

基于有限时间跟踪微分器的迭代学习控制

李向阳¹

摘要 针对迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 中的初始状态问题, 提出了采用有限时间跟踪微分器安排过渡过程方法, 根据迭代学习控制中期望轨迹已知的特点, 设计了其参数有明显物理意义并且调节方便的有限时间跟踪微分器. 在此基础上, 针对一类具有不确定性的非线性时变系统的迭代学习控制问题, 提出了具有对不确定项进行估计的迭代学习控制算法, 并应用类 Lyapunov 方法给出了相关定理证明. 仿真结果表明所提出的方法是有效的.

关键词 有限时间跟踪微分器, 迭代学习控制, 初始状态问题, 类 Lyapunov 方法

引用格式 李向阳. 基于有限时间跟踪微分器的迭代学习控制. 自动化学报, 2014, 40(7): 1366–1375

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.01366

Iterative Learning Control Based on Finite Time Tracking Differentiator

LI Xiang-Yang¹

Abstract For the initial state problem of iterative learning control (ILC), a method of arranging transition process is presented using finite time tracking differentiators. A finite time tracking differentiator, whose parameters are easy to adjust because of their clear physical meanings, is designed according to the feature of ILC that the desired trajectory is known beforehand. Based on this, an ILC algorithm with estimator for system uncertainty is presented for a class of nonlinear time-varying system with uncertainty. A Lyapunov-like approach is used to prove the corresponding theorems. Simulation results verify the effectiveness of the proposed methods.

Key words Finite time tracking differentiator, iterative learning control (ILC), initial state problem, Lyapunov-like approach

Citation Li Xiang-Yang. Iterative learning control based on finite time tracking differentiator. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1366–1375

在迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 的实际应用中, 每次迭代不可避免存在初始状态误差, 如何处理初始条件是迭代学习控制研究的基本问题. 目前, 处理初始值问题的方法主要有从控制量角度来考虑的初始控制量校正方法^[1–7] 和从期望轨迹角度来考虑的初始期望轨迹校正方法^[3, 8]. 近年来, 基于边界层和有限时间死区方法也被提出和研究^[9–12], 该方法是介于初始控制量校正方法和初始轨迹校正方法之间的方法, 能在一定程度上兼顾初始期望轨迹和初始控制量. 基于边界层的方法是把误差的滑动模控制在边界层以内, 通过边界层宽度趋于容许误差以内来保证迭代学习控制的跟踪精度. 有限时间死区方法是指经过有限时间后, 边界层的宽度为零, 是对边界层方法的改进, 也可理解为有限时间边界层方法. 但是, 边界层的选择和高阶系统时初始修正函数的选择较复杂, 计算量也大. 由于跟踪微分器在反馈控制系统中能很好地被用于安排过渡过程^[13], 受此启发, 本文提出一种应用有限时

间跟踪微分器来安排迭代学习控制的过渡过程.

实际的迭代学习控制系统的被控对象往往是非线性时变系统, 当模型结构满足线性参数化条件并且其中部分模型已知时, 可以采用自适应迭代学习控制方法^[14–20], 但是当模型完全未知时, 必须研究新的迭代学习控制方法. 本文针对一类模型未知的非线性时变系统, 研究在随机初态时的迭代学习控制方法.

本文的结构安排如下: 第 1 节是对所研究问题的描述; 第 2 节给出了基于有限时间跟踪微分器的初始问题求解方法, 并在此基础上给出了一种新的迭代学习控制算法和相关定理证明; 第 3 节给出了仿真结果; 第 4 节是本文的结论.

1 问题描述

考虑如下 2-D 形式表示的非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, k) = x_2(t, k), & t \in [0, T] \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t, k) = x_n(t, k) \\ \dot{x}_n(t, k) = f(\mathbf{x}(t, k), t) + b(\mathbf{x}(t, k), t)u(t, k) \\ \exists i \in [1, n], \quad x_i(0, k) \neq r_i(0, k) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期 2013-09-26 录用日期 2014-01-07
Manuscript received September 26, 2013; accepted January 7, 2014

本文责任编辑 夏元清

Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing

1. 华南理工大学自动化科学与工程学院 广州 510641

1. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641

其中, x_i 为可测的系统状态, u 为系统的控制输入, t 为时间, k 为迭代次数, n 为系统阶数, $r_i(t, k)$ 为有界期望轨迹, $r_i(0, k)$ 为期望轨迹的初始值, f 和 b 为未知有界局部 Lipschitz 连续非线性时变函数.

记 $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbf{r}^T = [r_1, r_2, \dots, r_n]$, 设 $\mathbf{x}^1$ 和 $\mathbf{x}^2$ 为状态空间任意两点, 则有:

$$|f(\mathbf{x}^1, t) - f(\mathbf{x}^2, t)| \leq L_f \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\| \quad (2)$$

$$|b(\mathbf{x}^1, t) - b(\mathbf{x}^2, t)| \leq L_b \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\| \quad (3)$$

假设期望轨迹 $\mathbf{r}(t, k)$ 在工作区间上有 n 阶导数, 定义跟踪误差:

$$\mu_i(t, k) = r_i(t, k) - x_i(t, k) \quad (4)$$

系统 (1) 含有非零初始误差, 由于实际中控制量总是有限的, 必须经历一个过渡过程之后才能实现完全跟踪. 跟踪微分器可用于安排过渡过程, 下列系统 (5) 是一种典型的跟踪微分器^[13, 21].

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t) \\ \dot{z}_n(t) = \frac{1}{R^n} f\left(z_1 - v(t), \frac{z_2}{R}, \dots, \frac{z_n(t)}{R^{n-1}}\right) \end{cases} \quad (5)$$

如果系统 (5) 的原系统 ($v(t) = 0$, $R = 1$) 是渐近稳定, 则对于有界可积的可测信号 $v(t)$ 和任意给定的 $T_1 > 0$, 下式成立:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{T_1} |z_1(t) - v(t)| dt = 0 \quad (6)$$

且 $z_i(t)$ 为 $v(t)$ 的 $i-1$ 阶导数 $v^{(i-1)}(t)$ 的近似.

式 (5) 中 R 为速度因子, 它决定跟踪速度的快慢. 跟踪微分器 (5) 在应用中, 只需知道输入信号 $v(t)$, 则根据系统 (5) 可以得到其各阶导数. 但是, 在迭代学习控制系统中, 期望轨迹 $r_i(t, k)$ (相当于输入信号 $v(t)$) 是预先设定和已知的, 关心的是从系统 (1) 的初始状态过渡到与期望轨迹 $r_i(t, k)$ 重合的过渡过程, 该过渡过程需要在有限时间内完成. 这需要重新设计适合于迭代学习控制中安排过渡过程的有限时间跟踪微分器, 并要求该微分器的参数可以方便根据实际对象特点和工艺过程要求来调节.

2 提出的初值校正迭代学习控制方法

首先设计一种用于安排过渡过程的有限时间跟踪微分器, 得到校正后的期望轨迹, 以下简称校正轨迹, 把任意系统初态变为零初态; 然后在此基础上设计迭代学习控制律实现完全跟踪控制.

2.1 安排过渡过程

由于校正轨迹随初始条件和期望轨迹的不同而不同, 把校正轨迹改写成 2-D 形式为 $z_i(t, k)$, 记 $\mathbf{z}^T = [z_1, z_2, \dots, z_n]$. 由于在迭代学习系统中, 期望轨迹 $r_i(t, k)$ 是已知的, 设计如下含期望轨迹 $r_i(t, k)$ 的有限时间跟踪微分器:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t, k) = z_2(t, k), & t \in [0, T] \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t, k) = z_n(t, k) \\ \dot{z}_n(t, k) = \dot{r}_n(t, k) - \\ R^n \sum_{j=1}^n c_j \text{sig}\left(\frac{z_i(t, k) - r_i(t, k)}{R^{i-1}}\right)^{\alpha_j} \end{cases} \quad (7)$$

式中的 sig 记号含义为

$$\text{sig}\left(\frac{z_i - r_i}{R^{i-1}}\right)^{\alpha_j} = \left|\frac{z_i - r_i}{R^{i-1}}\right|^{\alpha_j} \text{sgn}\left(\frac{z_i - r_i}{R^{i-1}}\right)$$

其中, sgn 为符号函数, 系统 (7) 的初始条件为

$$z_i(0, k) = x_i(0, k) \quad (8)$$

对于系统 (7) 的跟踪微分器有如下定理:

定理 1. 如果系统 (7) 中系数 c_j 是 Hurwitz 多项式系数, 即多项式 $s^n + c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1 = 0$ 是 Hurwitz 多项式, 幂指数 α_j 满足 $0 < \alpha_1 < 1$ 和 $\alpha_j = n\alpha_1 / ((j-1)\alpha_1 + (n-j+1))$, $j = 2, \dots, n$, 则系统 (7) 是有限时间收敛的, 并且存在速度因子 $R_p \geq 1$, 使得当 $R \geq R_p$ 时, 下式成立

$$z_i(t, k) = r_i(t, k), \quad T_p \leq t \leq T \quad (9)$$

为了证明定理 1, 先介绍如下系统 (10) 和相应的引理 1.

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1}(t) = \varepsilon_n(t) \\ \dot{\varepsilon}_n(t) = - \sum_{j=1}^n c_j \text{sig}(\varepsilon_j)^{\alpha_j} \end{cases} \quad (10)$$

系统 (10) 中的系数和幂指数以及记号与系统 (7) 相同.

引理 1. 系统 (10) 的平衡点 $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ 是有限时间稳定的, 即经过停息时间 T_s 之后, 有 $\varepsilon_i(t) = 0$. 其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]$, c_j 和 α_j 满足的条件与定理 1 相同.

引理 1 的证明见文献 [22] 中的引理 7.1, 下面在引理 1 的基础上证明定理 1.

证明. 在系统 (7) 中, 令

$$\varepsilon_i(t) = \frac{z_i\left(\frac{t}{R}, k\right) - r_i\left(\frac{t}{R}, k\right)}{R^{i-1}} \quad (11)$$

则系统 (7) 变成了系统 (10) 的表示. 由引理 1 可知, 经过停息时间 T_s 之后, 有 $\varepsilon_i(t) = 0$. 根据式 (11) 有 $z_i(t/R, k) - r_i(t/R, k) = 0$ ($t \geq T_s$), 即 $z_i(t, k) = r_i(t, k)$ ($t \geq T_p$), 其中 T_p 满足下式

$$T_p = \frac{1}{R} T_s \quad (12)$$

则存在 $R_p \geq 1$, 当 $R \geq R_p$ 时, 有限时间跟踪微分器式 (7) 的停息时间比系统 (10) 的停息时间成比例缩小, 可保证 $R_p < T$, 在迭代学习过程的一段初始时间内收敛. $\square$

定理 1 说明:

1) 定理 1 给出的过渡过程由有限时间跟踪微分器生成, 是一个动态过程, 与期望轨迹的变化过程有关. 跟踪微分器中的参数具有明确物理意义, 系数 c_j 决定 Hurwitz 多项式在右半平面根的位置; 幂指数 α_j 满足 $\alpha_{j-1} < \alpha_j < 1$ 保证跟踪微分器的各阶导数有限时间收敛, 速度因子 R 决定收敛速度的快慢. 因此, 可以根据过渡曲线大致形状确定 Hurwitz 多项式的系数 c_j 和幂指数 α_j , 然后根据需要的响应时间来调节 R . 实际中可以把过渡过程分成不同的时间段, 每段时间采用不同的 R , 甚至还可以采用随时间递增的 R ^[22], 以便减少控制量的冲击, 适合不同实际工艺过程要求.

2) 为了保证过渡轨迹充分光滑和控制量连续, 跟踪微分器的阶次可以设计为比被控对象的阶次要高一阶.

2.2 迭代学习控制算法设计

经过有限时间跟踪微分器修正后的期望轨迹满足零初始误差条件, 定义跟踪误差为

$$\begin{cases} e_i(t, k) = x_i(t, k) - z_i(t, k) \\ e_i(0, k) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (13)$$

定义滑动面误差函数 $S(t, k)$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] \\ \mathbf{e}^T = [e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n] \\ S(t, k) = \sum_{j=1}^n a_j e_j(t, k), \quad t \in [0, T] \\ S(0, k) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 $a_n = 1$, a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 是 Hurwitz 多项式 $s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = 0$ 的系数. 对式

(14) 第 3 个方程两边求导, 并考虑到 $a_n = 1$ 有:

$$\dot{S}(t, k) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) + \dot{e}_n(t, k) \quad (15)$$

把跟踪误差写成矩阵表示为

$$\dot{\mathbf{e}}(t, k) = A_c \mathbf{e}(t, k) + B_c \dot{S}(t, k) \quad (16)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

式 (16) 两边积分, 考虑零初始条件, 有:

$$\mathbf{e}(t, k) = \int_0^t A_c \mathbf{e}(\tau, k) d\tau + B_c S(t, k)$$

上式两边取范数, 并根据范数的相容性有:

$$|\mathbf{e}(t, k)| \leq \int_0^t \|A_c\| \cdot |\mathbf{e}(\tau, k)| d\tau + |S(t, k)|$$

根据 Bellman-Gronwall 引理, 由上式有:

$$|\mathbf{e}(t, k)| \leq \|A_c\| \cdot e^{\|A_c\|T} \int_0^t |S(\tau, k)| d\tau + |S(t, k)| \quad (17)$$

由式 (17) 可以看出, 当 $S(t, k)$ 收敛到零时, $\mathbf{e}(t, k)$ 也收敛到零. 下面分两种情况来研究系统 (1) 的迭代学习控制算法, 第一种情况是系统 (1) 的控制通道增益已知, 即有:

$$\text{情况 1: } b(\mathbf{x}, t) = b_0(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (18)$$

第二种情况是, 系统 (1) 的控制通道增益未知, 但是有一个粗略的估计 $b_0(\mathbf{x}, t) \neq 0$, 即有

$$\text{情况 2: } b(\mathbf{x}, t) \approx b_0(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (19)$$

情况 1. 先讨论情况 1, 构造如下的迭代学习律来对未知参数进行学习.

$$\begin{cases} \theta(t, 0) = 0 \\ \theta(t, k) = \theta(t, k-1) + \gamma S(t, k) \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\gamma > 0$ 为学习增益. 所采用的控制律为

$$u(t, k) = b_0^{-1} [-\beta S(t, k) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) - \theta(t, k) + z_{n+1}(t)] \quad (21)$$

特别地, 当为一阶系统时, 即 $n = 1$, 有:

$$u(t, k) = b_0^{-1}[-\beta S(t, k) - \theta(t, k) + z_{n+1}(t)]$$

式中 $\beta \geq 0$ 为反馈控制增益. 对于系统 (1) 的迭代学习控制, 有如下定理.

定理 2. 对于系统 (1) 在时间区间 $[0, T]$ 上的迭代学习控制, 当控制通道的增益已知为 $b_0(\mathbf{x}, t)$ 时, 采用学习率 (20) 和控制率 (21) 可以实现对校正轨迹的完全跟踪, 即下式成立.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [x_i(t, k) - z_i(t, k)] = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

证明. 由式 (15) 和式 (1) 有:

$$\dot{S}(t, k) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) + f(\mathbf{x}, t) - z_{n+1}(t) + b_0 u(t, k)$$

把控制律式 (21) 代入上式有:

$$\dot{S}(t, k) = -\beta S(t, k) + f(\mathbf{x}, t) - \theta(t, k) \quad (23)$$

定义类 Lyapunov 函数^[23] $L(t, k)$ 为

$$L(t, k) = \frac{1}{2} S^2(t, k) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (f(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))^2 d\tau \quad (24)$$

下面通过证明 $L(t, k)$ 的迭代过程收敛性来证明 $S(t, k)$ 随迭代次数收敛, 分两步进行.

1) 求出 $\Delta L(t, k)$

$$\Delta L(t, k) = L(t, k) - L(t, k-1) \quad (25)$$

把式 (24) 代入上式有:

$$\Delta L(t, k) = -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) + \text{PartA} + \text{PartB} \quad (26)$$

式 (26) 中 PartA 和 PartB 分别为

$$\text{PartA} = \frac{1}{2} S^2(t, k) = S^2(0, k) + \int_0^t S(\tau, k) \dot{S}(\tau, k) d\tau$$

$$\text{PartB} = \frac{1}{2\gamma} \int_0^t ((f(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))^2 - (f(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k-1))^2) d\tau$$

把式 (23) 带入 PartA, 并考虑零初始条件有

$$\text{PartA} = -\beta \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \int_0^t S(\tau, k) (f(\mathbf{x}, \tau) - \theta(\tau, k)) d\tau \quad (27)$$

利用 $(h-b)^2 - (h-d)^2 = -(b-d)^2 - 2(b-d)(h-b)$ 有

$$\text{PartB} = -\frac{1}{2\gamma} \int_0^t ((\theta(\tau, k) - \theta(\tau, k-1))^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \times \int_0^t -2(f(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))(\theta(\tau, k) - \theta(\tau, k-1)) d\tau$$

把学习律式 (20) 代入上式有:

$$\text{PartB} = -\frac{\gamma}{2} \int_0^t S(\tau, k)^2 d\tau - \int_0^t S(\tau, k) (f(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k)) d\tau \quad (28)$$

把式 (27) 和式 (28) 代入式 (26) 有:

$$\Delta L(t, k) = -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \text{PartC} \quad (29)$$

其中 PartC 为

$$\text{PartC} = \int_0^t S(\tau, k) \cdot (f(\mathbf{x}, \tau) - f(\mathbf{z}, \tau)) d\tau$$

上式右边取绝对值有

$$\text{PartC} \leq \int_0^t |S(\tau, k)| \cdot |f(\mathbf{x}, \tau) - f(\mathbf{z}, \tau)| d\tau$$

考虑到式 (2) 的 Lipschitz 连续条件, 有:

$$\text{PartC} \leq L_f \int_0^t |S(\tau, k)| \cdot |e(\tau, k)| d\tau$$

考虑到式 (17), 则由上式有:

$$\text{PartC} \leq L_f \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau + L_f \|A_c\| \times e^{\|A_c\|T} \int_0^t |S(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |S(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau$$

利用二重积分的性质, 上式可化为

$$\text{PartC} \leq L_f \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau + L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \times \int_0^t |S(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |S(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau \leq L_f \|A_c\| \times e^{\|A_c\|T} \left(\int_0^t |S(\tau, k)| d\tau \right)^2 + L_f \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 上式可化为

$$\begin{aligned} \text{PartC} &\leq L_f \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \\ &L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} t \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau \leq \\ &(L_f + L_f \|A_c\| e^{\|A_c\|T} T) \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau \quad (30) \end{aligned}$$

上式带入式 (29) 有:

$$\begin{aligned} \Delta L(t, k) &\leq -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) - \\ &\left(\beta + \frac{\gamma}{2} - L_f - L_f T \|A_c\| e^{\|A_c\|T}\right) \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau \end{aligned}$$

选取 β 和 γ , 使得下式成立:

$$\beta + \frac{\gamma}{2} \geq L_f + L_f T \|A_c\| e^{\|A_c\|T} \quad (31)$$

则有

$$\Delta L(t, k) \leq -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) \quad (32)$$

2) 证明 $S(t, k)$ 的收敛性

$L(t, k)$ 第 1 次迭代值为

$$L(t, 1) = \Delta L(t, 1) + L(t, 0) \quad (33)$$

把式 (29) 中 $k=1$ 的情况带入上式, 并考虑到 $\theta(t, 0) = 0$, 则上式可写成:

$$\begin{aligned} L(t, 1) &= \frac{1}{2\gamma} \int_0^t S(\tau, 1) (f(\mathbf{z}, \tau) - f(\tau, 1)) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_0^t (f(\mathbf{z}, \tau))^2 d\tau - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \int_0^t S^2(\tau, 1) d\tau \end{aligned}$$

上式对 t 求导有:

$$\begin{aligned} \dot{L}(t, 1) &= \frac{1}{2\gamma} (f(\mathbf{z}, t))^2 - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) S^2(t, 1) + \\ &\frac{1}{2\gamma} S(t, 1) (f(\mathbf{z}, t) - f(\mathbf{x}, t)) \quad (34) \end{aligned}$$

采用从式 (29) 获得式 (32) 相同的推导过程, 有:

$$\begin{aligned} \dot{L}(t, 1) &\leq \frac{1}{2\gamma} (f(\mathbf{z}, t))^2 - \\ &\left(\beta + \frac{\gamma}{2} - L_f - L_f T \|A_c\| e^{\|A_c\|T}\right) S^2(t, 1) \end{aligned}$$

当式 (31) 成立时, 由上式可得:

$$\dot{V}(t, 1) \leq \frac{1}{2\gamma} (f(\mathbf{z}, t))^2 \quad (35)$$

由于假设系统 (1) 的 $f(\mathbf{z}, t)$ 有界, 由上式有:

$$\begin{aligned} L(t, 1) &= L(0, 1) + \int_0^t \dot{L}(\tau, 1) d\tau \leq \\ &\left| \int_0^t \dot{L}(\tau, 1) d\tau \right| \leq \int_0^t \sqrt{\frac{1}{2\gamma} (f(\mathbf{z}, t))^2} d\tau < \infty \end{aligned}$$

因此, $L(t, 1)$ 有界, 又根据 $L(t, k) \geq 0$ 和 $L(t, k)$ 随 k 单调下降, 则 $L(t, k)$ 必有极限, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(t, k) = 0 \quad (36)$$

由于

$$\begin{aligned} L(t, k) &= (L(t, k) - L(t, k-1)) + \dots + \\ &(L(t, 2) - L(t, 1)) + L(t, 1) \end{aligned}$$

重复应用式 (32) 有:

$$\begin{aligned} L(t, k) &= L(t, 1) + \sum_{j=2}^k \Delta L(t, j) \leq \\ &L(t, 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k S^2(t, j-1) \quad (37) \end{aligned}$$

对式 (37) 的两边取极限有:

$$\sum_{j=2}^{\infty} S^2(t, j-1) \leq 2L(t, 1) \quad (38)$$

因此, 式 (38) 的无穷级数 $\sum_{j=2}^{\infty} S^2(t, j-1)$ 收敛, 由级数收敛的必要条件有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(t, k) = 0 \quad (39)$$

因此, 根据式 (17) 有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(t, k) = 0, \quad t \in [0, T]$$

即式 (22) 成立, 因此状态变量 $\mathbf{x}(t, k)$ 和控制变量 $u(t, k)$ 都是连续有界的. $\square$

情况 2. 下面讨论第二种情况, $b(\mathbf{x}, t)$ 未知, 但有粗略估计 $b_0(\mathbf{x}, t)$, 设

$$w(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) + (b(\mathbf{x}, t) - b_0(\mathbf{x}, t))u(t, k) \quad (40)$$

有如下定理.

定理 3. 对于系统 (1) 在时间区间 $t \in [0, T]$ 上的迭代学习控制, 控制通道增益 $b(\mathbf{x}, t)$ 未知, 但有粗略估计 $b_0(\mathbf{x}, t)$. 假设 $b(\mathbf{x}, t)$ 和 $b_0(\mathbf{x}, t)$ 都为不等于零的有界局部 Lipschitz 连续函数, $b(\mathbf{x}, t)$ 和 $b_0(\mathbf{x}, t)$ 具有相同的符号, 且符号不变并有相同的界. 仍然采用控制律式 (21), 但迭代学习律改为式 (41) 的部分限幅迭代学习律:

$$\begin{cases} \theta(t, 0) = 0 \\ \theta(t, k) = \text{sat}(\theta(t, k-1)) + \gamma S(t, k) \end{cases} \quad (41)$$

其中

$$\text{sat}(\theta) = \begin{cases} B_w, & \theta > B_w \\ \theta, & |\theta| \leq B_w \\ -B_w, & \theta < -B_w \end{cases} \quad (42)$$

B_w 取为 $|w(\mathbf{x}, t)|$ 的界, 则仍然可以实现对校正轨迹的完全跟踪, 即式 (22) 成立.

为了证明定理 3, 先引入饱和函数引理.

引理 2. 对于实数 p 和 ϕ , 若 $p \in [-B_w, B_w]$, 即满足 $p = \text{sat}(p)$, 则有:

$$[(q_1 + q_2)p - q_1\phi - q_2\text{sat}(\phi)] \cdot [\phi - \text{sat}(\phi)] \leq 0 \quad (43)$$

式中 q_1 和 q_2 为非负常数.

引理 1 是文献 [12] 中引理 2.1 的标量形式, 证明见文献 [12]. 下面证明定理 3.

证明. 由式 (15) 和式 (1) 有:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t, k) = & \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) + f(\mathbf{x}, t) - \\ & z_{n+1}(t) + bu(t, k) \end{aligned}$$

把控制律式 (21) 代入上式有:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t, k) = & -\frac{b}{b_0}(\beta + \gamma)S(t, k) + \\ & \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) + \text{Part2A} \end{aligned} \quad (44)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{Part2A} = & f(\mathbf{x}, t) - \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) z_{n+1}(t) - \\ & \frac{b}{b_0} \text{sat}(\theta(t, k-1)) \end{aligned} \quad (45)$$

由假设可知 Part2A 有界, 又由于 b 和 b_0 同号, 由式 (17) 可知, 若反馈增益 $(\beta + \gamma)$ 足够大, 则可以克服式 (44) 第二项的扰动, 使 $S(t, k)$ 为有界指数衰减函数, 从而 $\mathbf{e}(t, k)$ 和 $u(t, k)$ 都有界, 且 $u(t, k)$ 的界与 β 和 γ 无关, 设 B_u 为 $|u(t, k)|$ 的界. 由式 (44) 可知道 $(\beta + \gamma)$ 需要满足的关系式为

$$\frac{b}{b_0}(\beta + \gamma)|S(t, k)| > \left| \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) \right| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}(t, k)|$$

考虑到式 (17), 由上式有:

$$(\beta + \gamma) > \left| \frac{b - b_0}{b} \right| \cdot |\mathbf{a}| \cdot (1 + T \|A_c\| e^{\|A_c\|T}) \quad (46)$$

由式 (46) 可知, $b_0(\mathbf{x}, t)$ 越接近 $b(\mathbf{x}, t)$, 即估计得越准确, 在时间轴上收敛所需的 $(\beta + \gamma)$ 越小. 设 $\mathbf{x}^1$ 和 $\mathbf{x}^2$ 状态空间任意两点, 由式 (40) 有:

$$\begin{aligned} |w(\mathbf{x}^1, t) - w(\mathbf{x}^2, t)| & \leq |f(\mathbf{x}^1, t) - f(\mathbf{x}^2, t)| + \\ |b(\mathbf{x}^1, t) - b(\mathbf{x}^2, t) - b_0(\mathbf{x}^1, t) + b_0(\mathbf{x}^2, t)| & \cdot |u(t, k)| \end{aligned}$$

把 f , b 和 b_0 的 Lipschitz 条件以及 $|u(t, k)|$ 的界代入上式有:

$$|w(\mathbf{x}^1, t) - w(\mathbf{x}^2, t)| \leq L_w \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\| \quad (47)$$

其中 $L_w = L_f + 2L_b B_u$, 它与 β 和 γ 无关. 因此 $w(\mathbf{x}, t)$ 和 $f(\mathbf{x}, t)$ 都为局部 Lipschitz 连续的未知非线性时变函数, 只是记号不同. 采用与定理 2 相同的证明过程即可证明定理 3. 但是由于定理 3 采用部分限幅迭代学习律, 需要对证明过程的第一步进行重新推导.

定义类 Lyapunov 函数 $L(t, k)$ 为

$$\begin{aligned} L(t, k) = & \frac{1}{2} S^2(t, k) + \\ & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))^2 d\tau \end{aligned} \quad (48)$$

由式 (48) 有:

$$\begin{aligned} \Delta L(t, k) = & L(t, k) - L(t, k-1) = \\ & -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) + \text{Part2B} + \text{Part2C} \end{aligned} \quad (49)$$

其中 Part2B 和 Part2C 分别为

$$\begin{aligned} \text{Part2B} = & \frac{1}{2} S^2(t, k) = \\ & \frac{1}{2} S^2(0, k) + \int_0^t S(\tau, k) \dot{S}(\tau, k) d\tau \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \text{Part2C} = & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))^2 d\tau - \\ & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k-1))^2 d\tau \end{aligned} \quad (51)$$

由系统 (1) 和式 (40) 有:

$$\dot{\mathbf{x}}_n(t, k) = w(\mathbf{x}, t) + b_0 u(t, k) \quad (52)$$

再由式 (15) 和式 (43) 有:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t, k) = & \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1}(t, k) + w(\mathbf{x}, t) - \\ & z_{n+1}(t) + b_0 u(t, k) \end{aligned}$$

把控制律式 (21) 代入上式有:

$$\dot{S}(t, k) = -\beta S(t, k) + w(\mathbf{x}, t) - \theta(t, k) \quad (53)$$

把式 (53) 带入式 (50) 并考虑零初始条件有

$$\text{Part2B} = -\beta \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \int_0^t S(\tau, k)(w(\mathbf{x}, \tau) - \theta(\tau, k)) d\tau \quad (54)$$

式 (51) 第二项的被积函数可化为

$$(w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k-1))^2 = (w - \text{sat}(\theta) + \text{sat}(\theta) - \theta)^2 = (w - \text{sat}(\theta))^2 - (\theta - \text{sat}(\theta))(2w - \text{sat}(\theta) - \theta) \quad (55)$$

取式 (43) 中的系数 $q_1 = 1, q_2 = 1$, 变量 $p = w(\mathbf{z}, \tau)$ 和 $\phi = \theta(\tau, k-1)$, 则有:

$$(\theta - \text{sat}(\theta))(2w - \text{sat}(\theta) - \theta) \leq 0$$

把上式代入式 (55) 有:

$$(w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k-1))^2 \geq (w(\mathbf{z}, \tau) - \text{sat}(\theta(\tau, k-1)))^2$$

再把上式代入式 (51) 有:

$$\text{Part2C} \leq \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k))^2 d\tau - \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (w(\mathbf{z}, \tau) - \text{sat}(\theta(\tau, k-1)))^2 d\tau \quad (56)$$

利用 $(h-b)^2 - (h-d)^2 = -(b-d)^2 - 2(b-d)(h-b)$ 有:

$$\text{Part2C} \leq -\frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\theta(\tau, k) - \text{sat}(\theta(\tau, k-1)))^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \times \int_0^t -2(w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(k))(\theta(k) - \text{sat}(\theta(k-1))) d\tau$$

把学习律 (21) 代入上式有:

$$\text{Part2C} \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^t S(\tau, k)^2 d\tau - \int_0^t S(\tau, k)(w(\mathbf{z}, \tau) - \theta(\tau, k)) d\tau \quad (57)$$

把式 (54) 和式 (57) 代入式 (49) 有:

$$\Delta L(t, k) \leq -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \text{Part2D} \quad (58)$$

其中 Part2D 为

$$\text{Part2D} = \int_0^t S(\tau, k) \cdot (w(\mathbf{x}, \tau) - w(\mathbf{z}, \tau)) d\tau$$

上式右边被积函数取绝对值有:

$$\text{Part2D} \leq \int_0^t |S(\tau, k)| \cdot |w(\mathbf{x}, \tau) - w(\mathbf{z}, \tau)| d\tau$$

利用式 (47) 有:

$$|w(\mathbf{x}, \tau) - w(\mathbf{z}, \tau)| \leq L_w |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq L_w |\mathbf{e}(t, k)|$$

代入 Part2D 式中有:

$$\text{Part2D} \leq L_w \int_0^t |S(\tau, k)| \cdot |\mathbf{e}(\tau, k)| d\tau$$

把式 (17) 代入上式有:

$$\text{Part2D} \leq L_w \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau + \|A_c\| \times e^{\|A_c\|T} L_w \int_0^t |S(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |S(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau$$

利用二重积分的性质有:

$$\text{Part2D} \leq L_f \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w \times \int_0^t |S(\tau, k)| \left(\int_0^\tau |S(\tau_1, k)| d\tau_1 \right) d\tau \leq L_f \int_0^t |S(\tau, k)|^2 d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w \left(\int_0^t |S(\tau, k)| d\tau \right)^2$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 上式变为

$$\text{Part2D} \leq L_w \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w t \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau \leq (L_w + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w T) \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau \quad (59)$$

把上式带入式 (58) 有:

$$\Delta L(t, k) \leq \left(\beta + \frac{\gamma}{2} - L_w - \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w T\right) \times \int_0^t S^2(\tau, k) d\tau - \frac{1}{2} S^2(t, k-1) \quad (60)$$

选取 β 和 γ , 使下式成立:

$$\beta + \frac{\gamma}{2} \geq L_w + \|A_c\| e^{\|A_c\|T} L_w T \quad (61)$$

则由式 (60) 有:

$$\Delta L(t, k) \leq -\frac{1}{2} S^2(t, k-1) \quad (62)$$

上式与定理 2 中的式 (32) 一致, 采用与定理 2 的第 2) 步证明方法, 即可证明定理 3, 但要求和同时满足式 (46) 和式 (61). $\square$

定理 2 和定理 3 的说明:

1) 任意随机初态的迭代学习控制的跟踪误差由两部分组成: 1) 修正轨迹与期望轨迹的误差 ε_i , 由于采用了有限时间收敛的过渡曲线, 这部分误差在 T_p 之后为零; 2) 在迭代学习控制作用下的系统输出跟踪修正轨迹的跟踪误差 e_i , 总误差可表示为

$$\mu_i = x_i - r_i = \begin{cases} \varepsilon_i + e_i, & 0 \leq t \leq T_p \\ e_i, & T_p < t \leq T \end{cases} \quad (63)$$

2) 应用定理 3 时, 只需对 $b(\mathbf{x}, t)$ 进行粗略估计, 估计的误差会反映到系统的输出跟踪误差中, 学习律在迭代过程中自动补偿, 因此, 应用起来很方便.

3) 从定理 2 和定理 3 的证明过程可以看出, 随着迭代次数的增加, $\theta(t, k)$ 分别收敛于 $f(\mathbf{x}, t)$ 和 $w(\mathbf{x}, t)$, 因此 $\theta(t, k)$ 能实现对不确定部分的迭代估计. 可以把 $f(\mathbf{x}, t)$ 理解为系统的内部扰动, 而把 $w(\mathbf{x}, t)$ 理解为由系统内部扰动 $f(\mathbf{x}, t)$ 和折算到输入侧的外部扰动 $(b(\mathbf{x}, t) - b_0(\mathbf{x}, t))u(t, k)$ 之和, 通过迭代学习把总扰动估计出来, 并在控制中进行补偿, 实现前馈控制, 达到完全跟踪目标, 其控制原理与自抗扰控制原理有许多相似之处, 只是自抗扰控制是在时间域进行, 而迭代学习是在迭代域中完成, 它们的结合将是一个有趣的问题.

3 仿真研究

考虑如下的二阶非线性不确定系统^[9, 24]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, k) = x_2(t, k) \\ \dot{x}_2(t, k) = f(\mathbf{x}, t) + b(\mathbf{x}, t)u(t, k) \end{cases} \quad (64)$$

假设系统 (64) 中的 $f(\mathbf{x}, t)$ 满足本文定理条件, 但是结构和具体参数都未知. 仿真时取

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{g \sin x_1 - \frac{ml(x_2)^2 \cos x_1 \cdot \sin x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m(\cos x_1)^2}{m_c + m} \right)} \quad (65)$$

$$b(\mathbf{x}, t) = \frac{\frac{\cos x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m(\cos x_1)^2}{m_c + m} \right)} \quad (66)$$

式 (64) 和式 (66) 中的 $x_1(t, k)$ 和 $x_2(t, k)$ 分别是倒立摆的角位移和角速度, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, m_c 是小车的质量, m 是摆的质量, l 是摆的半长度, u 是摆的作用力. 仿真中采用与文献 [24] 相

同参考轨迹和参数, 取 $m_c = 1 \text{ kg}$, $m = 0.1 \text{ kg}$ 和 $l = 0.5 \text{ m}$. 期望轨迹为

$$\begin{cases} r_1(t) = -0.2 + \cos \pi t \\ r_2(t) = -\pi \sin \pi t \\ r_3(t) = -\pi^2 \cos \pi t \end{cases} \quad (67)$$

系统状态初值为

$$\begin{cases} x_1(0, k) = 0.55 + 0.1 \text{rand} \neq 0.8 \\ x_2(0, k) = 0 \end{cases} \quad (68)$$

上述仿真实例的模型和参数, 以及期望轨迹和系统初态与文献 [24] 完全相同, 并采用相同的评价方法, 即采用如下完全跟踪误差绝对值的最大值的对数来评价控制效果, 设 $J_1(k) = \lg \max_{t \in [0, T]} |e_1(t, k)|$, $J_2(k) = \lg \max_{t \in [0, T]} |e_2(t, k)|$.

假设 $b(\mathbf{x}, t)$ 的粗略估计 $b_0(\mathbf{x}, t) = 0.5$, 首先进行期望轨迹修正, 取有限时间跟踪微分器 (7) 的阶次为三阶, 取 Hurwitz 多项式系数为 $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ 和 $c_3 = 3$, 幂指数为 $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_1 = 0.6$ 和 $\alpha_1 = 0.75$, 采用变速度因子, 采用如下取法:

$$R = R_{\min} + (R_{\max} - R_{\min})(1 - e^{-\lambda t}) \quad (69)$$

其中 $R_{\min} = 10$, $R_{\max} = 40$ 和 $\lambda = 10$. 把上述全部参数代入式 (7) 中, 可得到修正后的期望轨迹 $\mathbf{z}^T$.

采用定理 3 的算法, 取滑动面误差系数 $a_1 = 15$ 和 $a_2 = 3$, 取反馈增益 $\beta = 5$, 学习增益 $\gamma = 10$, 迭代 10 次后结果如图 1 ~ 图 5 所示.

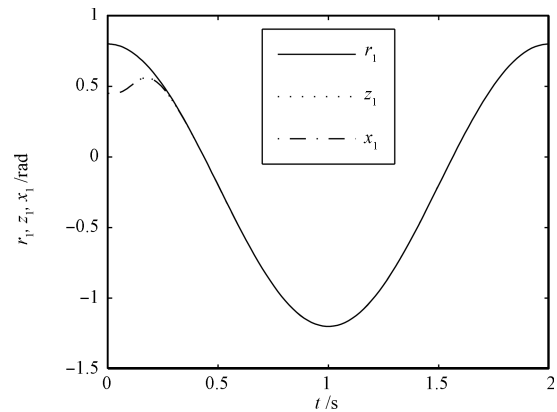
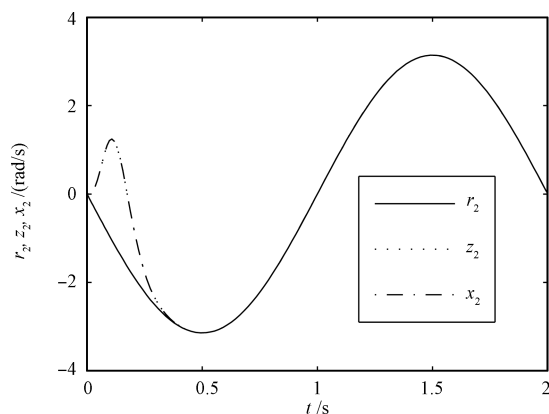
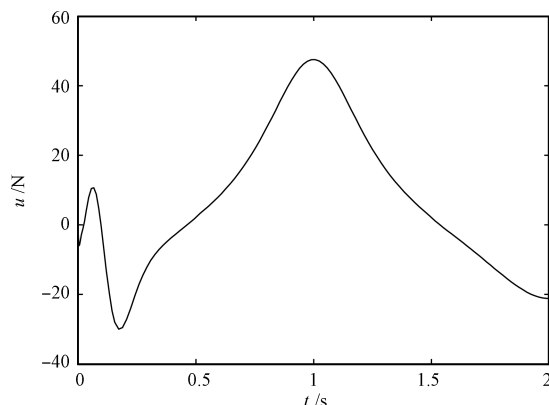
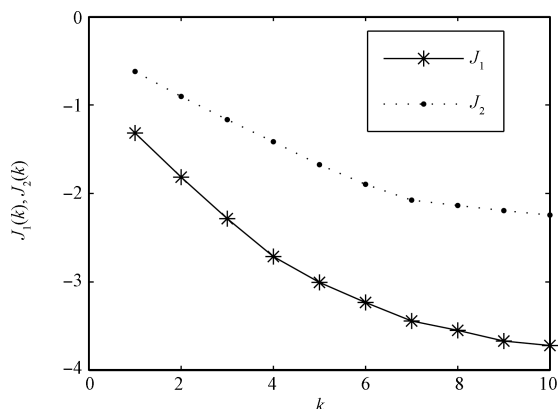


图 1 迭代 10 次后的 r_1 , z_1 和 x_1

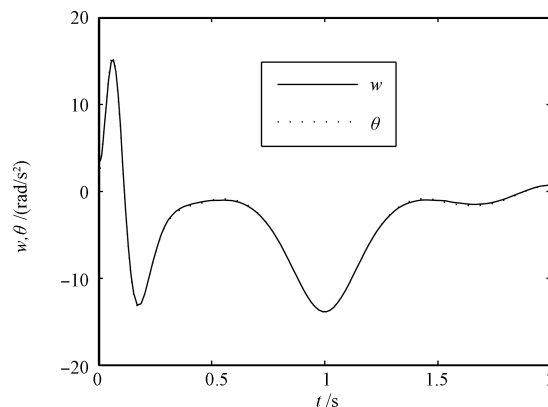
Fig.1 r_1 , z_1 and x_1 after the 10th iteration

图2 迭代10次后的 r_2 , z_2 和 x_2 Fig. 2 r_2 , z_2 and x_2 after the 10th iteration图3 迭代10次后的控制输入 u Fig. 3 Control input u after the 10th iteration图4 $J_1(k)$ 和 $J_2(k)$ Fig. 4 $J_1(k)$ and $J_2(k)$

从图1和图2可以看出,跟踪微分器的输出 z_i 经过有限时间约0.3s后收敛于期望轨迹 r_i .系统状态 x_i 迭代10次后几乎与 z_i 重合,从图5可以看出,迭代学习量 $\theta(t, k)$ 实现了对扰动 $w(\mathbf{x}, t)$ 的估计.

仿真结果表明,当系统模型的不确定项的结构和参数都未知,不满足线性参数化条件时,可以应用本文的迭代学习控制方法,实现有限时间后,系统状态完全跟踪参考信号.对比文献[24]的仿真结

果可以看出,应用有限时间跟踪微分器来安排过渡的方法为迭代学习控制的初值问题研究提供了新思路,特别对于高阶系统,该方法相对于文献[24]的预先设定误差轨迹的方法更容易整定工作参数;在迭代学习控制算法方面,本文迭代10次后的跟踪性能在收敛速度和收敛过程的平滑性方面都要好于文献[24]迭代200次以后的结果.

图5 迭代10次后的 w 和 θ Fig. 5 w and θ after the 10th iteration

4 结论

本文提出的采用有限时间跟踪微分器来安排过渡过程的方法,能够较好地解决迭代学习控制的初值问题,同时,论文还提出了适合一类不满足线性参数化条件的不确定非线性时变系统的迭代学习控制方法,应用类Lyapunov方法给出了证明和说明,仿真结果表明本文所提出的有限时间跟踪微分器和迭代学习方法是有效的.

References

- Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial state shifting. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(2): 447–454
- Lee K H, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 345–359
- Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: Press of National Defense Industry, 1999 (孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999)
- Park K H. An average operator-based PD-type iterative learning control for variable initial state error. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 865–869
- Ruan Xiao-E, Zhao Jian-Yong. Pulse compensated iterative learning control to nonlinear systems with initial state uncertainty. *Control Theory and Applications*, 2012, **29**(8): 993–1000 (阮小娥, 赵建永. 具有初始状态不确定性的非线性系统脉冲补偿迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, **29**(8): 993–1000)

- 6 Sun M X, Wang D W. Iterative learning control with initial rectifying action. *Automatica*, 2002, **38**(7): 1177–1182
- 7 Li X D, Chow T W S, Ho J K L, Zhang J. Iterative learning control with initial rectifying action for nonlinear continuous systems. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **3**(1): 49–55
- 8 Sun Ming-Xuan, Yan Qiu-Zhen. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 251–262
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. 自动化学报, 2013, **39**(3): 251–262)
- 9 Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(5): 724–732
- 10 He Xiong-Xiong, Qin Zhen-Hua, Zhang Duan. Adaptive iterative learning control for uncertain robot based on boundary layer. *Control Theory and Applications*, 2012, **29**(8): 1090–1093
(何熊熊, 秦贞华, 张端. 基于边界层的不确定机器人自适应迭代学习控制. 控制理论与应用, 2012, **29**(8): 1090–1093)
- 11 Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong, Yu Li. Iterative learning controller designs: a finite time dead-zone approach. *Control Theory and Applications*, 2007, **24**(3): 349–355
(孙明轩, 何熊熊, 俞立. 迭代学习控制器设计: 一种有限时间死区方法. 控制理论与应用, 2007, **24**(3): 349–355)
- 12 Sun Ming-Xuan. Finite-time iterative learning control. *Journal of System Science and Mathematical Science*, 2010, **30**(6): 733–741
(孙明轩. 有限时间迭代学习控制. 系统科学与数学, 2010, **30**(6): 733–741)
- 13 Han Jing-Qing. *Active Disturbance Rejection Control Technique*. Beijing: Press of National Defense Industry, 2008
(韩京清. 自抗扰控制技术. 北京: 国防工业出版社, 2008)
- 14 Yin C K, Xu J X, Hou Z S. An ILC scheme for a class of nonlinear systems with time-varying parameters subject to second-order internal model. In: Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 452–457
- 15 Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based iterative learning control for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2665–2670
- 16 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 454–458
(朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制. 自动化学报, 2010, **36**(3): 454–458)
- 17 Park B H, Kuct Y, Lee J S. Adaptive learning control of uncertain robotic systems. *International Journal of Control*, 1996, **65**(5): 725–744
- 18 Xu Jian-Xin. Recent advances in iterative learning control. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(1): 132–142
- 19 Xu Jian-Xin, Xu Jing. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, **34**(1): 589–597
- 20 Chi R H, Hou Z S, Xu J X. Adaptive ILC for a class of discrete-time systems with iteration-varying trajectory and random initial condition. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2207–2213
- 21 Xue W C, Huang Y, Yang X X. What kinds of system can be used as tracking-differentiator. In: Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. Beijing, China: IEEE, 2010. 6113–6120
- 22 Wang Xin-Hua, Liu Jin-Kun. *Differentiator Design and Application*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010
(王新华, 刘金琨. 微分器设计与应用. 北京: 电子工业出版社, 2010)
- 23 Xu J X, Ying T. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940–1945
- 24 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems. *Control Theory and Applications*, 2013, **30**(1): 23–30
(严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法. 控制理论与应用, 2013, **30**(1): 23–30)



李向阳 华南理工大学自动化科学与工程学院副教授. 主要研究方向为学习控制, 嵌入式系统, 工业自动化.
E-mail: xyangli@scut.edu.cn
(**LI Xiang-Yang** Associate professor at the College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology. His research interest covers learning control, embedded system, and industrial automation.)