

# 具有 Markov 跳跃参数的一类随机非线性系统逆最优增益设计

李桂林<sup>1,2</sup> 王传锐<sup>1</sup> 季海波<sup>1</sup>

**摘要** 研究了一类随机非线性系统的逆最优增益设计问题, 系统中除了方差未知的 Wiener 噪声之外, 还含有 Markov 跳跃参数. 首先, 给出此类系统逆最优增益设计问题可解的一个充分条件. 其次, 针对一类具有严格反馈形式的随机非线性系统, 利用积分反推法, 给出了依概率全局渐近稳定和逆最优控制策略的设计方法. 其中, 所设计的 Lyapunov 函数和控制策略与模式显式无关, 克服了由于 Markov 跳跃模式引起的耦合项所带来的设计困难. 最后, 通过仿真验证了控制策略的有效性.

**关键词** Markov 跳跃, Wiener 噪声, 逆最优增益设计, 依概率渐近稳定, 积分反推法

**引用格式** 李桂林, 王传锐, 季海波. 具有 Markov 跳跃参数的一类随机非线性系统逆最优增益设计. 自动化学报, 2014, 40(7): 1285–1294

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2014.01285

## Inverse Optimal Gain Assignment Control for a Class of Stochastic Nonlinear Systems with Markovian Jump Parameters

LI Gui-Lin<sup>1,2</sup> WANG Chuan-Rui<sup>1</sup> JI Hai-Bo<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, the inverse optimal gain assignment problem for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian jump parameters is investigated. Firstly, a sufficient condition to solve this problem for Markovian jump nonlinear systems with bounded indefinite Wiener noises is given. Then, the control strategies of global asymptotic stability and inverse optimal stabilization in probability are presented for a class of strict feedback nonlinear systems. To avoid dealing with the “interconnected” term caused by Markovian jump, the Lyapunov function and the controller are designed to be independent of the regime. Finally, simulation verifies the effectiveness of the control algorithm.

**Key words** Markovian jump, Wiener noise, inverse optimal gain assignment, asymptotic stabilization in probability, integrator backstepping

**Citation** Li Gui-Lin, Wang Chuan-Rui, Ji Hai-Bo. Inverse optimal gain assignment control for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian jump parameters. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(7): 1285–1294

Markov 跳跃系统的状态向量包括状态 (State) 和模式 (Regime) 两部分, 各模式之间的转移是随机的, 服从 Markov 过程. 在许多结构或参数常会发生无法预知变化的实际系统中, Markov 跳跃模型有着广泛的应用. 因此, Markov 跳跃系统一直受到控制界的普遍关注, 并在其线性系统稳定性分析和控制方面取得了一系列的成果<sup>[1–7]</sup>. 然而, 对 Markov 跳跃非线性系统的研究目前仍多为稳定性分析<sup>[8–9]</sup> 而非控制器设计, 因为在用 Lyapunov 函数作用无穷

小算子时, 出现了由于 Markov 跳跃引起的耦合项, 给设计带来了本质困难. 例如, 文献 [10] 研究了一类二维 Markov 时滞跳跃系统的镇定控制, 但它同时也指出, 由于耦合项的影响, 该方法不适用于一般  $n$  维严格反馈 Markov 跳跃时滞系统. 为了处理耦合项, 文献 [11–12] 要求 Markov 过程具有平稳分布, 并且初始分布要恰好是此平稳分布, 但这一假设具有一定的局限性, 实际中难以应用.

非线性系统的最优控制问题通常都归结于求解 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 偏微分方程, 而在许多情况下, HJI 方程难于求解或无解, 因此, 文献 [13] 提出逆最优控制问题, 利用控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF), 把对 HJI 方程的求解转变为寻求闭环系统的 CLF. 逆最优控制从理论上解决了非线性系统的全局稳定与全局优化问题<sup>[14]</sup>, 因此, 对非线性系统逆最优控制的研究受到了广泛的关注. 文献 [15] 研究了具有确定扰动的非线性系统逆最优增益设计问题, 文献 [16] 讨论了

收稿日期 2013-07-25 录用日期 2013-12-03  
Manuscript received July 25, 2013; accepted December 3, 2013  
国家自然科学基金 (61273090) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61273090)

本文责任编辑 刘允刚

Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang

1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230027 2. 江苏师范大学电气工程及自动化学院 徐州 221116

1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027 2. School of Electrical Engineering and Automation, Institute of Automation, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116

具有 Markov 跳跃参数以及确定扰动的非线性系统逆最优增益设计问题. 对于随机非线性系统, 常假定系统受到的随机扰动是 Wiener 过程, 而对 Wiener 随机系统进行控制设计存在一个难点在于, 在随机控制 Lyapunov 分析中出现了 Hessian 函数矩阵的二阶项. 文献 [17] 最早研究了随机控制 Lyapunov 函数, 将 Sontag 一般镇定公式推广到随机非线性系统, 文献 [18–19] 将逆最优控制引入到随机非线性系统, 解决了随机严格反馈非线性系统的镇定与逆最优增益设计问题. 文献 [20] 研究了随机非线性系统的零和微分对策也即逆最优控制问题.

在实际情形中, 非线性系统往往既含有随机扰动又符合 Markov 跳跃模型, 目前, 对此类系统的逆最优控制设计研究较少. 基于此, 本文讨论同时具有随机扰动和 Markov 跳跃参数的非线性系统逆最优增益设计问题. 首先将文献 [18] 中的逆最优增益设计问题可解的定义扩展到具有 Markov 跳跃参数的随机非线性系统, 然后给出 Markov 跳跃非线性系统在未知方差 Wiener 噪声作用下, 逆最优增益设计问题可解的一个充分条件; 接下来应用积分反推法, 给出了一类严格反馈 Markov 跳跃随机非线性系统的依概率全局渐近稳定和逆最优控制策略的设计方法. 在控制策略的设计过程中, 为了去除对 Markov 过程的一些约束条件 (如文献 [11–12]), 文中构造了一个与模态显式无关的 Lyapunov 函数, 以满足不同模态下的函数稳定要求. 另外, 以往绝大多数关于 Markov 跳跃系统的相关工作均要求模态的转移概率完全或部分已知, 而本文设计的控制策略与模态的转移概率无关, 具有在模态及转移概率未知的情况下依然有效的优势.

## 1 问题描述

对本文使用的记号做如下约定:  $\mathbf{R}$  表示实数集,  $\mathbf{R}_+$  表示非负实数集,  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  维实 Euclidean 空间. 对一个向量或矩阵  $A$ ,  $|A|$  表示 Euclidean 范数 (2-范数). 若  $A$  为方阵,  $\text{tr}(A)$  为  $A$  的迹. 对任意对称矩阵  $A$ , 存在一个正交阵  $Q$  使得  $Q A Q^T = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  和一个常数  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) 使得  $a_k \geq 0$ ,  $a_{k+1} \leq 0$  ( $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = -1$ ), 我们用  $p(A)$  来代表  $Q^T \text{diag}\{a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0\} Q$ .  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ,  $x \wedge y = \min\{x, y\}$ .  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  表示全概率空间, 其中,  $\Omega$  为样本空间,  $\mathcal{F}$  为  $\sigma$ -代数,  $P$  为概率测度.  $E$  表示求期望算子.  $C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times S; \mathbf{R}_+)$  为所有定义在  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times S$  上的满足对  $\mathbf{x}, t$  分别是二次和一次连续可微的非负函数  $V(\mathbf{x}, t, i)$  的集合, 其中  $S = \{1, 2,$

$\dots, N\}$ ,  $N$  是正整数.  $L_f V$  表示沿着方向  $f$  函数  $V$  的导数. 一个连续函数  $\alpha: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  被称为属于  $\mathcal{K}_\infty$  类函数, 如果它严格递增,  $\alpha(0) = 0$  且当  $r \rightarrow \infty$  时,  $\alpha(r) \rightarrow \infty$ . 对于函数  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ , 若其导数  $\gamma'(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\ell\gamma(r)$  是 Legendre-Fenchel 变换满足<sup>[18]</sup>

$$\ell\gamma(r) = r(\gamma')^{-1}(r) - \gamma((\gamma')^{-1}(r)) = \int_0^r (\gamma')^{-1}(s) ds \quad (1)$$

且  $\ell\gamma(r) \in \mathcal{K}_\infty$ .

首先考虑一般具有 Markov 跳跃参数的  $n$  维随机非线性系统

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, r_t, \mathbf{u})dt + g(\mathbf{x}, t, r_t, \mathbf{u})d\mathbf{w}(t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$  分别表示系统的状态和输入, 初始值  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 噪声干扰  $\mathbf{w}$  是定义在全概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  上的  $r$  维 Wiener 过程, 记增量  $d\mathbf{w}$  的协方差为  $\Sigma \Sigma^T dt$ , 即均值  $E\{d\mathbf{w}d\mathbf{w}^T\} = \Sigma(t)\Sigma(t)^T dt$ , 其中  $\Sigma(t)$  是一个非负定, 未知有界的函数矩阵. 跳跃模态  $r_t$  是取值于离散有限状态空间  $S$  上的连续时间 Markov 过程, 转移概率矩阵  $P = \{p_{ij}\}$  为

$$p_{ij} = P(r_{t+h} = j | r_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & j \neq i \\ 1 + \pi_{ii}h + o(h), & j = i \end{cases}$$

式中,  $h > 0$ ,  $o(h)$  表示比  $h$  高阶的无穷小量,  $\pi_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$  表示从模态  $i$  转移到模态  $j$  的速率,  $\pi_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}$ . 假定 Markov 过程  $r_t$  与 Wiener 过程  $\mathbf{w}(t)$  相互独立. 对任意给定的  $i \in S$ , 函数  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times S \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  和  $g: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times S \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{n \times r}$  是光滑的. 对  $V(\mathbf{x}(t), t, r_t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \times S; \mathbf{R}_+)$ , 定义广义无穷小算子

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}, t, i) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, t, i)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t, i)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, i, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} V(\mathbf{x}, t, j) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma^T(t) g^T(\mathbf{x}, t, i, \mathbf{u}) \frac{\partial^2 V(\mathbf{x}, t, i)}{\partial \mathbf{x}^2} g(\mathbf{x}, t, i, \mathbf{u}) \Sigma(t) \right]$$

特别地, 当函数  $V$  与模态无关, 即  $V(\mathbf{x}, t, i) = V(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  时, 有  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} V(\mathbf{x}, t) = 0$ .

若  $\tau_1, \tau_2$  是两个有界停时, 且满足  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ ,  $V, \mathcal{L}V$  在  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  上几乎处处有界, 根据文献 [2]

中引理 1.9 可知  $EV(\mathbf{x}(\tau_2), \tau_2, r_{\tau_2}) = EV(\mathbf{x}(\tau_1), \tau_1, r_{\tau_1}) + E \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}V(\mathbf{x}(s), s, r_s) ds$ .

下面给出本文在证明过程中将用到的两个引理 (Young 不等式) 以及随机 LaSalle 定理.

**引理 1**<sup>[21]</sup>. 对于函数  $\gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ , 若其导数  $\gamma'(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\ell\gamma(r)$  是 Legendre-Fenchel 变换, 则对  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 有如下不等式成立:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \gamma(|\mathbf{x}|) + \ell\gamma(|\mathbf{y}|)$$

当且仅当  $\mathbf{y} = \gamma'(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , 即  $\mathbf{x} = (\gamma')^{-1}(|\mathbf{y}|) \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$  时, 上式等号成立.

**引理 2**<sup>[15]</sup>. 对  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 有如下不等式成立:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{\epsilon^p}{p} |\mathbf{x}|^p + \frac{1}{q\epsilon^q} |\mathbf{y}|^q$$

其中,  $\epsilon > 0$ , 常数  $p > 1$ ,  $q > 1$ , 且  $(p-1)(q-1) = 1$ .

**定理 1 (随机 LaSalle 定理)**<sup>[15]</sup>. 对于随机系统 (2), 假设存在正定、渐小且径向无界的二阶连续可微函数  $V(\mathbf{x})$ , 以及连续的非负函数  $W(\mathbf{x}) \geq 0$ , 使得  $V(\mathbf{x})$  沿随机系统 (2), 有:

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \Sigma \right\} \leq -W(\mathbf{x})$$

成立, 则系统 (2) 在平衡点  $\mathbf{x} = 0$  达到依概率全局一致稳定, 且有渐近特性  $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}) = 0\} = 1$ .

## 2 随机逆最优增益设计

考虑如下的 Markov 跳跃随机非线性系统:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, r_t) dt + h(\mathbf{x}, r_t) u dt + g(\mathbf{x}, r_t) d\mathbf{w} \quad (3)$$

其中, 各函数变量的定义同系统 (2), 光滑函数  $\mathbf{f}, g$  满足  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, i) = 0$ ,  $g(\mathbf{0}, i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**定义 1.** 称系统 (3) 的随机逆最优增益设计问题是可解的, 如果存在函数  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$  且其导数  $\gamma'_1, \gamma'_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , 矩阵值函数  $R(\mathbf{x}, i)$ , 满足对  $\forall \mathbf{x}$ ,  $R = R^T > 0$ , 正定函数  $l(\mathbf{x}, i)$ , 正定且径向无界的函数  $S(\mathbf{x}, i) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times S; \mathbf{R}_+)$ , 和处处连续的控制策略  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, r_t)$  ( $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}, i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ), 使得系统 (3) 是依概率全局渐近稳定的, 并使性能指标

$$J(\mathbf{u}) = \sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ S(\mathbf{x}, r_t) + \int_0^t \left( l(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) + \gamma_2 \left( \left| R^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) \mathbf{u} \right| \right) - \gamma_1(|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}) \right) d\tau \right] \right\} \quad (4)$$

达到极小. 其中  $D$  是局部有界函数的集合.

**定理 2.** 考虑控制策略

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, r_t) = -R^{-1}(L_h V)^T \frac{\ell\gamma_2(|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|)}{|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|^2} \quad (5)$$

这里  $V(\mathbf{x}, r_t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times S; \mathbf{R}_+)$  是备选的正定且径向无界的 Lyapunov 函数, 函数  $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ , 其导数  $\gamma'_1(\cdot), \gamma'_2(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ , 矩阵值函数  $R(\mathbf{x}, i)$ , 满足对  $\forall \mathbf{x}$ ,  $R = R^T > 0$ , 及如下辅助系统:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, r_t) dt + h(\mathbf{x}, r_t) u dt + g(\mathbf{x}, r_t) d\mathbf{w} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{w}$  为  $r$  维 Wiener 噪声, 具有协方差

$$\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T = 2p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \frac{\ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right)}{\left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}}^2} \quad (7)$$

对所给定的 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x}, r_t)$ , 如果在控制策略 (5) 下, 辅助系统 (6) 依概率全局渐近稳定, 则控制策略

$$\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\alpha}^*(\mathbf{x}, r_t) = -\frac{\beta}{2} R^{-1}(L_h V)^T \frac{(\gamma'_2)^{-1}(|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|)}{|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|^2} \quad (8)$$

其中,  $\beta \geq 2$ , 通过最小化性能指标函数

$$J(\mathbf{u}) = \sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ 2\beta V(\mathbf{x}, r_t) + \int_0^t \left( l(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) + \beta^2 \gamma_2 \left( \frac{2}{\beta} \left| R^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) \mathbf{u} \right| \right) - \beta \lambda \gamma_1 \left( \frac{|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}}{\lambda} \right) \right) d\tau \right] \right\}, \quad \lambda \in (0, 2] \quad (9)$$

其中,

$$l(\mathbf{x}, r_t) = 2\beta \left[ \ell\gamma_2 \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) - L_{\mathbf{f}} V - \ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) - \sum_{j=1}^N \pi_{r_t j} V(\mathbf{x}, j) \right] + \beta(2-\lambda) \ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) + \beta(\beta-2) \ell\gamma_2 \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) \quad (10)$$

使得系统 (3) 的随机逆最优增益设计问题是可解的.

**证明.** 由式 (1) 知, 在控制策略 (5) 中, 分式  $\frac{\ell\gamma_2(|L_h V R^{-1/2}|)}{|L_h V R^{-1/2}|^2}$  在奇点 (分母为零) 极限存在<sup>[19]</sup>, 因

此方程 (5) 是有意义的. 因为控制策略 (5) 使系统 (6) 和 (7) 依概率全局渐近稳定, 则存在一个连续正定的函数  $W: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  使得  $\mathcal{L}V|_{(5)} = L_f V + (L_h V)\alpha + \frac{1}{2}\text{tr}\left\{\bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma}\right\} + \sum_{j=1}^N \pi_{r_{tj}} V(\mathbf{x}, j) = L_f V + \ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) - \ell\gamma_2 (|L_h V R^{-1/2}|) + \sum_{j=1}^N \pi_{r_{tj}} V(\mathbf{x}, j) \leq -W(\mathbf{x}, r_t)$ . 依据文献 [2] 中定理 3.19 知, 系统 (6) 有一个几乎处处唯一解. 因为  $l(\mathbf{x}, r_t) \geq 2\beta W + \beta(2 - \lambda)\ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) + \beta(\beta - 2)\ell\gamma_2 (|L_h V R^{-1/2}|)$ , 且  $W(\mathbf{x}, r_t)$  正定,  $\beta \in [2, \infty)$ ,  $\lambda \in (0, 2]$ ,  $\ell\gamma_1, \ell\gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$ , 所以  $l(\mathbf{x}, r_t)$  正定.

在开始证明控制策略  $\mathbf{u}^*$  最小化性能指标  $J(\mathbf{u})$  之前, 先说明它是能稳的. 由式 (1) 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V|_{(8)} &= \frac{1}{2}\text{tr}\left\{\bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma}\right\} + \sum_{j=1}^N \pi_{r_{tj}} V(\mathbf{x}, j) + \\ &L_f V - \frac{\beta}{2} \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| (\gamma'_2)^{-1} \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) = \\ &\frac{1}{2}\text{tr}\left\{\bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma}\right\} + \sum_{j=1}^N \pi_{r_{tj}} V(\mathbf{x}, j) + \\ &L_f V - \frac{\beta}{2} \left[ \ell\gamma_2 \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) + \right. \\ &\left. \gamma_2 \left( (\gamma'_2)^{-1} \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) \right) \right] \leq \\ &\mathcal{L}V|_{(5)} < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

则控制策略  $\mathbf{u}^*$  可以保证系统 (6) 和 (7) 依概率全局渐近稳定.

下面证明逆最优可解. 令  $k$  为一正整数, 定义停时  $\eta_k = \inf\{t \geq 0: |\mathbf{x}(t)| \geq k\}$ . 令  $t_k = \min\{t, \eta_k\}$ ,  $\forall t \geq 0$ , 则  $V, \mathcal{L}V$  在  $t \in [0, t_k]$  上几乎处处有界, 依据文献 [2] 中定理 3.19,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \infty$ , 因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t$ . 将  $l(\mathbf{x}, r_t)$  和控制策略  $\mathbf{u}^*$  带入  $J(\mathbf{u})$ , 可得:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= \sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ 2\beta V(\mathbf{x}(t_k), r_{t_k}) + \right. \right. \\ &\left. \int_0^{t_k} \left( l(\mathbf{x}, r_\tau) - \beta\lambda\gamma_1 \left( \frac{|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}}{\lambda} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. \beta^2\gamma_2 \left( \frac{2}{\beta} \left| R^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) \mathbf{u} \right| \right) \right) d\tau \right] \Big\} = \\ &\sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [2\beta V(\mathbf{x}(0), r_0) + \right. \\ &\left. \int_0^{t_k} \left( 2\beta \mathcal{L}V|_{(3)} + l + \beta^2\gamma_2 \left( \frac{2}{\beta} \left| R^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right| \right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \left. \beta\lambda\gamma_1 \left( \frac{|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}}{\lambda} \right) \right) d\tau \right] \Big\} = \\ &\sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ 2\beta V(\mathbf{x}(0), r_0) + \right. \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^{t_k} \left[ \beta^2\gamma_2 \left( \frac{2}{\beta} \left| R^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right| \right) - \right. \\ &\left. \beta\lambda\gamma_1 \left( \frac{|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}}{\lambda} \right) + 2\beta L_h V \mathbf{u} + \right. \\ &\left. \beta^2\ell\gamma_2 \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) - \beta\lambda\ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) + \right. \\ &\left. \left. \beta \text{tr} \left\{ \Sigma^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \Sigma \right\} \right] d\tau \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

依据 Young 不等式 (引理 1), 有:

$$\begin{aligned} -2\beta L_h V \mathbf{u} &= \beta^2 \left( \frac{2}{\beta} R^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right)^T \left( -R^{-\frac{1}{2}} (L_h V)^T \right) \leq \\ &\beta^2 \ell\gamma_2 \left( \left| L_h V R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) + \beta^2\gamma_2 \left( \frac{2}{\beta} \left| R^{\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right| \right) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \beta \text{tr} \left\{ \Sigma^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \Sigma \right\} &\leq \\ \beta \text{tr} \left\{ \Sigma^T p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \Sigma \right\} &\leq \\ \beta\lambda\ell\gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) &+ \beta\lambda\gamma_1 \left( \frac{|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

成立, 且当下式满足时, 上式等号成立:

$$\mathbf{u}^* = -\frac{\beta}{2} R^{-1} (L_h V)^T \frac{(\gamma'_2)^{-1} (|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|)}{|L_h V R^{-\frac{1}{2}}|} \quad (13)$$

$$(\Sigma \Sigma^T)^* = \lambda(\gamma'_1)^{-1} \times$$

$$\left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right) \frac{p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right)}{\left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}}} \quad (14)$$

这里称由式 (14) 给出的为“最坏情况”未知协方差. 在控制策略  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  时, 式 (9) 达到极小, 且  $J(\mathbf{u}^*) = \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) = 2\beta V(\mathbf{x}(0), r_0)$ .

为了满足定义 1 的要求, 下面只需要证明控制策略  $\mathbf{u}^*$  是连续的, 并且  $\mathbf{u}^*(\mathbf{0}, r_t) = \mathbf{0}$ . 由  $\mathbf{u}^*$  的表达式可知,  $\mathbf{u}^*(\mathbf{0}, r_t) = \mathbf{0}$ . 因为  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, r_t) = \mathbf{0}$ , 且

$$\lim_{\left| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} h R^{-\frac{1}{2}} \right| \rightarrow 0} |\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, r_t)| \leq$$

$$\lim_{\left|\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} h R^{-\frac{1}{2}}\right| \rightarrow 0} \left\{ \left| R^{-\frac{1}{2}} \right| (\gamma_2')^{-1} \left( \left| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} h R^{-\frac{1}{2}} \right| \right) \right\} = 0$$

则  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, r_t)$  是处处连续的.  $\square$

定理 2 中的  $\beta$  代表了系统的设计自由度,  $\lambda$  则表明所给出的  $J(\mathbf{u})$  是一类性能指标函数.

**注 1.** 这里需要指出, 在文献 [18] 中, 作者在研究逆最优增益设计时, 给出的辅助系统的未知噪声的协方差为  $\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T = 2g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \frac{\ell \gamma_1 \left( \left| g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right|_{\mathcal{F}} \right)}{\left| g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right|_{\mathcal{F}}}$ , 然而此项不一定是半正定的, 由此, 本文引入  $p(A)$  (简写为  $p$ ), 令  $\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T = 2p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \frac{\ell \gamma_1 \left( \left| g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right|_{\mathcal{F}} \right)}{\left| g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right|_{\mathcal{F}}}$ , 以保证满足半正定的条件.

### 3 严格反馈系统设计

考虑如下严格反馈型随机 Markov 跳跃系统:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_i &= x_{i+1} dt + \mathbf{g}_i^T(\bar{\mathbf{x}}_i, r_t) d\mathbf{w}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ d\mathbf{x}_n &= u dt + \mathbf{g}_n^T(\bar{\mathbf{x}}_n, r_t) d\mathbf{w} \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\bar{\mathbf{x}}_n = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}$  分别为系统的状态和输入信号.  $\mathbf{g}_i: \mathbf{R}^n \times S \rightarrow \mathbf{R}^r$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 是光滑非线性函数向量.

为了寻找解系统 (15) 逆最优增益设计问题的控制策略, 首先令  $\gamma_1(r) = \frac{1}{2}r^2$ ,  $\gamma_2(r) = \frac{1}{4}r^4$ , 并给出辅助系统

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})dt + \mathbf{h}u dt + g d\bar{\mathbf{w}} \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [x_2, \dots, x_n, 0]^T$ ,  $\mathbf{h} = [0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $g = [\mathbf{g}_1(\bar{\mathbf{x}}_1, r_t), \dots, \mathbf{g}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, r_t)]^T$ ,  $\bar{\Sigma}$  是一个  $r$  维的 Wiener 过程, 具有协方差

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T &= 2p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \frac{\ell \gamma_1 \left( \left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}} \right)}{\left| p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \right|_{\mathcal{F}}^2} = \\ &= p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right) \end{aligned} \quad (17)$$

依据定理 2, 我们要设计形如下式的光滑控制策略:

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}(\mathbf{L}_h \mathbf{V})^T \frac{\ell \gamma_2(|\mathbf{L}_h \mathbf{V} R^{-\frac{1}{2}}|)}{|\mathbf{L}_h \mathbf{V} R^{-\frac{1}{2}}|^2} = \\ &= -\frac{3R^{-1}(\mathbf{L}_h \mathbf{V})^T}{4|\mathbf{L}_h \mathbf{V} R^{-\frac{1}{2}}|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $R = R^T > 0$ , 使得沿系统 (16),  $\mathcal{L}V(\mathbf{x})$  负定.

由于存在二阶微分项  $\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2}$ , 并为了克服耦合项的影响, 选用与模态无关的 4 次 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(\mathbf{z}) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n z_i^4(x_1, \dots, x_i) \\ z_i(x_1, \dots, x_i) &= x_i - \alpha_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}), \\ & \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$ ,  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  是光滑函数且  $\alpha_i(\mathbf{0}) = 0$ . 为记号方便, 约定  $z_0 = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $z_{n+1} = 0$  且  $\alpha_n = u$ . 利用 Itô 随机微分公式, 得到:

$$\begin{aligned} dz_i &= d(x_i - \alpha_{i-1}) = \\ &= \left( x_{i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \mathbf{g}_p^T (\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T) \mathbf{g}_q \right) dt + \\ & \quad \left( \mathbf{g}_i^T - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k^T \right) d\bar{\mathbf{w}}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (20)$$

下面的任务是要选择合适的  $\alpha_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$ , 以使  $\mathcal{L}V \leq -W(\mathbf{x})$ . 沿着式 (20),  $V(\mathbf{z})$  的广义无穷小算子为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^3 \left( x_{i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \mathbf{g}_p^T (\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T) \mathbf{g}_q \right) + \\ & \quad \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \\ & \quad \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \leq \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^3 \left( \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \right) + \sum_{i=1}^n z_i^3 z_{i+1} + \\ & \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |z_i|^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left| \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right| |\mathbf{g}_p| |\mathbf{g}_q| |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T| + \\ & \quad \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k\right) |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T| \quad (21)$$

其中,  $z_{n+1} = 0$ , 利用 Young 不等式 (引理 2), 式 (21) 变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V \leq & \sum_{i=1}^n z_i^3 \left( \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \right) + \\ & \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i^4 + \sum_{i=1}^n \frac{z_i^4}{4\epsilon_{i-1}^4} + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n z_i^6 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \\ & \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n z_i^4 \left( \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right)^2 + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{p,q=1}^{i-1} |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T|^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T|^2 = \\ & \sum_{i=1}^n z_i^3 \left\{ \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \right. \\ & \left. \frac{z_i}{4\epsilon_{i-1}^4} + \frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} z_i \left( \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) \right)^2 \left. \right\} + \\ & \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n \right) |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T|^2 = \\ & z_n^3 \left\{ u - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{1}{4\epsilon_{n-1}^4} z_n + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} z_n^3 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} z_n \left( \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) \right)^2 \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} z_i^3 \left\{ \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \right. \\ & \left. \frac{z_i}{4\epsilon_{i-1}^4} + \frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} z_i \left( \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) \right)^2 \left. \right\} + \\ & \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n \right) |\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T|^2 \quad (22) \end{aligned}$$

其中,  $\epsilon_i > 0, i = 1, \dots, n-1, \epsilon_n = 0$ , 且  $\epsilon_0 = \infty$ .

因为  $x_{k+1} = z_{k+1} + \alpha_k, k = 1, \dots, n-1$ , 且  $\mathbf{z} = 0$  时,  $a_k = 0$ , 则根据中值定理, 存在一个光滑的函数  $\phi_k(\bar{\mathbf{x}}_i), i = 1, \dots, n$ , 使得:

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} = \sum_{k=1}^n \phi_k z_k \quad (23)$$

存在正定矩阵  $H_i(\bar{\mathbf{x}}_i, r_t), i = 1, \dots, n$ , 使得:

$$\bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^T = p(g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g) \leq \sum_{i=1}^n z_i^2 H_i(\bar{\mathbf{x}}_i, r_t) \quad (24)$$

将式 (23) 和 (24) 带入式 (22), 得:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V \leq & z_n^3 \left\{ u + \sum_{k=1}^n \phi_k z_k + \frac{1}{4\epsilon_{n-1}^4} z_n + \right. \\ & \frac{3}{4} z_n \left( \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right)^2 + \\ & \left. \frac{1}{4} z_n^3 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q \right\} + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} z_i^3 \left\{ \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \right. \\ & \left. \frac{z_i}{4\epsilon_{i-1}^4} + \frac{3}{4} z_i \left( \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) \right)^2 \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q \Bigg\} + \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n \right) \left| \sum_{i=1}^n z_i^2 H_i \right|^2 \quad (25)$$

由 Young 不等式 (引理 2) 可得:

$$z_n^3 \sum_{k=1}^n \phi_k z_k \leq \frac{3}{4} z_n^4 + \frac{1}{4} z_n^4 \sum_{k=1}^n \phi_k^4 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} z_k^4$$

且有:

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i^2 H_i \right|^2 \leq n \sum_{i=1}^n z_i^4 |H_i|^2$$

则式 (25) 可进一步写为

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} \leq & z_n^3 \left\{ u + \frac{3}{4} z_n + \frac{1}{4} z_n \sum_{k=1}^n \phi_k^4 + \frac{1}{4 \epsilon_{n-1}^4} z_n + \right. \\ & \frac{1}{4} z_n^3 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \\ & \frac{3}{4} z_n \left( \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) + \\ & \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n^2 \right) z_n |H_n|^2 \right\} + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} z_i^3 \left\{ \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \right. \\ & \frac{z_i}{4 \epsilon_{i-1}^4} + \frac{1}{4} z_i + \frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ & \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p \mathbf{g}_q^T \mathbf{g}_q + \frac{3}{4} z_i \left( \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k \right) \right) + \\ & \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n^2 \right) z_i |H_i|^2 \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

注意到函数  $\mathbf{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  以及矩阵  $H_i = H_i(\bar{\mathbf{x}}_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  均与模态  $r_i$  有关, 为了克服模态的影响, 将式 (26) 变为

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} \leq & z_n^3 \left\{ u + \frac{3}{4} z_n + \frac{z_n}{4} \sum_{k=1}^n \phi_k^4 + \frac{z_n}{4 \epsilon_{n-1}^4} + \right. \\ & \frac{3}{4} z_n \sum_{l=1}^N \left( \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right) \right) + \\ & \frac{1}{4} z_n^3 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ & \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_p^T(l) \mathbf{g}_p(l) \mathbf{g}_q^T(l) \mathbf{g}_q(l) + \\ & \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n^2 \right) z_n \times \right. \\ & \sum_{l=1}^N |H_n|^2(l) \Bigg\} + \sum_{i=1}^{n-1} z_i^3 \left\{ \alpha_i - \right. \\ & \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \frac{z_i}{4 \epsilon_{i-1}^4} + \frac{z_i}{4} + \\ & \frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ & \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_p^T(l) \mathbf{g}_p(l) \mathbf{g}_q^T(l) \mathbf{g}_q(l) + \\ & \frac{3}{4} z_i \sum_{l=1}^N \left( \left( \mathbf{g}_i(l) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right)^T \times \right. \\ & \left. \left( \mathbf{g}_i(l) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right) \right) + \\ & \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4} n^2 \right) z_i \sum_{l=1}^N |H_i|^2(l) \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

由式 (27), 我们设计  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  和控制策略  $u$

$$\begin{aligned} \alpha_i = & - \left\{ c_i z_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{3}{4} \epsilon_i^{\frac{4}{3}} z_i + \right. \\ & \frac{z_i}{4 \epsilon_{i-1}^4} + \frac{z_i}{4} + \frac{1}{4} z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ & \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_p^T(l) \mathbf{g}_p(l) \mathbf{g}_q^T(l) \mathbf{g}_q(l) + \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}z_i \sum_{l=1}^N \left\{ \left( \mathbf{g}_i(l) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right)^T \times \right. \\ \left. \left( \mathbf{g}_i(l) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right) \right\}^2 + \\ \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4}n^2 \right) z_i \sum_{l=1}^N |H_i|^2(l) \Big\} \quad (28)$$

$$u = - \left\{ c_n z_n + \frac{3}{4}z_n + \frac{1}{4}z_n \sum_{k=1}^n \phi_k^4 + \right. \\ \frac{1}{4\epsilon_{n-1}^4} z_n + \frac{1}{4}z_n^3 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_p^T(l) \mathbf{g}_p(l) \mathbf{g}_q^T(l) \mathbf{g}_q(l) + \\ \frac{3}{4}z_n \sum_{l=1}^N \left\{ \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right)^T \times \right. \\ \left. \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right) \right\}^2 + \\ \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4}n^2 \right) z_n \times \right. \\ \left. \sum_{l=1}^N |H_n|^2(l) \right\} = \\ - z_n \left\{ c_n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \phi_k^4 + \frac{1}{4\epsilon_{n-1}^4} + \right. \\ \frac{1}{4}z_n^2 \sum_{p,q=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 \alpha_{n-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \times \\ \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_p^T(l) \mathbf{g}_p(l) \mathbf{g}_q^T(l) \mathbf{g}_q(l) + \\ \frac{3}{4} \sum_{l=1}^N \left\{ \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right)^T \times \right. \\ \left. \left( \mathbf{g}_n(l) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \mathbf{g}_k(l) \right) \right\}^2 + \\ \left. \left( \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{24} + \frac{3}{4}n^2 \right) \times \right. \\ \left. \sum_{l=1}^N |H_n|^2(l) \right\} = -M(\mathbf{x})z_n \quad (29)$$

其中,  $c_i, i = 1, \dots, n$  为正常数,  $M(\mathbf{x})$  为连续且正定的函数, 则  $\mathcal{LV} \leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^4$ , 由式 (18) 可以得到:

$$R = \left( \frac{4}{3}M(\mathbf{x}) \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (30)$$

**定理 3.** 对于严格反馈 Markov 跳跃随机非线性系统 (15), 控制策略

$$u^* = -\frac{\beta}{2}R^{-\frac{2}{3}}z_n, \quad \beta \geq 2 \quad (31)$$

其中,  $R = (\frac{4}{3}M)^{-3/2}$ , 解系统 (15) 的逆最优增益设计问题; 选取  $u = u^*$  以及未知协方差为“最坏情况”协方差

$$\Sigma \Sigma^T = \lambda p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right), \quad \lambda \in (0, 1] \quad (32)$$

则对于适当设计的 Lyapunov 函数  $V(\mathbf{x})$  (如上文中的式 (19)), 闭环系统 (15) 和 (31) 的平衡点  $\mathbf{x} = 0$  是依概率全局渐近稳定的.

**证明.** 选择  $\gamma_1(r) = \frac{1}{2}r^2, \gamma_2(r) = \frac{1}{4}r^4$ , 根据式 (5), (8) 和 (29) 可得表达式 (31). 由上文设计的控制策略  $u$  可以看出,  $M(\mathbf{x})$  是一个连续且正定的函数. 则由定理 2 知, 控制策略 (31) 通过最小化性能指标 (9) 解决了系统 (15) 的随机逆最优增益设计问题.

根据文中的构造, 有:

$$\mathcal{LV}|_{(16)} = L_f V + (L_h V)\alpha + \\ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma} \right\} = \\ L_f V + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma} \right\} - R^{-\frac{2}{3}} z_n^4 \leq \\ - \sum_{i=1}^n c_i z_i^4$$

则当系统 (15) 的 Wiener 噪声满足协方差  $\Sigma \Sigma^T = \lambda p \left( g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \right), \lambda \in (0, 1]$  时, 在控制策略 (31) 下, 有:

$$\mathcal{LV}|_{(15)} = L_f V - \frac{\beta}{2} R^{-\frac{2}{3}} z_n^4 + \\ \frac{\lambda}{2} \text{tr} \left\{ \bar{\Sigma}^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} g \bar{\Sigma} \right\} \leq - \sum_{i=1}^n c_i z_i^4$$

成立, 其中,  $\beta \geq 2, 0 \leq \lambda \leq 1$ . 则由定理 1 可知,  $\mathbf{x} = 0$  是依概率全局稳定的平衡点.  $\square$

**注 2.** 本文没有对 Markov 过程作与文献 [11–12] 等类似的约束, 所得到的控制策略不显含跳跃模态, 在模态或转移概率未知的情况下依然有效.



#### 4 仿真算例

考虑下列二阶 Markov 跳跃随机非线性系统

$$dx_1 = x_2 dt$$

$$dx_2 = u dt + g(x, r_t) dw$$

并设 Markov 跳跃模  $r_t$  的状态空间为  $S = \{1, 2\}$ , 其他参数为  $\pi_{11} = \pi_{22} = -0.5$ ,  $\pi_{12} = \pi_{21} = 0.5$ ,  $g(\mathbf{x}, 1) = x_1$ ,  $g(\mathbf{x}, 2) = x_2$ .

注 3. 上述系统为 Van der Pol 方程和 Duffing 方程的推广, 可被用于实际的物理系统<sup>[22]</sup>.

取  $\gamma_1(r) = \frac{1}{2}r^2$ ,  $\gamma_2(r) = \frac{1}{4}r^4$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $c_2 = 1/2$ , Young 不等式中对应的  $\epsilon = 1$ . 则根据第 3 节介绍的设计方法可计算控制策略及其他参数  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}z_2^4$ ,  $\alpha_1(x_1) = -x_1$ ,  $z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1) = x_2 + x_1$ ,  $M(\mathbf{x}) = 2 + \frac{17}{4}(x_1^4 + x_2^4)$ ,  $u = -M(\mathbf{x})z_2$ . 则由式 (9) 和 (10), 注意其中的  $\sum_{j=1}^N \pi_{r_t j} V(\mathbf{x}, j) = 0$ , 计算性能指标函数为

$$J(u) = \sup_{\Sigma \Sigma^T \in D} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ x_1^4 + z_2^4 + \int_0^t \left( \frac{283}{64} M(\mathbf{x}) z_2^4 - 4(x_1^3 + z_2^3) x_2 - 9z_2^4 g^4(\mathbf{x}, r_\tau) - 2\gamma_1(|\Sigma \Sigma^T|_{\mathcal{F}}) \right) d\tau \right] \right\}$$

依据式 (14), 选择未知协方差为“最坏情况”协方差, 即  $\Sigma \Sigma^T(t) = 3z_2^2 g^2(\mathbf{x}, r_t)$  以及初始条件  $\mathbf{x}(0) = [0.5, 0.5]$ ,  $r_0 = 2$ . 则系统仿真曲线如图 1 所示. 这里需要指出的是, 性能指标函数  $J(u)$  需要求期望值, 而这在一次仿真中是不可能获得的. 为了进一步说明本文所设计的逆最优控制策略在模态与转移概率未知的情况下仍然有效, 图 2 给出在新的模态转移概率  $\pi_{11} = -0.3$ ,  $\pi_{12} = 0.3$ ,  $\pi_{21} = 0.7$ ,  $\pi_{22} = -0.7$  下的仿真曲线. 对比图 1 和图 2 可以看出, 即使模态转移概率发生了变化, 本控制策略同样能达到预期的控制目标.

#### 5 结论

本文讨论了 Markov 跳跃随机非线性系统的逆最优增益设计问题. 给出了其可解的一个充分条件, 并进一步分析证明了严格反馈 Markov 跳跃随机非线性系统存在一个依概率全局渐近稳定的控制策略使得系统的逆最优增益设计问题是可解的, 构造了一个与系统模态显式无关的 Lyapunov 函数, 使用积分反推法给出该系统的一个构造性解. 本设计的关键是处理 Markov 跳跃系统的模态带来的耦合

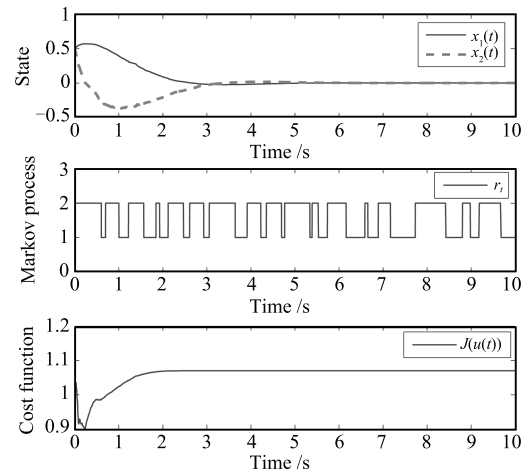


图 1 仿真曲线 1

Fig. 1 Simulation curve 1

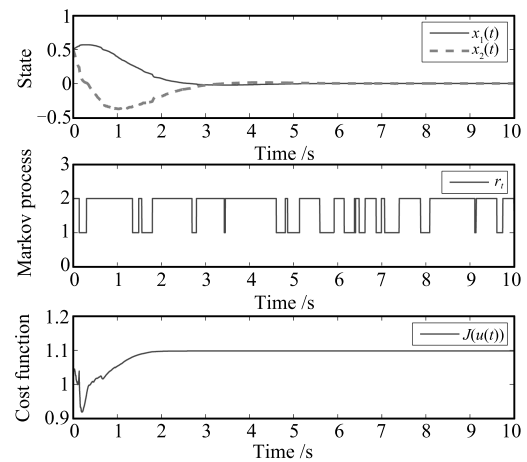


图 2 仿真曲线 2

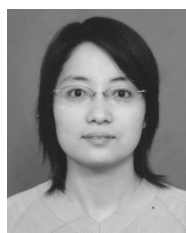
Fig. 2 Simulation curve 2

项以及由 Wiener 噪声产生的 Hessian 函数矩阵二阶项. 仿真结果表明, 所设计的逆最优控制策略具有良好的控制效果.

#### References

- Mariton M. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. New York: Marcel Dekker, 1990. 56–72
- Mao X R, Yuan C G. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*. London: Imperial College Press, 2006. 49–104
- Huang H, Feng G, Chen X P. Stability and stabilization of Markovian jump systems with time delay via new Lyapunov functionals. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2012, **59**(10): 2413–2421
- Cong Shen, Zhang Hai-Tao, Zou Yun. A new exponential stability condition for delayed systems with Markovian switching. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1025–1029 (丛岫, 张海涛, 邹云. 具有状态时滞的 Markov 切换系统的指数稳定性新结果. *自动化学报*, 2010, **36**(7): 1025–1029)

- 5 Kong Shu-Lan, Zhang Zhao-Sheng. Optimal control of stochastic system with Markovian jumping and multiplicative noises. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1113–1118  
(孔淑兰, 张召生. 带马尔科夫跳和乘积噪声的随机系统的最优控制. 自动化学报, 2012, **38**(7): 1113–1118)
- 6 Bolzern P, Colaneri P, De Nicolao G. Almost sure stability of Markov jump linear systems with deterministic switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 209–214
- 7 Luan X L, Zhao S Y, Liu F.  $H_\infty$  control for discrete-time Markov jump systems with uncertain transition probabilities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1566–1572
- 8 Zhao P, Kang Y, Zhai D H. On input-to-state stability of stochastic nonlinear systems with Markovian jumping parameters. *International Journal of Control*, 2012, **85**(4): 343–349
- 9 Song M K, Park J B, Joo Y H. Stability analysis and synthesis of Markovian jump nonlinear systems with incomplete transition descriptions via fuzzy control. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Taipei, China: IEEE, 2011. 1007–1012
- 10 Zhao Ping, Kang Yu. Stabilization control for a class of two-dimensional Markovian jumping nonlinear systems with time-delay. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2007, **27**(3): 451–463  
(赵平, 康宇. 一类二维 Markov 跳跃非线性时滞系统的镇定控制. 统科学与数学, 2007, **27**(3): 451–463)
- 11 Wu Z J, Xie X J, Shi P, Xia Y Q. Backstepping controller design for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian switching. *Automatica*, 2009, **45**(4): 997–1004
- 12 Wu Z J, Yang J, Shi P. Adaptive tracking for stochastic nonlinear systems with Markovian switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(9): 2135–2141
- 13 Freeman R A, Kokotovic P V. Inverse optimality in robust stabilization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1996, **34**(4): 1365–1391
- 14 Krstić M, Tsiotras P. Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(5): 1042–1049
- 15 Krstić M, Li Z H. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(3): 336–350
- 16 Wang Chuan-Rui, Wang Xing-Hu, Ji Hai-Bo. Inverse optimal gain assignment control for Markovian jump nonlinear systems. *Control Theory and Applications*, 2013, **30**(5): 537–542  
(王传锐, 王兴虎, 季海波. Markov 跳跃非线性系统逆最优增益设计. 控制理论与应用, 2013, **30**(5): 537–542)
- 17 Florchinger P. A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 1993, **11**(12): 155–162
- 18 Deng H, Krstić M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(8): 1237–1253
- 19 Krstić M, Deng H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*. New York: Springer, 1998. 47–85
- 20 Zhang Ping, Fang Yang-Wang, Hui Xiao-Bin, Liu Xin-Ai, Li Liang. Near optimal strategy for nonlinear stochastic differential games based on the technique of statistical linearization. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 390–399  
(张平, 方洋旺, 惠晓滨, 刘新爱, 李亮. 基于统计线性化的随机非线性微分对策逼近最优策略. 自动化学报, 2013, **39**(4): 390–399)
- 21 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. *Inequalities (2nd edition)*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 111–113
- 22 Zhao L Q, Xi F B. Explicit conditions for asymptotic stability of stochastic Liénard-type equations with Markovian switching. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, **348**(1): 267–273



**李桂林** 中国科学技术大学自动化系博士研究生, 江苏师范大学电气工程及自动化学院讲师. 主要研究方向为非线性控制. 本文通信作者.

E-mail: liguilin@mail.ustc.edu.cn

(**LI Gui-Lin** Ph. D. candidate in the Department of Automation, University of Science and Technology of China, lecturer at the School of Electrical Engineering and Automation, Jiangsu Normal University. Her main research interest is nonlinear control. Corresponding author of this paper.)



**王传锐** 中国科学技术大学自动化系博士研究生. 2009 年获得西北工业大学数学与应用专业学士学位. 主要研究方向为非线性控制.

E-mail: hugh@mail.ustc.edu.cn

(**WANG Chuan-Rui** Ph. D. candidate in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. He received his bachelor degree in mathematics and applied mathematics from Northwestern Polytechnical University in 2009. His main research interest is nonlinear control.)



**季海波** 中国科学技术大学自动化系教授. 1990 年获得北京大学力学与工程科学系博士学位. 主要研究方向为非线性控制及应用、导航与制导.

E-mail: jihb@ustc.edu.cn

(**JI Hai-Bo** Professor in the Department of Automation, University of Science and Technology of China. He received his Ph. D. degree in mechanical engineering from Beijing University in 1990. His research interest covers nonlinear control and applications, navigation and guidance.)