	0	0	19	1	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	0	0	20	1	1	1	1	0	1
5	0	0	1	1	1	1	21	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	1	22	1	1	1	0	1	1
7	0	0	1	0	0	0	23	1	1	1	0	0	1
8	0	1	1	0	0	0	24	1	0	1	0	0	0
9	0	1	1	0	1	1	25	1	0	1	0	1	1
10	0	1	1	1	1	1	26	1	0	1	1	1	1
11	0	1	1	1	0	0	27	1	0	1	1	0	1
12	0	1	0	1	0	0	28	1	0	0	1	0	1
13	0	1	0	1	1	1	29	1	0	0	1	1	1
14	0	1	0	0	1	0	30	1	0	0	0	1	0
15	0	1	0	0	0	0	31	1	0	0	0	0	0

由于该函数的连通性较高, 故可使用文献 [12] 提出的算法进行学习, 隐层采用 2 个神经元即可以实现, 其结果如表 2.

表 2 例 4 分离节点顺序及超平面系数

Table 2 The node order and coefficients of separating hyperplane for Example 4

神经元	分离真节点	$\{w_A, w_B, w_C, w_E, w_F\}$ 阈值	
	11111, 00101, 00111, 01011,		
1	10011, 10110, 01101, 01111	$\{3, 1, 7, 5, 9\}$	15
	10101, 11011, 11101, 11110, 10111;		
2	(11110), 11010, 10010, 11100	$\{4, 2, 0, 2, -4\}$	6

表 2 中神经元 2 中所分离的真节点 11110, 在神经元 1 中已分离, 此处为重复节点, 在后面计算时需略加注意. 神经元 1, 2 所表达的线性可分函数分别设为 $F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$, $F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$, 由文献 [12] 定理 3 所给出的输出元表达的函数为

$$\begin{aligned}
 G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F) &= \\
 &F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F) \vee \\
 &F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)
 \end{aligned}$$

再由 $F(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F) = x_D \wedge G(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$, 故

$$\begin{aligned}
 F(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F) &= \\
 &[x_D \wedge F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)] \vee \\
 &[x_D \wedge F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)]
 \end{aligned}$$

对于 $F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$, 其分类超平面为 $3x_A + x_B + 7x_C + 5x_E + 9x_F - 15 = 0$, 由定理 3, $x_D \wedge F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 的分类超平面可设为 $3x_A + x_B + 7x_C + w_D x_D + 5x_E + 9x_F - (15 + w_D) = 0$, 再进一步可知满足 $w_D > 10$ 的一切实数均可, 此处为计算方便取 $w_D = 11$, 故分类超平面为 $3x_A + x_B + 7x_C + 11x_D + 5x_E + 9x_F - 26 = 0$.

对于 $F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$, 其分类超平面为 $4x_A + 2x_B + 0x_C + 2x_E - 4x_F - 6 = 0$, 由于其权重系数存在负数, 首先由定理 2 可调整分类超平面为 $4x_A + 2x_B + 0x_C + 2x_E + 4x_F - 10 = 0$, 再由定理 3, $x_D \wedge F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 的分类超平面可设为 $4x_A + 2x_B + 0x_C + w_D x_D + 2x_E + 4x_F - (10 + w_D) = 0$, 进一步可知满足 $w_D > 2$ 的一切实数均可, 此处为计算方便取 $w_D = 3$, 故分类超平面为 $4x_A + 2x_B + 0x_C + 3x_D + 2x_E + 4x_F - 13 = 0$. 再由定理 2 转换为 $4x_A + 2x_B + 0x_C + 3x_D + 2x_E - 4x_F - 9 = 0$. 此时得到 $F(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F)$ 的网络结构为图 6.

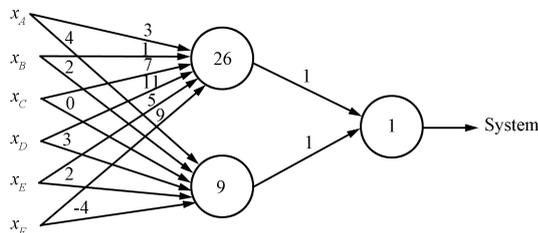


图 6 例 4 实现系统功能所对应的神经网络结构图
Fig. 6 Implementation of the system function of Example 4

对于 $x_D \wedge F_1(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 与 $x_D \wedge F_2(x_A, x_B, x_C, x_E, x_F)$ 及其相应的分类超平面, 按照 3.1 节的方法可以得到 $Y_1 = 3x_A + x_B + 7x_C + 11x_D + 5x_E + 9x_F$ 的分布函数 $\Phi_1(x)$, $Y_2 = 4x_A + 2x_B + 0x_C + 3x_D + 2x_E - 4x_F$ 的分布函数 $\Phi_2(x)$.

故系统可靠性即为

$$p\{Y_1 > 25 \cup Y_2 > 8\} = p\{Y_1 > 25\} + p\{Y_2 > 8\} - p\{Y_1 > 25 \cap Y_2 > 8\}$$

由表 2 可知两个神经元只有 111110 为共同处

理的节点, 故

$$p\{Y_1 > 25 \cup Y_2 > 8\} = p\{Y_1 > 25\} + p\{Y_2 > 8\} - p\{111110\} = [1 - p\{Y_1 \leq 25\}] + [1 - p\{Y_2 \leq 8\}] - p\{111110\} = [1 - \Phi_1(25)] + [1 - \Phi_2(8)] - p^5(1-p) = [p^6 - 4p^5 + 3p^4 + p^3] + [-p^4 + p^3] - p^5(1-p) = 2p^6 - 5p^5 + 2p^4 + 2p^3$$

故得到该系统的可靠性为 $2p^6 - 5p^5 + 2p^4 + 2p^3$.

由例 4 可以看出在系统可靠性框图已知的前提下分析一般系统可靠性的全部过程.

4 结论

本文借助二进神经网络可以实现完备布尔逻辑的特性, 将系统功能转化为单元间的逻辑关系, 再由二进神经网络训练得到单元间的线性组合, 提出并且证明了 0/1 分布的线性组合的概率分布函数, 利用该分布函数, 成功地解决了一般系统的可靠性问题. 另外本文所提到的系统和单元的含义是相对而言的, 系统可以是机器、设备、部件或零件; 单元也可以是机器、设备、部件或零件. 对于单元的划分, 如果划分过细增加单元数目, 使得计算量过大, 反之则对系统可靠性的计算不够精确, 这其中的划分尺度仍需要进一步研究. 再从系统所对应的单元间的线性组合, 可以分析出单元的重要程度, 在设计系统时可以相应的增加重要单元的可靠性, 进而增强了系统可靠性.

References

- 1 Laprie J C. *Dependability: Basic Concepts and Terminology*. Vienna: Springer-Verlag, 1990
- 2 Mitchell C, Stavridou V. *Mathematics of Dependable Systems*. Oxford: Clarendon Press, 1995
- 3 Cao Jin-Hua, Cheng Kan. *Reliability Mathematical Introduction*. Beijing: Higher Education Press, 2006 (曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论. 北京: 高等教育出版社, 2006)
- 4 Chaudhuri G, Hu K, Afshar N. A new approach to system reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, 2001, **50**(1): 75-84
- 5 Lin M S. An $O(k^2 \log(n))$ algorithm for computing the reliability of consecutive- k -out-of- n : F systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 2004, **53**(1): 3-6
- 6 Amari S V, Zuo M J, Dill G. A fast and robust reliability evaluation algorithm for generalized multi-state k -out-of- n system. *IEEE Transactions on Reliability*, 2009, **58**(1): 88-97

- 7 Azaon A, Katagiri H, Sakawa M, Modarres M. Reliability function of a class of time-dependent systems with standby redundancy. *European Journal of Operational Research*, 2005, **164**(2): 378–386
- 8 Yang Juan, Lu Yang, Huang Zhen-Jin, Wang Qiang. Hamming sphere dimple in binary neural networks and its linear separability. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(6): 737–745 (杨娟, 陆阳, 黄镇谨, 王强. 二进神经网络中的汉明球突及其线性可分性. *自动化学报*, 2011, **37**(6): 737–745)
- 9 Chen F Y, Chen G R, He G L, Xu X B, He Q B. Universal perceptron and DNA-like learning algorithm for binary neural networks: LSBF and PBF implementations. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2009, **20**(10): 1645–1658
- 10 Chen F Y, Chen G R, He Q B. Universal perceptron and DNA-like learning algorithm for binary neural networks: non-LSBF implementation. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2009, **20**(8): 1293–1301
- 11 Lu Y, Yang J, Wang Q, Huang Z J. The upper bound of the minimal number of hidden neurons for the parity problem in binary neural networks. *Science China Information Sciences*, 2012, **55**(7): 1579–1587
- 12 Yang Juan, Lu Yang, Fang Huan, Zhu Xiao-Juan. An ant colony-based learning algorithm for binary neural networks. *Journal of Circuits and Systems*, 2012, **17**(6): 49–56 (杨娟, 陆阳, 方欢, 朱晓娟. 基于蚁群算法的二进神经网络学习算法. *电路与系统学报*, 2012, **17**(6): 49–56)
- 13 Lu Yang, Han Jiang-Hong, Wei Zhen. A general judging and constructing method of SP functions in binary neural networks. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 234–241 (陆阳, 韩江洪, 魏臻. 二进神经网络中 SP 函数的一般判别和构造方法. *自动化学报*, 2003, **29**(2): 234–241)
- 14 Lu Yang, Han Jiang-Hong, Zhang Wei-Yong. Logical relation determination criteria and equivalence rule extraction on binary neural networks. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2001, **14**(2): 171–176 (陆阳, 韩江洪, 张维勇. 二进神经网络逻辑关系判据及等价性规则提取. *模式识别与人工智能*, 2001, **14**(2): 171–176)
- 15 Kim J H, Park S. The geometrical learning of binary neural networks. *IEEE Transaction on Neural Networks*, 1995, **6**(1): 237–247



杨娟 合肥工业大学计算机与信息学院, 讲师. 2012 年获合肥工业大学计算机与信息学院博士学位. 主要研究方向为人工智能, 神经网络.

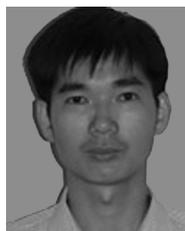
E-mail: yangjuan6985@163.com

(YANG Juan Lecturer at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. She received her Ph.D. degree from Hefei University of Technology in 2012. Her research interest covers artificial intelligence and neural networks.)



陆阳 合肥工业大学计算机与信息学院教授. 主要研究方向为人工智能, 计算机控制, 传感器网络. 本文通信作者. E-mail: luyang.hf@126.com

(LU Yang Professor at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. His research interest covers artificial intelligence, computer control and sensor network. Corresponding author of this paper.)



黄镇谨 合肥工业大学计算机与信息学院, 博士研究生. 2005 年获华南理工大学计算机学院硕士学位. 主要研究方向为人工智能, 计算机控制.

E-mail: schzj@163.com

(HUANG Zhen-Jin Ph.D. candidate at the School of Computer and Information, Hefei University of Technology. He received his master degree from South China University of Technology in 2005. His research interest covers artificial intelligence and computer control.)