

基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制

秦伟伟¹ 刘刚² 王剑² 郑志强³

摘要 针对一类干扰有界的输入和状态受约束线性离散系统, 提出了一种基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制方法. 首先采用多面体不变集离线设计方法得到基于多面体不变集序列的扩展终端约束集; 然后为了扩大鲁棒模型预测控制的初始状态允许区域, 并提高系统的鲁棒性, 在扩展终端约束集的基础上, 通过引入鲁棒一步集并借助 Tube 不变集控制策略, 设计了基于鲁棒一步集的鲁棒模型预测控制方法, 并给出了算法的存在性和稳定性证明. 该方法不仅极大地扩大了初始状态允许区域, 而且对有界干扰具有有效的抑制作用, 使得受扰系统收敛到以原点为中心的最小鲁棒正不变集内. 最后仿真验证了算法的有效性.

关键词 鲁棒模型预测控制, 鲁棒一步集, Tube 不变集, 最小鲁棒正不变集

引用格式 秦伟伟, 刘刚, 王剑, 郑志强. 基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2014, 40(7): 1404–1411

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01404

Robust MPC with Tube Invariant Set Based on Robust One-step Set

QIN Wei-Wei¹ LIU Gang² WANG Jian² ZHENG Zhi-Qiang³

Abstract A robust MPC with Tube invariant set based on robust one-step set is proposed for a constrained discrete-time uncertain linear system with bounded unknown state disturbance. Firstly, the enlarged terminal constraint region is obtained offline by a continuum of polytopic invariant sets. In order to enlarge the region of initial state admissible set and improve the robustness of this method, robust one-step set and Tube invariant set are used for designing the robust model predictive controller. The stability and the theorem of existence of this method are also proved. This algorithm not only enlarges the region of initial state admissible set greatly, but also restrains the state disturbance effectively. And the system states could be driven into the minimal robust positively invariant set around the origin. The simulation results prove the availability of the proposed method.

Key words Robust MPC, robust one-step set, Tube invariant set, minimal robust positively invariant set

Citation Qin Wei-Wei, Liu Gang, Wang Jian, Zheng Zhi-Qiang. Robust MPC with Tube invariant set based on robust one-step set. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1404–1411

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 广泛应用于约束系统^[1], 因此一直都是研究的热点. 在模型预测控制中, 渐近稳定正不变集是重要的研究方向^[2]. 目前广泛采用的不变集主要有两种: 椭圆不变集和多面体不变集. 与椭圆集相比, 多面体不仅更符合系统的多面体约束, 而且具有更大的灵活性, 进而可以获得更大的初始状态允

许集^[3]. 为此, Cannon 等人设计了基于多面体不变集的渐近稳定控制方法^[4–5]. Pluymers 等人研究了基于反馈控制律的多面体不变集构造方法, 并依此提出了基于多面体不变集的鲁棒模型预测控制方法^[5–6]. 为了进一步扩大初始状态允许集, 并避免不变集复杂的在线计算, 席裕庚等人提出了基于多面体不变集的离线控制综合方法^[7], 文中详细讨论了基于多面体不变集的离线 MPC. 该方法表明只要系统状态属于多面体不变集构成的集合, 即可采用控制增益切换策略实现系统渐近稳定. 但系统状态如果不属于该集合, 上述离线方法可能无法有效控制. 另一方面, 为了扩大双模预测控制的可控区域, Wan 等人提出了基于椭圆集的变时域和变终端约束 MPC 控制方法^[8–9]. 为此, 本文借鉴文献 [9] 中变终端约束思想, 以多面体不变集序列作为终端约束集设计变终端约束双模 MPC.

干扰有界不确定系统的鲁棒控制一直是模型预测控制的研究热点之一^[10]. 由于有界干扰的存在和

收稿日期 2012-02-29 录用日期 2012-11-26
Manuscript received February 29, 2012; accepted November 26, 2012

国家自然科学基金 (61203007) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61203007)

本文责任编辑 王飞跃
Recommended by Associate Editor WANG Fei-Yue

1. 第二炮兵工程大学自动控制系 西安 710025 2. 第二炮兵工程大学空间工程系 西安 710025 3. 国防科技大学机电工程与自动化学院长沙 410073

1. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025 2. Department of Space Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025 3. College of Mechatronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073

持续作用, 使得控制器并不能保证系统渐近稳定收敛到原点, 而最好的方法就是渐近稳定到一个集合内, 这个集合也被看作受扰系统的“原点”^[10]. 文献 [10–11] 给出了干扰有界系统的收敛反馈控制策略, 即 Tube 不变集的鲁棒控制预测策略, 由 Mayne 等人提出和设计, 进而奠定了该控制策略的基础. 该方法通过设计一个参数化的状态 Tube 不变集序列, 使得实际不确定系统的状态处于以标称系统状态为中心的 Tube 不变集序列内, 从而通过设计干扰不变集有效地抑制有界干扰, 并保证系统渐近收敛到终端干扰不变集. 在双模预测控制中, 约束容许不变集常被用作模型预测控制的终端约束集^[12–13]. 对于干扰有界系统, 文献 [14] 通过讨论最大约束容许集的内近似算法, 提出了基于约束容许集的软约束鲁棒模型预测控制策略. Limon 等人针对该类系统, 研究了鲁棒 Tube 不变集的跟踪控制问题^[15]. 在文献 [16] 中, 针对干扰有界的线性硬约束系统, Gilbert 等人则讨论了一种基于扩大吸引域的指令校正控制问题. 文献 [17] 利用鲁棒 Tube 不变集, 研究了基于扩展终端约束集的离线鲁棒模型预测控制算法.

由于双模预测控制中, 在线优化的步数 N 越大, 算法的在线计算量就越大. 因此对于给定的初始状态, 总是期望 N 尽可能的小. 目前 N 的选择是普遍难题, 一般采用多次尝试来确定. 为此本文针对干扰有界约束线性系统, 为了解决 N 的选择问题, 引入一步集, 设计基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制器. 主要思路是在多面体不变集控制方法基础上, 首先构建基于状态反馈控制律序列的扩展终端约束集; 然后通过引入鲁棒一步集来确定在线优化步数, 并用 N 个单步在线优化代替 N 步优化, 克服文献 [9] 中双模预测控制因为无法确定在线优化步数带来的计算量大和可操作性差的问题; 结合 Tube 不变集控制策略, 采用最小鲁棒正不变集作为干扰不变集, 在扩大约束系统的初始状态允许区域的基础上, 保持 Tube 不变集控制策略的鲁棒性. 同时, 相对于文献 [17], 本文算法具有更大的初始状态允许区域, 并且通过引入鲁棒一步集, 极大降低了双模控制策略的在线计算量.

1 问题描述

考虑一类约束离散不确定系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad (1)$$

其中, 状态变量 $x(k) \in \mathbf{R}^n$, 控制输入 $u(k) \in \mathbf{R}^m$, 以及范数有界干扰 $w(k) \in \mathbf{R}^n$. 控制输入和状态约束满足条件:

$$x \in X := \{x \in \mathbf{R}^n | A_x x \leq 1_{V_1}\} \quad (2)$$

$$u \in U := \{u \in \mathbf{R}^m | A_u u \leq 1_{V_2}\} \quad (3)$$

式中, $U \subset \mathbf{R}^m$ 是紧集, $X \subset \mathbf{R}^n$ 是闭集, 而且每个集合均包含原点, 1_V 表示元素为 1 的列向量, 且维数与式中矩阵相对应.

有界干扰 w 满足:

$$w \in W \quad (4)$$

其中, W 是包含原点的紧集.

与系统 (1) 对应的标称模型定义为:

$$x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k) \quad (5)$$

其中, 标称状态变量 $x'(k) \in \mathbf{R}^n$, 标称控制输入 $u'(k) \in \mathbf{R}^m$.

鲁棒预测控制器设计目标是要针对系统 (1), 在满足式 (2)~(3) 的条件下, 在每个采样时刻设计最优控制输入, 将系统的状态驱动到原点并最小化性能指标:

$$\max_{w \in W, i \geq 0} J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2 \right\} \quad (6)$$

其中, Q_1 和 R 为正定的加权矩阵.

2 鲁棒一步集及其计算方法

为了扩大约束系统的初始状态允许集, 这里在多面体不变集的基础上引入一步集. 由于干扰有界不确定系统 (1) 中存在有界干扰, 因此有必要引入鲁棒一步集的概念.

定义 1 (鲁棒一步集). 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$, 有界干扰满足 $w \in W$. 如果满足输入和状态约束, 存在容许控制输入使得 $x(k+1) \in \Omega$, 则称 $\tilde{\Xi}(\Omega)$ 是集合 Ω 的鲁棒一步集, 即

$$\tilde{\Xi}(\Omega) := \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : x(k+1) \in \Omega, \forall w(k) \in W\} \quad (7)$$

定义 2 (鲁棒 N 步集). 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$, 有界干扰满足 $w \in W$. 如果在满足输入和状态约束的条件下, 存在容许控制输入序列 $U_N := \{u(k), \dots, u(k+N-1)\}$ (其中, $u(i) \in U, i = k, \dots, k+N-1$), 使得 $x(k+N) \in \Omega$,

则称 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 是集合 Ω 的鲁棒 N 步集, 即

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) := \{x(k) \in X | \exists U_N : x(k+N) \in \Omega, \forall w(k) \in W\} \quad (8)$$

从集合运算角度, 鲁棒一步集又可表示为

$$\tilde{\Xi}_1(\Omega) := \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : AB(k) \oplus W \subseteq \Omega\}$$

其中, $AB(k) = Ax(k) + Bu(k)$. 因此

$$\tilde{\Xi}_1(\Omega) = \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : AB(k) \in \Omega \ominus W\} \quad (9)$$

其中, $\oplus$ 表示 Minkowski 集和, $\ominus$ 表示 Pontryagin 集差. $\Omega' := \Omega \ominus W$, 并假设 $\Omega' = \{x(k) \in \mathbf{R}^n | Qx(k) \leq q\}$, 其中, Q 表示维数为 $n \times n$ 的常数矩阵, q 表示维数为 $n \times 1$ 的常数向量.

$$\begin{aligned} \Psi = & \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m} \right\} \\ & \{x(k) \in X, u(k) \in U, Ax(k) + Bu(k) \in \Omega'\} = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+m} \right\} \\ & \left\{ \begin{bmatrix} QA & QB \\ A_x & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} q \\ 1_{V_1} \\ 1_{V_2} \end{bmatrix} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

根据文献 [18], Ψ 的前 n 个坐标展开的子空间即为鲁棒一步集, 即

$$\tilde{\Xi}_1(\Omega) := \{x(k) \in \mathbf{R}^n | \exists [x(k), u(k)]^T \in \Psi\} \quad (11)$$

由此可以得到鲁棒 N 步集的计算方法.

算法 1.

1) 若目标集 Ω 是凸多面体集, 则集合 Ω 的鲁棒 N 步集 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 可采用下面算法计算:

- 令 $k = 0$, $\tilde{\Xi}_0(\Omega) = \Omega$;
- 按照鲁棒一步集方法计算

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_k(\Omega) = & \\ & \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : AB(k) \in \tilde{\Xi}_{k-1}(\Omega) \ominus W\} \quad (12) \end{aligned}$$

c) 令 $k = k + 1$, 若 $k > N$, 计算结束; 否则返回 b).

2) 若目标集为凸多面体集的并集 $\Omega := \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 则鲁棒一步集计算方法如下: Ω 的鲁棒一步集为:

$$\tilde{\Xi}(\Omega) = \tilde{\Xi}(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}(\Omega_j) \quad (13)$$

Ω 的鲁棒 N 步集为:

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) = \tilde{\Xi}_N(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_N(\Omega_j) \quad (14)$$

由鲁棒 N 步集的定义和计算方法可知, 集合运算中包含了 Pontryagin 集差, 因此如果有界扰动 W 过大, 鲁棒 N 步集可能不存在. 所以, 有必要讨论鲁棒一步集的存在性问题. 这里引入可达集的概念, 讨论鲁棒一步集存在的充分必要条件.

定义 3 (一步可达集). 约束离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ 满足状态约束 (2) 和输入约束 (3). 对于任意给定状态 $x(k) \in \Omega$, 在容许控制 $u(k) \in U$ 作用下, 下一时刻系统状态所能达到的集合 $\Re(\Omega)$ 称为集合 Ω 的一步可达集, 即:

$$\Re(\Omega) := \{x(k+1) \in X | \exists u(k) \in U, \exists x(k) \in \Omega\} \quad (15)$$

根据可达集定义, 给出干扰有界线性时不变系统鲁棒一步集存在的充分必要条件.

定理 1. 对于干扰有界线性时不变系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$, 状态约束满足式 (2) 和输入约束满足式 (3), 则集合 Ω 的鲁棒 i 步集存在的充分必要条件是

$$\Re(\tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)) \cap (\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \ominus W) \neq \emptyset \quad (16)$$

其中, $\emptyset$ 表示空集, $\tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) = \{x | x \in \tilde{\Xi}_i(\Omega), x \notin \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)\}$.

证明. 对于实际不确定系统 (1), 假设 k 时刻状态 $x(k)$ 满足:

$$x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) (i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j(\Omega)\}) \quad (17)$$

1) 充分条件.

根据可达集定义可知, 如果

$$\Re(\tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)) \cap (\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \ominus W) \neq \emptyset \quad (18)$$

则存在系统状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)$, 在可行的控制输入作用下满足

$$Ax(k) + Bu(k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \ominus W \quad (19)$$

即对于 $\forall w(k) \in W$, 总能找到满足输入约束的控制输入保证:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \quad (20)$$

即 $\exists x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)$ 和 $\exists u(k) \in U, \Re(x(k)) \oplus W \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)$. 因此, 式 (8) 描述的鲁棒 i 步集为非空集, 即第 i 步鲁棒容许集存在. 充分性得证.

2) 必要条件.

假设鲁棒 i 步集存在. 对于满足式 (17) 的系统状态 $x(k)$ 和任意 $w(k) \in W$, 则必存在可行输入 $u(k)$ 使得

$$Ax(k) + Bu(k) + w(k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \quad (21)$$

根据集合运算可知, 为了保证在任意 $w(k) \in W$ 情况下上式成立, 必然存在如下关系:

$$AB(k) \in \tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \ominus W \quad (22)$$

又由可达集定义可知:

$$x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \Rightarrow AB(k) \in \Re(\tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)) \quad (23)$$

由式 (22) ~ (23) 可知:

$$AB(k) \in \Re(\tilde{\Xi}_i(\Omega)/\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega)) \cap (\tilde{\Xi}_{i-1}(\Omega) \ominus W) \quad (24)$$

因此式 (16) 成立. 必要性得证. $\square$

注 1. 定理 1 给出了鲁棒一步集存在的充分必要条件. 如果有界扰动 W 足够大使得 i 步鲁棒容许集无法满足式 (17), 则大于或等于 i 步的鲁棒多步集不存在. 为此, 对于给定的有界扰动, 将满足式 (17) 的最大 $i^* \in \mathbf{N}^+$ 定义为确定参数.

3 基于鲁棒一步集的 Tube-RMPC

下面结合干扰不变集, 引入 Tube 不变集的概念, 给出 Tube 不变集鲁棒模型预测控制的设计思想. 对于采用反馈控制律 K 的闭环系统 $x(k+1) = A_K x(k) + w(k)$, 其中, $A_K = A + BK$. Tube 干扰不变集控制就是采用相应的控制律, 使得不确定实际系统的状态轨迹处于干扰不变集状态序列 $X: \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ 中, 其中 $X_i = x'_i \oplus Z$. x'_i 表示标称系统的轨迹, Z 表示干扰不变集. 为了保证良好的鲁棒性总是希望 Z 尽可能地小, 最小干扰不变集是最理想的选择^[18].

引理 1. 假设 Z 是系统 $x(k+1) = (A + BK)x(k)$ 的干扰不变集. 实际不确定系统为 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$, 对应的标称

系统 $x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k)$. 如果 k 时刻实际系统状态 $x(k) \in x'(k) \oplus Z$, 则采用控制输入 $u(k) = u'(k) + K(x(k) - x'(k))$ 可以保证对于任意 $w \in W$ 都有 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z$.

为了使初始状态允许集尽可能地大, 同时保证不确定实际系统 (1) 的干扰不变集尽可能地小, 这里引入最小鲁棒正不变集来抑制干扰, 并设计鲁棒 N 步集来扩大初始状态允许集, 从而得到基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制策略 (Tube-RMPC).

算法 2. 基于鲁棒一步集的 Tube-RMPC 针对实际不确定系统 (1), 满足约束 (2) ~ (3), 设计基于鲁棒一步集的 Tube-RMPC 策略如下:

1) 离线部分.

步骤 1. 对于标称系统 (5), 利用文献 [7] 方法设计并计算收敛于原点的多面体不变集序列 $S_1, S_2, \dots, S_M$ 及对应的控制律 $K_1, K_2, \dots, K_M$, 记并集 $S = \bigcup_{j=1}^M S_j$;

步骤 2. 根据上一步得到的反馈增益, 计算各个控制增益对应的最小鲁棒控制不变集序列 $Z_1, Z_2, \dots, Z_M$, 并选择最小的最小鲁棒控制不变集作为 Tube 序列中的干扰不变集 (记为 Z_f), 并记对应的反馈控制律为 K_f ;

步骤 3. 取 $\bar{X}$ ($\bar{X} = X \ominus Z_f$) 作为新状态约束, $\bar{U}$ ($\bar{U} = U \ominus K_f Z_f$) 作为输入约束, 计算 K_i 对应系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 的控制不变集 $\tilde{\Omega}_i$, 以此, 得到新的终端约束集 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i)$;

步骤 4. 将 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i)$ 作为新的终端约束集, 计算系统的鲁棒 N 步集 $\tilde{\Xi}_N^r(\Omega)$.

2) 在线部分.

步骤 1. 给定系统初始状态 $x(0) \in S$ (初始状态 $x'(0) = x(0)$).

步骤 2. 对于初始时刻 $k = 0$, 系统状态为 $x(0)$, 判断:

a) 如果 $x(k) \in Z_f$, 取 $x'(k) = 0, u'(k) = 0$, 则 k 时刻采用控制律 $u(k) = K_f x(k)$;

b) 如果 $x(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i \oplus Z_f, x(k) \notin Z_f$, 则可以找到满足 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f$ 及 $x'(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$ 的标称系统状态, 并设计实际控制输入:

$$u(k) = K_i x'(k) + K_f (x(k) - x'(k)) \quad (25)$$

作用于系统和标称控制输入 $u'(k)$ 并作用于标称系统, 其中, $i = \max\{j : x'(k) \in \tilde{\Omega}_j\}$, $x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k)$;

c) 如果 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f$, 且 $x(k) \notin \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i \oplus Z_f$.

采用 N 个单步双模鲁棒预测控制, 取标称系统状态 $x'(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega})$, 且满足 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f$, 通

过在线优化计算控制输入, 即求解下面优化过程:

$$\min_{u'(k)} J(k) = \|x'(k)\|_{Q_1}^2 + \|u'(k)\|_R^2 + \|x'(k+1)\|_{Q_f}^2 \quad (26)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x'(k) \in \bar{X}, u'(k) \in \bar{U} \\ Ax'(k) + Bu'(k) \in \begin{cases} \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}), i > 1 \\ \tilde{\Omega}, i = 1 \end{cases} \\ x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k) \\ x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ u(k) = u'(k) + K_f(x(k) - x'(k)) \end{cases}$$

其中, $i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f\}$. 通过上述优化问题可得到标称控制输入 $u'(k)$ 作用于标称系统和实际控制输入 $u(k)$ 作用于系统, 以此迭代进行, 直至 $i = 1$; 当 $i = 1$ 时, 按照 $x(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i \oplus Z_f$ 及 $x'(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$ 的情况实施控制律切换.

步骤 3. 测量下一时刻的实际系统状态和标称状态, 取 $k = k+1$, 返回在线部分步骤 2, 直至系统稳定.

注 2. 算法 2 中计算了鲁棒 N 步集, 因此可以通过多步集来判断系统状态到达终端约束集所需要的优化步数; 同时由于已知 N 步集的覆盖区域, 因此采用 N 个单步优化来代替步数递减的 N 步在线优化, 可以有效降低计算量.

注 3. 优化式 (26) 中的 Q_f 的选择可参考文献 [19].

注 4. 关于在线优化步数 n 的选择问题. 在采用鲁棒一步集 Tube 不变集 RMPC 算法实施单步双模在线优化时, 如果 $x(k) \in (\Xi_{m_1}^r(\tilde{\Omega}_{n_1}) \oplus Z_f) \cap (\Xi_{m_2}^r(\tilde{\Omega}_{n_2}) \oplus Z_f)$, 需要确定一步在线优化的目标集和优化步数. 本文选择在线优化时间最短的控制策略, 即先确定到达终端约束多面体不变集序列的最小步数 $m = \min\{i : x(k) \in \Xi_i^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f\}$; 然后再确定到达期望平衡点的最小控制律切换次数, 同样, 也可以先确定距离最近的多面体不变集; 最后再确定到达该多面体不变集的最小在线优化步数, 即 $j = \max_{1, \dots, l} \{x(k) \in \bigcap_{i=1}^l \Xi_{m_i}^r(\tilde{\Omega}_i) \oplus Z_f\}$, $m = m_j$, 只是这样需要的在线计算量相对较大.

定理 2 (算法 2 稳定性定理). 对于干扰有界的线性不确定系统 (1), 状态和输入约束满足式 (2)~(3), 采用算法 2 设计的控制器可以满足输入和状态约束, 并保证系统渐近稳定.

证明. 对于干扰有界的线性不确定性系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$, 满足状态和输入约束 (2)~(3). 在采样初始时刻 $k = 0$,

1) 如果 $x(k) \in Z_f$, 可以认为此时标称系统状态 $x'(k) = 0$, 此时 $u'(k) = 0$, 则由最小干扰不变集的性质可知, 在 k 时刻采用控制律 $u(k) = K_f x(k)$ 作用于系统可以保证系统状态始终处于最小干扰不变集内部;

2) 如果 $x(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i \oplus Z_f$, 则可以找到满足 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f$ 且 $x'(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$ 的标称系统状态. 采用 $u'(k) = K_i x'(k)$, $i = \max\{j : x'(k) \in \tilde{\Omega}_j\}$ 作用于标称系统 $x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k)$ 可以保证标称系统收敛到标称系统的原点. 根据引理 1 可知, 采用控制输入 $u(k) = K_i x'(k) + K_f(x(k) - x'(k))$, $i = \max\{j : x'(k) \in \tilde{\Omega}_j\}$ 可始终保证实际系统状态满足 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z_f$. 由于标称系统最终收敛到原点, 因此实际状态最终收敛到以原点为中心的干扰不变集 Z_f 内;

3) 如果 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f$, 取满足 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f$ 和 $x'(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega})$ 的标称系统状态 $x'(k)$. 采用单步优化策略 (26) 进行优化, 进而得到标称系统控制输入 $u'(k)$ 和不确定系统的控制输入 $u(k) = u'(k) + K_f(x(k) - x'(k))$. 根据引理 1, 从而得到 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z_f$. 又因为 $x'(k+1) \in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega})$, 则 $x(k+1) \in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f$, $i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j^r(\tilde{\Omega}) \oplus Z_f\}$; 以此迭代, 直至如果 $i = 1$, 存在控制输入 $u(k)$ 使得 $x'(k+1) \in \tilde{\Omega}$, $x(k+1) \in \tilde{\Omega} \oplus Z_f$; 一旦满足 $x'(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$ 且 $x(k) \in \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i \oplus Z_f$, 则采用 $u'(k) = K_i x'(k)$, $i = \max\{j : x'(k) \in \tilde{\Omega}_j\}$ 作用于标称系统 $x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k)$ 可以保证标称系统收敛到标称系统的原点; 因此根据引理 1 可知, 采用控制输入 $u(k) = K_i x'(k) + K_f(x(k) - x'(k))$, $i = \max\{j : x'(k) \in \tilde{\Omega}_j\}$ 可始终保证实际系统状态满足 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z_f$, 由于标称系统最终收敛到原点, 因此实际状态最终收敛到以原点为中心的干扰不变集内.

下面分析系统状态变化过程中的输入约束和状态约束.

1) 对于在线优化部分. 优化过程中加入了系统约束 $x'(k) \in \bar{X}, u'(k) \in \bar{U}$, 因此得到的优化结果满足上述约束, 因为 $\bar{U} = U \ominus K_f Z_f$ 和 $x'(k) \in \bar{X}$, 则实际不确定系统的状态满足约束 (2)~(3), 即 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f \in X, u(k) \in u'(k) \oplus K_f Z_f \in U$.

2) 控制律切换部分. 由于系统状态属于终端约束集, 根据算法 2 离线部分步骤 2, 如果 $x'(k) \in \Omega_i$, 则 $x'(k) \in \bar{X}$, 且 $x(k) \in x'(k) \oplus Z_f \subseteq X$, 因此系统状态在不变集内部变化满足状态约束. 对于输入约束, 因为 $\bar{U} = U \ominus K_f Z_f, x(k) - x'(k) \in Z_f$, 则 $u(k) = K_i x'(k) + K_f(x(k) - x'(k)) \in \bar{U} \oplus K_f Z_f = U$, 所以算法 2 设计的控制器满足系统输入约束.

从而可以证明, 系统状态和控制输入均满足系统约束要求.

因此, 采用算法 2 设计的控制策略可以在满足系统状态和控制输入约束的条件下将系统稳定到平衡原点附近的最小鲁棒正不变集内部. $\square$

4 仿真算例

为了检验控制算法的有效性, 以下面离散双积分线性模型为例设计控制器. 不确定动态模型为:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + w(k)$$

系统状态约束和输入约束满足:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0.1I & -0.1I \end{bmatrix}^T, A_u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

有界不确定持续状态干扰 $w \in W$, 其中 $W := \{w | \|w\|_\infty \leq 0.1\}$. 性能指标函数中的加权矩阵为: $Q = I, R = 0.01$.

计算多面体不变集序列, 如图 1 所示, 而后利用最小鲁棒控制不变集的外近似算法^[20], 得到不同的控制律对应的最小鲁棒控制不变集. 选择最小的最小鲁棒控制不变集作为干扰不变集 Z_f , 对应的控制增益记为 $K_f = [-0.1572 \quad -0.4998]$. Z_f 表示为:

$$\begin{bmatrix} 0.5548 & -0.83198 \\ 0.12309 & -0.9924 \\ -10 & -1 \\ -0.093438 & -0.99563 \\ -0.16823 & -0.98575 \\ -0.29243 & -0.95629 \\ -0.40905 & -0.91251 \\ -1 & 0 \\ -0.5548 & 0.83198 \\ -0.12309 & 0.9924 \\ 20 & 1 \\ 0.093438 & 0.99563 \\ 0.16823 & 0.98575 \\ 0.29243 & 0.95629 \\ 0.40905 & 0.91251 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0.4256 \\ 0.26221 \\ 0.23416 \\ 0.22918 \\ 0.24008 \\ 0.2792 \\ 0.33201 \\ 0.60566 \\ 0.4256 \\ 0.26221 \\ 0.23416 \\ 0.22918 \\ 0.24008 \\ 0.2792 \\ 0.33201 \\ 0.60566 \end{bmatrix} \quad (27)$$

首先讨论不含干扰的情况, 即假设干扰为零. 此时分别采用文献 [7-8] 以及本文方法设计控制器, 得到结果如图 1~3 所示. 如图 1 所示, 分别给出了

基于椭圆不变集的变终端约束双模预测控制方法的椭圆终端约束集 (虚线包裹的区域), 基于多面体不变集的离线模型预测控制的初始状态可行区域 (点划线包裹的区域), 以及基于一部集的初始状态可行区域 (实线包裹的部分). 仿真结果表明, 本文方法较文献 [7] 方法, 扩大了初始状态可行区域. 例如对于初始状态 $x(0) = [-5, -9]^T$, 本文方法采用在线优化和离线控制增益切换的方法将系统稳定到平衡原点, 而由于 $x(0) = [-5, -9]^T$ 不属于离线设计的多面体不变集 (如图 1 所示), 因此无法控制该初始状态点. 相对于文献 [8], 本文方法扩大了终端约束集, 另外引入 N 步集来设计优化区域之后, 采用 N 个单步优化代替 N 步优化, 极大地降低了在线计算量 (由表 1 可知), 达到了预期目的. 由图 2 所示的状态及控制变化曲线可知, 在收敛过程中系统满足状态和输入约束, 并且该方法还具有收敛速度快, 超调量小的优势. 由于采用 N 个单步优化代替 N 步在线优

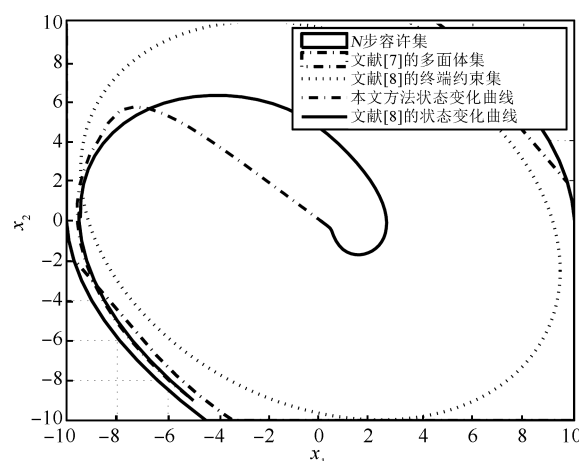


图 1 系统状态轨迹曲线

Fig. 1 The trajectories of system states

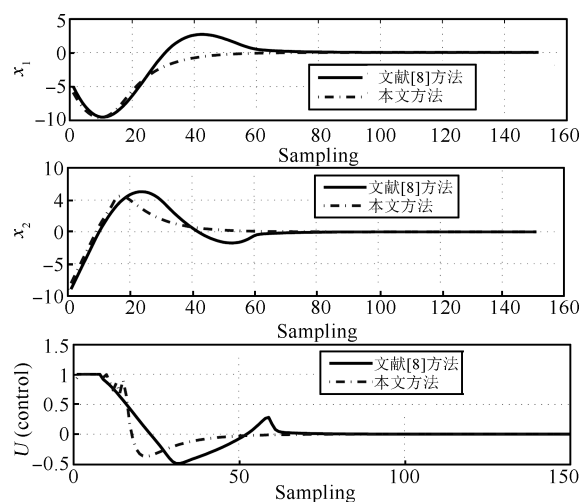


图 2 状态及控制输入变化曲线

Fig. 2 The states and control inputs

化,势必影响控制性能,因此由图 3 可知,在线优化部分文献 [8] 的性能要优于该方法.但是系统状态一旦进入终端约束集,该方法的性能指标有了极大的降低.

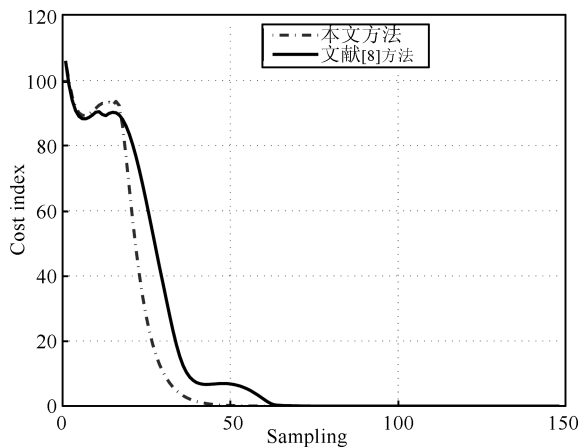


图 3 系统性能指标变化曲线
Fig.3 The cost index

表 1 运算时间比较

Table 1 Computation loads

步骤	文献 [3]		本文方法	
	优化步数	计算时间 (s)	优化步数	计算时间 (s)
步骤 1	$N=8$	1.8637	$N=1$	0.3786
步骤 2	$N=7$	1.4216	$N=1$	0.3546
步骤 3	$N=6$	1.0876	$N=1$	0.3267
步骤 4	$N=5$	0.9846	$N=1$	0.3014
步骤 5	$N=4$	0.8435	$N=1$	0.2869
步骤 6	$N=3$	0.7291	$N=1$	0.2746
步骤 7	$N=2$	0.5813	$N=0$	0.0013
步骤 8	$N=1$	0.5432	$N=0$	0.0015

表 2 初始状态可行性比较

Table 2 The feasibility of initial states

	$[-8.9, -2.8]^T$	$[10, -1]^T$	$[-6, 0]^T$
文献 [10]	不可行	不可行	可行
本文方法	可行	可行	可行

下面讨论干扰存在的情况.当系统如式 (1) 描述存在有界干扰时,分别采用本文方法和文献 [10] 的 Tube 鲁棒模型预测控制方法设计控制输入.图 4 给出了本文方法的初始状态可行区域 ($N=10$) 以及文献 [10] 的终端约束集.在取相同在线优化步长的条件下,对于不同的初始状态,优化可行性如表 2 所示,由此可知本文方法的初始可行区域较大.另外,从两种方法的终端约束集覆盖区域可知,对于初

始状态 $x(0) = [-6, 0]^T$,本文方法只需采用离线设计的控制增益切换即可保证系统收敛到以原点为中心的最小鲁棒正不变集内,而文献 [10] 方法需要进行 6 步在线优化,极大地减少了计算量.

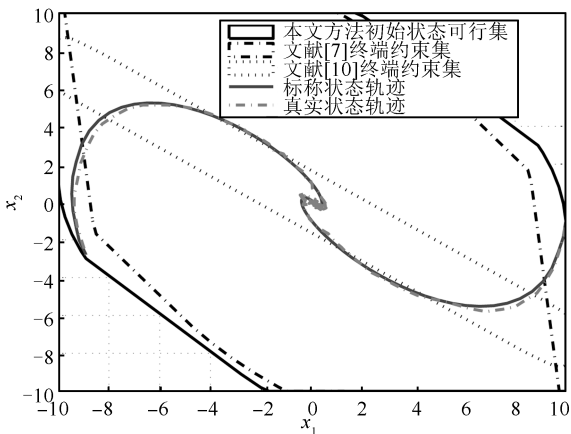


图 4 系统状态轨迹曲线

Fig.4 The trajectories of system states

5 结论

针对一类具有加性有界干扰的约束线性离散系统,提出了一种基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制器设计方法.为了扩大鲁棒模型预测控制的初始状态允许区域,并提高系统的鲁棒性,本文在多面体不变集离线控制算法的基础上,借助 Tube 不变集,并引入鲁棒一步集的概念,设计基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制.相对于原 Tube 算法,由于采用了鲁棒一步集,本文提出的算法扩大了初始状态允许区域,并且采用 N 个单步在线优化取代 N 步在线优化,具有较低的运算复杂性和运算量要求.因此基于鲁棒一步集的 Tube 不变集鲁棒模型预测控制是一种行之有效的鲁棒控制策略.

References

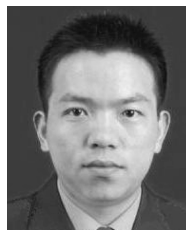
1 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Sokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(4): 789–814

2 Artsteina Z, Raković S V. Feedback and invariance under uncertainty via set-iterates. *Automatica*, 2008, **44**(2): 520–525

3 Xi Yu-Geng, Li De-Wei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(10): 1225–1234
(席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状. *自动化学报*, 2008, **34**(10): 1225–1234)

4 Cannon M, Deshmukh V, Kouvaritakis B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, 2003, **39**(8): 1487–1494

- 5 Cannon M, Kouvaritakis B, Desshmukh V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance. *Automatica*, 2004, **40**(2): 311–317
- 6 Pluymers B, Kothare M V, Suykens J A K, De Moor B. Robust synthesis of constrained linear state feedback using LMIs and polyhedral invariant sets. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, MN: IEEE, 2006. 881–886
- 7 Xi Yu-Geng, Zhu Hong-Lin, Li De-Wei. Synthesis off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set. *Control and Decision*, 2009, **24**(2): 302–307
(席裕庚, 朱红林, 李德伟. 基于多面体不变集的离线鲁棒预测控制器综合. *控制与决策*, 2009, **24**(2): 302–307)
- 8 Wan Z Y, Kothare M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. *System & Control Letters*, 2003, **48**(5): 375–383
- 9 Wan Z Y, Pluymers B, Kothare M V, De Moor B. Comments on: “Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set” by Wan and Kothare. *System & Control Letters*, 2006, **55**(7): 618–621
- 10 Mayne D Q, Seron M M, Raković S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 2005, **41**(2): 219–224
- 11 Mayne D Q, Langson W. Robustifying model predictive control of constrained linear systems. *Electronics Letters*, 2001, **37**(23): 1422–1423
- 12 Wang C, Ong C J, Sim M. Constrained linear system with disturbance: convergence under disturbance feedback. *Automatica*, 2008, **44**(10): 2583–2587
- 13 Wang C, Ong C J, Sim M. Model predictive control using segregated disturbance feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 831–840
- 14 Wang C, Ong C J. Constraint-admissible sets for systems with soft constraints and their application in model predictive control. *International Journal of Robust, Nonlinear Control*, 2011, **22**(11): 1229–1243
- 15 Limon D, Alvarado I, Alamo T, Camacho E F. Robust Tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(3): 248–260
- 16 Gilbert E G, Ong C J. Constrained linear systems with hard constraints and disturbances: an extended command governor with large domain of attraction. *Automatica*, 2011, **47**(2): 334–340
- 17 Qin Wei-Wei, Ma Jian-Jun, Zheng Zhi-Qiang, Liu Gang. Off-line RMPC based on Tube invariant set for a discrete-time uncertain system. *Information and Control*, 2011, **40**(3): 307–312
(秦伟伟, 马建军, 郑志强, 刘刚. 一类离散不确定系统的 Tube 不变集离线 RMPC. *信息与控制*, 2011, **40**(3): 307–312)
- 18 Kerrigan E C. Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control [Ph. D. dissertation], University of Cambridge, UK, 2000
- 19 Zou Tao. Analysis and Design for Constrained Model Predictive Control System [Ph. D. dissertation], Shanghai Jiaotong University, China, 2004. 83–85
(邹涛. 约束模型预测控制系统的分析与设计 [博士学位论文], 上海交通大学, 中国, 2004. 83–85)
- 20 Rakovic S V, Kerrigan E C, Kouramas K I, Mayne D Q. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(3): 406–410



秦伟伟 第二炮兵工程大学自动控制系统讲师. 2012 年获得第二炮兵工程大学博士学位. 主要研究方向为模型预测控制和精确制导与控制. 本文通信作者.

E-mail: qww_1982@163.com

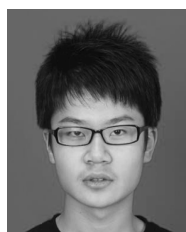
(**QIN Wei-Wei** Lecturer in the Department of Automatical Control, The Second Artillery Engineering University. He received his Ph. D. degree from The Second Artillery Engineering University in 2012. His research interest covers model predictive control and design of flight control system. Corresponding author of this paper.)



刘刚 第二炮兵工程大学空间工程系教授. 1998 年获得西北工业大学博士学位. 主要研究方向为精确制导与控制.

E-mail: hb830513@126.com

(**LIU Gang** Professor in the Department of Space Engineering, The Second Artillery Engineering University. He received his Ph. D. degree from Northwestern Polytechnical University in 1998. His research interest covers precise guidance and control.)



王剑 第二炮兵工程大学空间工程系博士研究生. 主要研究方向为精确制导与控制. E-mail: hb850513@163.com

(**WANG Jian** Ph. D. candidate in the Department of Space Engineering, The Second Artillery Engineering University. His research interest covers precise guidance and control.)



郑志强 国防科技大学教授. 主要研究方向为机器人和精确制导与控制.

E-mail: zqzheng@163.com

(**ZHENG Zhi-Qiang** Professor at National University of Defense Technology. His research interest covers robot and precise guidance and control.)