基于编码控制机制的混杂系统半全局实用镇定

楼旭阳 [1] 叶 倩 [2]

摘 要 混杂系统的鲁棒镇定是复杂控制系统领域的重要研究课题之一. 提出了一种编码机制下的混杂控制策略, 它能有效地克服传统连续反馈控制或不连续反馈控制在处理局部鲁棒镇定平衡点或不变集问题中的局限性, 获得更好的控制效果. 首先针对编码状态反馈, 构建了一般的混杂系统模型来描述编码状态反馈作用下非线性系统的闭环系统模型. 然后, 基于逆 Lyapunov 定理开展了非线性系统的混杂控制鲁棒性分析, 提出了闭环混杂系统的半全局实用渐近稳定性判据. 最后, 结合一个经典控制问题来说明所提出控制策略的优越性.

关键词 混杂系统, 编码控制, 半全局稳定, 鲁棒性

引用格式 楼旭阳, 叶倩. 基于编码控制机制的混杂系统半全局实用镇定. 自动化学报, 2014, **40**(5): 862−874

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00862

Semi-global Practical Stabilization of Hybrid Systems Based on an Encoded Control Mechanism

LOU Xu-Yang[1] YE Qian[2]

Abstract Robust stabilization of hybrid systems is one of the important research topics in the field of complex control systems. This paper proposes a hybrid control strategy under an encoded control mechanism. It can effectively overcome the limitation in dealing with the problems of local robust stabilizing equilibrium point or invariant set for the traditional continuous feedback control or discontinuous feedback control, and obtain better control effects. We first build a general hybrid system model to describe the closed-loop system of a nonlinear system under the encoded state feedback. Then we carry out the robustness analysis of hybrid control for the nonlinear system based on the inverse Lyapunov theorem, and present a semi-global practical asymptotic stability criterion for the closed-loop hybrid system. Finally, we combine with a classical control problem to illustrate the superiority of the proposed control strategy.

Key words Hybrid systems, encoded control, semi-global stability, robustness

Citation Lou Xu-Yang, Ye Qian. Semi-global practical stabilization of hybrid systems based on an encoded control mechanism. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 862−874

近年来, 有限信道传输能力的控制问题在国际上获得了广泛的研究[1−6]. 这些研究一方面是针对最近一些新兴的应用, 如传感器网络、微机电系统、移动电话和工业控制网络等应用中的传输能力有限问题进行分析; 另一方面是考虑到安全情况下必须尽可能地传输有限的信息而开展的研究. 在控制系统中, 反馈数据传输速率是有限的, 通信的可靠性将极大地影响系统的稳定性, 在通信速率和最佳性能之间存在一个折衷办法[5]. 目前研究中通常采用的方法是, 当控制信号通过传输信道时, 把标准的反馈信息转换成数据包 (编码) 发送到可能位于远程位置的控制器, 再将数据包整合成反馈信号 (解码) 传送到执行器, 进而实现控制系统.

一直以来, 有关控制系统的编码或量化反馈控制研究受到了控制界学者的极大关注, 并取得了一系列成果[2−14]. 文献 [4] 提出了一种混杂量化反馈控制策略, 通过时变量化器和系统的输入到状态可镇定性来确保系统的全局渐近稳定性. Liberzon 等[3] 指出文献 [6] 中的量化控制方法可以在不考虑最小数据率情况下用于处理连续非线性系统. 事实上, 在不严格要求数据率的情况下 (如文献 [3] 中假设条件), De Persis 等[10] 指出文献 [3] 所获得的结论对于一大类可镇定系统也是成立的. 文献 [14] 研究了 Elia 等[2] 提出的静态对数量化器的作用, 并且利用磁滞量化器实现闭环系统的实用稳定性. De Persis 等[11] 探讨了一类非线性系统的动态编码器,

收稿日期 2013-05-02 录用日期 2013-11-01
Manuscript received May 2, 2013; accepted November 1, 2013
国家自然科学基金 (61174021, 61104155), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP51322B), 高等学校学科创新引智计划 (B12018) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174021, 61104155), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP51322B), and the 111 Project (B12018)
本文责任编委 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang
1. 江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室 无锡 214122 2. 无锡职业技术学院 无锡 214121
1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122 2. Wuxi Institute of Technology, Wuxi 214121

只要在离散时刻对其参数进行更新, 利用编码反馈出来的信息构成一个分段线性定常控制率, 进而实现半全局实用稳定性. 值得指出的是, 尽管围绕量化控制的理论成果大量涌现, 但到目前为止, 针对混杂控制系统的量化效应研究仍较少.

随着控制、计算机、数学等学科的进步与发展, 混杂控制系统的分析和控制研究已经成为计算机、生物控制、应用数学等领域的研究热点. 混杂控制相比于纯粹的连续或离散控制策略具有明显优势[15]. 例如, 利用采样-保持控制 (一类特殊的混杂控制) 可以实现具有测量噪声和快速传感器或执行器的动态系统的鲁棒镇定而利用连续反馈则难以实现同样的控制效果[16−18]. 对于在输出反馈中应用混杂控制器的情况, 文献 [19] 作了深入研究. 混杂控制器还有很多其他应用[20−25]. 值得一提的是, 文献 [26−27] 中指出, 利用逻辑混杂反馈可鲁棒渐近镇定每一个渐近可控非线性系统. 尽管基于混杂控制的混杂系统理论框架已经初步形成, 但在现有混杂控制相关文献中, 尚未有关于编码反馈控制作用下混杂控制器研究的报道, 而具有编码反馈机制的混杂系统鲁棒镇定问题是复杂系统控制领域极富挑战性的重要课题之一. 本文就上述问题做了深入研究, 主要工作是建立了非线性系统和编码反馈机制下混杂控制器的级联闭环混杂系统, 基于光滑 Lyapunov 函数证明了这一闭环系统的半全局实用渐近稳定性, 并将理论结果应用于一个约束控制系统中, 解决了经典反馈控制和不连续反馈控制所不能处理的镇定问题. 这一研究对混杂系统半全局稳定性的讨论具有重要的理论意义.

在下文中, $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{R}_{\geq 0} := [0, \infty)$, $\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量空间, $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 表示非负整数集合. $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧氏范数, 即 $\|\boldsymbol{x}\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. 符号 "$\rightrightarrows$" 表示集值映射. $f \circ (g_1 + g_2)(s) := f(g_1(s) + g_2(s))$. $\overline{\mathcal{A}}$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的闭包, $\overline{\mathrm{co}}\ \mathcal{A}$ 表示集合 $\mathcal{A}$ 的闭凸包, $\mathbb{B}$ 表示欧氏空间中的单位闭球. $|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}$ 定义为 $\inf_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. $\mathbb{S}^n$ 表示集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n+1} : \ |\boldsymbol{x}| = 1\}$. $R(\phi) := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, 其中 $\boldsymbol{a} = [\cos\phi \ \ \sin\phi]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = [-\sin\phi \ \ \cos\phi]^{\mathrm{T}}$. 如果连续函数 $\alpha : \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 严格递增, 且 $\alpha(0) = 0$, 则 α 属于 $\mathcal{K}$ 类函数. 进一步, 若 α 是 $\mathcal{K}$ 类函数且当 $r \to \infty$ 时, $\alpha(r) \to \infty$, 则 α 属于 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数. 对于连续函数 $\beta : \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, 映射 $\beta(\cdot, t, j)$ 是 $\mathcal{K}$ 类函数, 而映射 $\beta(s, \cdot, j)$ 和 $\beta(s, t, \cdot)$ 是非增函数, 并且当对应变量分别递增到 ∞ 时, 函数收敛到 0, 则 β 属于 $\mathcal{KLL}$ 类函数. 对于满足 $0 < \delta \leq \Delta < \infty$ 的两个正实数 δ 和 Δ, 以及一个紧集 $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{n_x + n_y}$, 定义 $\Omega_{\mathcal{A}}(\delta, \Delta) := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_y} | \delta \leq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{\mathcal{A}} \leq \Delta\}$.

1　问题描述

在实际应用中, 特别是在分布式控制系统中, 编码器和解码器与系统可能是地域分散的. 因此, 在数字通信传输情况下, 对具有 "编码器 - 解码器 - 控制器" 的非线性系统稳定性进行分析, 在分布式控制系统中是至关重要的. 目前, 许多学者深入地研究了具有有限传输信道的非线性系统的控制问题, 本文则主要考虑了具有编码状态反馈和混杂控制器的非线性系统的半全局实用渐近稳定问题. 图 1 为这种控制方案的实现框图. 当标准的反馈信号转换成数据包通过信道时, 即编码过程, 数据包将在远程位置进行解码. 假设该通道是无扰动、无传输延时且传输失真可忽略, 则反馈信号可由解码器恢复并通过控制器传送到执行器来控制系统. 近年来, 混杂控制方法在许多控制系统中已获得成功应用, 特别是在一些经典控制方法不能解决的控制问题中突显其优势, 本文考虑控制器是混杂的情形, 即控制器中同时包含连续和离散的动力学特征, 研究如果存在一个混杂控制器使得系统紧集是渐近稳定的, 则在编码反馈机制下的混杂控制器能否选择合适的编解码参数, 使该紧集是半全局实用渐近稳定的问题.

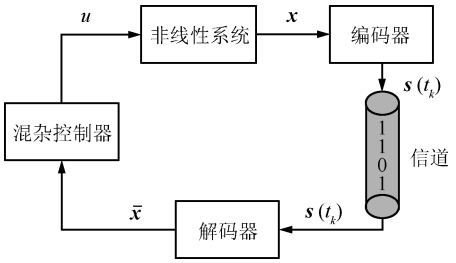


图 1　编码状态反馈下的混杂控制系统

Fig. 1　Hybrid control systems with encoded state feedback

2　混杂系统

首先介绍一下混杂系统的解以及相关定义. 一般地, 一个混杂系统 $\mathcal{H}$ 可以由四元组 $(F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ 来描述:

$$\mathcal{H} := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{C} \\ \boldsymbol{x}^+ \in G(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 分别表示连续事件和离散事件时的状态集合, 简称流集和跃集; 单值映射 $F : \mathcal{C} \to \mathbf{R}^n$ 是描述状态属于流集 $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^n$ 上时连续事件的函数, 称为流态; 集值映射 $G : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ 是描述状态属于跃集 $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ 时离散事件的函数, 称为跃态; $\boldsymbol{x}^+$ 为状态跳跃后的值. 状态 $\boldsymbol{x}$ 可能既包含 "连续" 变量又包含 "离散" 变量, 后者通常表示为整数形式的逻辑模式.

令 $T \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ 和 $J \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 分别表示流态和跃态时间序列的终值, 两者均可以是有限正数或无穷. 给定一个子集 $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$, 若对有限的时间序列 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_J$ 有 $\mathcal{E} = \bigcup_{j=0}^{J-1}([t_j, t_{j+1}], j)$, 则称 $\mathcal{E}$ 是一个紧致混杂时域. 如果对于所有 $(T, J) \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \cap ([0, T] \times \{0, 1, \cdots, J\})$ 是一个紧致混杂时域, 则称 $\mathcal{E}$ 是一个混杂时域. 对每个混杂时域 $\mathcal{E}$ 上的点都存在一个自然序: 给定 $(t_1, j_1) \in \mathcal{E}$, $(t_2, j_2) \in \mathcal{E}$, 若 $t_1 < t_2$ 或 $t_1 = t_2$, 并且 $j_1 \leq j_2$, 则有 $(t_1, j_1) \preceq (t_2, j_2)$. 也就是说, 只要取自同一混杂时域 $\mathcal{E}$ 上的点, 若 $t_1 + j_1 \leq t_2 + j_2$, 则有 $(t_1, j_1) \preceq (t_2, j_2)$.

为简便起见, 具有形式 (1) 的混杂系统用 $\mathcal{H} = (F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ 表示. 混杂系统 $\mathcal{H}$ 的解是由定义在混杂时域上的混杂弧[28] 给出. 一个混杂弧是指函数 $\boldsymbol{x} : \operatorname{dom} \boldsymbol{x} \to \mathbf{R}^n$, 其中, $\operatorname{dom} \boldsymbol{x}$ 表示混杂时域, $t \mapsto \boldsymbol{x}(t, j)$ 表示在任一给定离散时刻 j 时的一个局部绝对连续函数. 称混杂弧 $\boldsymbol{x}$ 是混杂系统 $\mathcal{H} = (F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ 的解, 如果 $\boldsymbol{x}(0, 0) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 且下面两个条件满足:

1) 流态条件: 对任意 $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 和几乎所有的 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, 使得当 $(t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t, j) \in \mathcal{C}$ 时, 有 $\dot{\boldsymbol{x}}(t, j) = F(\boldsymbol{x}(t, j))$;

2) 跃态条件: 对任意 $(t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}$, 使得当 $(t, j+1) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(t, j) \in \mathcal{D}$ 时, 有 $\boldsymbol{x}(t, j+1) \in G(\boldsymbol{x}(t, j))$.

如果 $\operatorname{dom} \boldsymbol{x}$ 至少包含一个不同于 $(0, 0)$ 的点, 则混杂弧 $\boldsymbol{x}$ 是非平凡的; 如果 $\operatorname{dom} \boldsymbol{x}$ 是无界的 (不管是在 t 方向还是 j 方向, 或者两个方向), 则称 $\boldsymbol{x}$ 是完备的; 如果 $\boldsymbol{x}$ 在有限时间内存在无限次跳跃, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是 Zeno 的, Zeno 现象在混杂系统控制律设计时容易出现, 如连续和混杂系统中普遍存在的颤动和松弛控制, 都可以认为是在不同的控制作用中进行无限次快速切换; 如果 $\boldsymbol{x}$ 具有无限次跳跃却不发生流态, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是离散的. 如果 $\boldsymbol{x}$ 不能被扩展, 即满足$\operatorname{dom} \boldsymbol{x} \subset \operatorname{dom} \boldsymbol{x}'$ 且 $\operatorname{dom} \boldsymbol{x}'$ 中不存在与 $\boldsymbol{x}$ 一致的解 $\boldsymbol{x}'$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是最大的 (Maximal). 显然, 完备的解是最大的.

如果混杂系统 $\mathcal{H} = (F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ 满足下述基本条件, 则称混杂系统 $\mathcal{H}$ 是适定的 (Well-posed).

假设 1 (混杂基本条件). 给定一个混杂系统 $\mathcal{H} = (F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$, 其参数 $(F, \mathcal{C}, G, \mathcal{D})$ 满足:

1) $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ 是闭集;

2) 流态 $F : \mathcal{C} \to \mathbf{R}^n$ 是连续的;

3) 跃态 $G : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ 是外半连续[1] 且局部有界[2]的.

下面给出几个基本稳定性定义. 在状态空间 $\mathbf{R}^n$ 上混杂系统 $\mathcal{H}$, 令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个紧集. 若对任一 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得系统 $\mathcal{H}$ 从 $\boldsymbol{x}(0, 0) \in (\mathcal{A} + \delta\mathbb{B}) \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ 出发的每一个解都是完备的且满足 $|\boldsymbol{x}(t, j)|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon_1$, $\forall (t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}$, 则称紧集 $\mathcal{A}$ 是稳定的; 如果存在正数 $\mu > 0$ 使得系统 $\mathcal{H}$ 从 $\boldsymbol{x}(0, 0) \in (\mathcal{A} + \mu\mathbb{B}) \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ 出发的每一个最大解都是完备的且满足 $\lim_{t+j \to \infty} |\boldsymbol{x}(t, j)|_{\mathcal{A}} = 0$, 则称紧集 $\mathcal{A}$ 是吸引的. 如果紧集 $\mathcal{A}$ 是稳定且吸引的, 则称紧集 $\mathcal{A}$ 是渐近稳定的. 令 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 的吸引域点集, 它满足从该点集中任一点出发的所有最大解都是完备的且收敛到 $\mathcal{A}$. 如果紧集 $\mathcal{A}$ 在吸引域 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 上是渐近稳定的, 则称紧集 $\mathcal{A}$ 是全局渐近稳定的.

定义 1 (半全局实用渐近稳定). 对于下述含正参数 ν 的混杂系统 $\mathcal{H}_\nu$

$$\mathcal{H}_\nu := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}, \nu), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_\nu \\ \boldsymbol{x}^+ \in G(\boldsymbol{x}, \nu), & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_\nu \end{cases} \tag{2}$$

其中, $\mathcal{C}_\nu, \mathcal{D}_\nu$ 为包含参数 ν 的相关集合, 如果存在函数 $\gamma \in \mathcal{KLL}$, 且对任意正数 $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$, 存在 $\nu^* > 0$ 使得系统 $\mathcal{H}_\nu$ 的每一个解 $\boldsymbol{x}$ 满足 $|\boldsymbol{x}(0, 0)|_{\mathcal{A}} \leq \Delta$ 以及对于 $\forall (t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}, \forall \nu \in (0, \nu^*]$ 有

$$|\boldsymbol{x}(t, j)|_{\mathcal{A}} \leq \gamma(|\boldsymbol{x}(0, 0)|_{\mathcal{A}}, t, j) + \varepsilon \tag{3}$$

则称紧集 $\mathcal{A}$ 是半全局实用渐近稳定的.

3 混杂编码控制

3.1 非线性系统

考虑非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 是连续函数. 不失一般性, 假设状态 $\boldsymbol{x}$ 是完全可测的.

假设 2. 非线性系统 (4) 在混杂控制器 $\mathcal{H}_c$ 下是全局渐近稳定的, 其中, 符号 $\mathcal{H}_c$ 表示混杂控制器系统, 其具体形式将在第 3.3 节中给出.

假设 3. 存在正数 $\vartheta > 0$, 使得非线性函数 f 满足

$$|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u})| \leq \vartheta |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|$$

3.2 编码反馈

在许多实际系统中, 为了实现系统的稳定或达到一定的控制性能指标, 往往需要引入反馈信号来

[1]称集值映射 $G : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ 是外半连续的, 若它在每一个 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 处是外半连续的, 即对所有序列点 $x_i \to \boldsymbol{x}$ 和 $y_i \in G(x_i)$, 如果对某一点 $\boldsymbol{y}$, $\lim_{i \to \infty} y_i = \boldsymbol{y}$, 则有 $\boldsymbol{y} \in G(\boldsymbol{x})$.

[2]称集值映射 $G : \mathbf{R}^n \rightrightarrows \mathbf{R}^n$ 是局部有界的, 若对任意紧集 $K_1 \subset \mathbf{R}^n$, 存在一个紧集 $K_2 \subset \mathbf{R}^n$ 使得 $G(K_1) := \{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in G(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K_1\} \subset K_2$.

控制系统. 传统的反馈控制是基于连续的模拟信号, 随着计算机控制技术的发展, 特别是现代控制愈加依赖数字设备的情形下, 人们逐渐将信号量化技术应用到控制领域中, 即通过有限数据传输信道的反馈量化信息对实际系统进行控制, 但通信传输中量化误差在一定程度上会降低系统的控制性能, 甚至直接影响到系统的稳定性.

文献 [10] 中所研究的编码状态反馈机制需要两种基本的设备: 编码器和解码器. 它们的主要作用是处理量化数据并建立一种超立方体. 超立方体的量化区域为 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, 中心为 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 边长为 L. 首先分析一下编码器. 定义一个计时变量 $\tau_e \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, 用以计算时间. 令 T_e 为计时变量 τ_e 的上界, 当 $\tau_e \in [0, T_e)$ 时, 编码器将跟踪系统状态且保持量化区域边长 L 不变; 当 $\tau_e \geq T_e$ 时, 产生离散事件, 计时变量将被重置为 0 且系统状态被编码处理后传送出去. 不失一般性, 考虑一个有限传输数据率的传输通道, 设在每一个传输时刻, 可传输 B 位数据, 系统需要传送 n 维状态变量信息, 则每一维状态变量信息可编码成 $b = B/n$ 位数据. 令 $N = 2^b$, 并记 t_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 为编码时刻, 在每个编码时刻 t_k, 编码器把量化区域均匀地分成 $2^B = N^n$ 子区间, 或者说更小的超立方体 (每个子区间的中心为 $\bar{\boldsymbol{x}}$), 并根据状态 $\boldsymbol{x}$ 的位置选择子区间, 相应的中心 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 通过编码传输信号 $\boldsymbol{s}(t_k)$ 传输给解码器. 编码控制器的动力学可描述如下:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = f(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}) \\ \dot{L} = 0 \\ \dot{\tau}_e = 1 \end{cases}, \qquad \tau_e \in [0, T_e)$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{x}}^+ = \varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L) \\ L^+ = rL \\ \tau_e^+ = 0 \end{cases}, \qquad \tau_e \in [T_e, T_e'] \tag{5}$$

其中, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为编码状态, 函数 $\varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L) = [\varphi_1(x_1, e_1, L), \cdots, \varphi_n(x_n, e_n, L)]^{\mathrm{T}}$ 可选择如下

$$\varphi_i(x_i, \bar{x}_i, L) = \bar{x}_i + \frac{L}{N}\hat{\varphi}_i(x_i, \bar{x}_i, L)$$

$$\hat{\varphi}_i(x_i, \bar{x}_i, L) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{\hat{e}_i}{L/N} \right\rfloor + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\hat{e}_i), & \hat{e}_i \in S_e \\ \dfrac{N}{2} - \dfrac{1}{2}, & \hat{e}_i = \frac{L}{2} \end{cases} \tag{6}$$

其中, $S_e = \{\hat{e}_i | |\hat{e}_i| \leq \frac{L}{2}, |\hat{e}_i| \neq \frac{L}{2}\}$, $\hat{e}_i = x_i - \bar{x}_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 参数 r 需满足 $r \in (\mathrm{e}^{\vartheta T_e}/N, 1)$. 容易发现, $\hat{\varphi}_i(x_i, \bar{x}_i, L) \in \{-\frac{N}{2} + \frac{1}{2}, \cdots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\}$. 因而, 信道传送信号可表示为 $\boldsymbol{s}(t_k) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L)$.

解码器执行是与编码器相反的逆运算, 所以量化区域的中心 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与边长 L 执行与编码器相似的更新律. 当信号 $\boldsymbol{s}(t_k)$ 传送到解码器后, 将重新估计状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$. 为了执行这种重建工作, 解码器必须依赖与编码器相同的量化区域. 解码器的方程与式 (5) 稍有不同. 易知, 如果编码器和解码器具有相同的初始状态, 且传输信号 $\boldsymbol{s}(t_k)$ 无损传输, 则在所有时间内, 编码器和解码器的两种变量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 L 是相同的.

3.3　混杂控制器

用符号 $\mathcal{H}_c$ 表示混杂控制器, $\boldsymbol{x}_c \in \mathbf{R}^{n_c}$ 为混杂控制器 $\mathcal{H}_c$ 的状态, 它可能包含连续状态变量和离散状态变量. 于是, 混杂控制器可表示为 $\mathcal{H}_c = (f_c, \mathcal{C}_c, g_c, \mathcal{D}_c)$, 相应地, $\mathcal{C}_c \subset \mathbf{R}^{n+n_c}$ 是混杂控制器的流集, $\mathcal{D}_c \subset \mathbf{R}^{n+n_c}$ 是混杂控制器的跃集, $f_c : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \to \mathbf{R}^{n_c}$ 为混杂控制器的流态, $g_c : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \rightrightarrows \mathbf{R}^{n_c}$ 为混杂控制器的跃态. 混杂控制器 $\mathcal{H}_c$ 用如下的形式表示

$$\mathcal{H}_c : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_c = f_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c), & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{C}_c \\ \boldsymbol{x}_c^+ \in g_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c), & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c \end{cases} \tag{7}$$

其中, $\mathcal{H}_c$ 的输出, 也就是系统 (4) 的输入 $\boldsymbol{u}$, 可表示为关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_c$ 的给定函数 $\kappa_c : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \to \mathbf{R}^m$, 即 $\boldsymbol{u} = \kappa_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)$.

假设 4. 对于混杂控制器 $\mathcal{H}_c$, 设

1) 集合 $\mathcal{C}_c$ 和 $\mathcal{D}_c$ 是 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c}$ 的闭子集.

2) 函数 f_c 和 κ_c 是连续的.

3) 多值映射 g_c 是外半连续, 局部有界并且在集合 $\mathcal{D}_c$ 上非空.

上述假设可以保证闭环系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 满足假设 1 中的条件, 从而可以利用混杂系统理论中的逆 Lyapunov 定理分析系统鲁棒性.

联合式 (4) 和式 (7) 可以得到如下标称闭环系统 $\mathcal{H}_{cl}$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \kappa_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_c = f_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \end{cases}, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{C}_c$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_c^+ \in g_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \end{cases}, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c \tag{8}$$

进一步地, 可简写成如下形式

$$\mathcal{H}_{cl} : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = F(\boldsymbol{\xi}), & \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}_c \\ \boldsymbol{\xi}^+ \in G(\boldsymbol{\xi}), & \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}_c \end{cases} \tag{9}$$

其中,

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{x}_c{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$
$$F(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}, \kappa_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)) \\ f_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \end{bmatrix}$$
$$G(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ g_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \end{bmatrix}$$

根据假设 1, 存在光滑 Lyapunov 函数 $V(\cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 α_1 和 α_2 使得下面的结论成立

$$\begin{cases} \alpha_1(|\boldsymbol{\xi}|_{\mathcal{A}}) \leq V(\boldsymbol{\xi}) \leq \alpha_2(|\boldsymbol{\xi}|_{\mathcal{A}}), & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \\ \langle \nabla V(\boldsymbol{\xi}), F(\boldsymbol{\xi}) \rangle \leq -V(\boldsymbol{\xi}), & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}_c \\ V(G(\boldsymbol{\xi})) \leq \mathrm{e}^{-1} V(\boldsymbol{\xi}), & \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}_c \end{cases} \tag{10}$$

3.4 闭环系统

下面给出图 1 闭环混杂系统 (用符号 $\mathcal{H}_{cl}^E$ 表示) 的动力学, 其流态动力学为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)) \\ \dot{\boldsymbol{x}}_c = f_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = f(\bar{\boldsymbol{x}}, \kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)), \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{C}_c, \tau_e \in [0, T_e) \\ \dot{L} = 0 \\ \dot{\tau}_e = 1 \end{cases}$$

跃态动力学为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^+ \\ \boldsymbol{x}_c^+ \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ \\ L^+ \\ \tau_e^+ \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ g_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \\ \bar{\boldsymbol{x}} \\ L \\ \tau_e \end{bmatrix} =: g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c, \bar{\boldsymbol{x}}, L, \tau_e), \text{当} D1$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^+ \\ \boldsymbol{x}_c^+ \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ \\ L^+ \\ \tau_e^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_c \\ \varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L) \\ rL \\ 0 \end{bmatrix} =: g_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c, \bar{\boldsymbol{x}}, L, \tau_e), \text{当} D2$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^+ \\ \boldsymbol{x}_c^+ \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ \\ L^+ \\ \tau_e^+ \end{bmatrix} \in \{g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c, \bar{\boldsymbol{x}}, L, \tau_e), g_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c, \bar{\boldsymbol{x}}, L, \tau_e)\}, \text{当} D3$$

其中,

$$D1 := \{(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c, \tau_e \in [0, T_e)\}$$
$$D2 := \{(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \notin \mathcal{D}_c, \tau_e \in [T_e, T_e']\}$$
$$D3 := \{(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c, \tau_e \in [T_e, T_e']\}$$

4 几个引理

为了给出本节主要结果, 首先给出下面两个与混杂系统有界性相关的引理.

引理 1 (**$\mathcal{KLL}$ 界**)(文献 [28] 中定理 6.5)**.** 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集, 紧集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ 的吸引域 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 是关于 $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 的开集. 令 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ 是满足 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}$ 的任意开集, $\omega: \mathcal{U} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 是与 $\mathcal{U}$ 相关的紧集 $\mathcal{A}$ 上的一个算子, 则存在函数 $\gamma \in \mathcal{KLL}$ 使得所有从吸引域 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 出发的系统解 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\forall (t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}_\delta$,

$$\omega(\boldsymbol{x}(t, j)) \leq \gamma(\omega(\boldsymbol{x}(0, 0)), t, j) \tag{11}$$

引理 2 (**扰动 $\mathcal{KLL}$ 界**)(文献 [28] 中定理 6.6)**.** 设紧集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ 的吸引域 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 是关于 $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ 的开集. 令 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ 是满足 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \cap \mathcal{U}$ 的任意开集, $\omega: \mathcal{U} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 是与 $\mathcal{U}$ 相关的紧集 $\mathcal{A}$ 上的一个算子, $\gamma \in \mathcal{KLL}$ 是系统解 $\boldsymbol{x}$ 满足式 (11) 的函数. 假设受干扰混杂系统簇 $\mathcal{H}_\delta$, $\delta \in (0, 1)$ 具有收敛性质 (Convergence property), $\boldsymbol{x}_\delta$ 是系统 $\mathcal{H}_\delta$ 的状态, 则对任一紧集 $K \subset \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$, 常数 $\varepsilon_2 > 0$, 存在正数 $\delta^* > 0$ 使得对每一个 $\delta \in (0, \delta^*]$, 系统 $\mathcal{H}_\delta$ 初始值从 K 出发的解 $\boldsymbol{x}_\delta$ 满足 $\forall (t, j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{x}_\delta$,

$$\omega(\boldsymbol{x}_\delta(t, j)) \leq \gamma(\omega(\boldsymbol{x}_\delta(0, 0)), t, j) + \varepsilon_2 \tag{12}$$

在给出本节主要引理之前, 先分析一下系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 紧集 $\mathcal{A}$ 的渐近稳定性. 由文献 [29] 中混杂系统的逆 Lyapunov 定理可知, 考虑到闭环系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 的函数和集合特性, 存在一个光滑的函数 $V: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n_c} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 α_1, α_2, 满足以下三个条件:

1) $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathbf{R}^{n_p} \times \mathbf{R}^{n_c}$,

$$\alpha_1(|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)|_{\mathcal{A}}) \leq V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \leq \alpha_2(|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)|_{\mathcal{A}})$$

2) $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{C}_c$,

$$\langle \nabla V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c), [f(\boldsymbol{x}, \kappa_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}}, f_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \rangle \leq -V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)$$

3) $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c$,

$$\max_{\hat{\boldsymbol{x}}_c \in g_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)} V(\boldsymbol{x}, \hat{\mathbf{x}}_c) \leq \mathrm{e}^{-1} V, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_c)$$

混杂系统的逆 Lyapunov 定理表明, 闭环系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 存在满足上述三个条件的光滑函数 V 意味着吸引域为 $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ 的紧集 $\mathcal{A}$ 是预渐近稳定的.

令 $\mathcal{U}$ 是满足 $\mathcal{C}_c \cup \mathcal{D}_c \subset \mathcal{U}$ 的任意开集. 由引理 1 知, 对每一个与 $\mathcal{U}$ 相关的紧集 $\bar{\mathcal{A}}$ 上的算子

$\omega:\mathcal{U}\to\mathbf{R}_{\geq 0}$, 存在函数 $\gamma\in\mathcal{KLL}$ 使得所有从吸引域 $\bar{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ 出发的系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 解 $\boldsymbol{\zeta}$ 满足

$$\omega(\boldsymbol{\zeta}(t,j))\leq\gamma(\omega(\boldsymbol{\zeta}(0,0)),t,j),\ \forall(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\zeta} \tag{13}$$

联合函数 V 的连续性和条件 2) 可知, 对满足 $0<\delta_s\leq\Delta_s<\infty$ 的任意正数 δ_s 以及 Δ_s, 总存在正数 $\bar{\delta}>0$ 和 $\gamma_0\in(0,1)$, 使得对于 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)\in(\mathcal{C}_c+\bar{\delta}\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)$ 有

$$\begin{aligned}&\langle\nabla V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c),[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}},f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\rangle=\\&\quad-\gamma_0V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)\end{aligned} \tag{14}$$

再由 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)\mapsto f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c))$ 和函数 f_c 的局部有界性可知, 存在 $M>0$, 使得对于 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)\in(\mathcal{C}_c+\bar{\delta}\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(0,\Delta_s)$ 有

$$\left|\left[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}},f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\right|\leq M$$

任取满足 $0<\delta<\bar{\delta}$ 的 δ 值, 进一步选取某个 T_e 值, 使得 $T_e<\delta/M$. 在此前提下, 注意到在流态时, 集合 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n_c}\backslash(\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})$ 中的点不能到达流集 $\mathcal{C}_c$, 流集 $\mathcal{C}_c$ 上的点也不能到达集合 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n_c}\backslash(\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})$. 为了解决这一问题, 下面利用两个辅助状态来扩展混杂系统 $\mathcal{H}_{cl}^E$, 即连续状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}_c$ 和离散状态 q. 连续状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}_c$ 的动态系统更新与 $\boldsymbol{x}_c$ 一致, 即其动力学演化由 f_c 支配

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_c=f_c(\bar{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),\quad\tau_e\in[0,T_e) \tag{15}$$

离散状态 q 则在集合 $\{0,1\}$ 中取值. 在跃态过程中, 离散状态 q 按下述两种方式更新: 当 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\notin\mathcal{D}_c$ 时, $q=1$; 当 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\in\mathcal{D}_c$ 时, q 取值为 0 或 1. 在流态过程中, q 保持不变. 为叙述方便, 扩展后的混杂系统用符号 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 表示.

令常数 λ_1、$\lambda_2\in\mathbf{R}$ 满足 $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, 并定义函数

$$\begin{aligned}W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q):=&\exp(\lambda_1q\tau_e)\times\\&\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\end{aligned} \tag{16}$$

函数 W 是联合标称闭环系统 $\mathcal{H}_{cl}$ 的 Lyapunov 函数 V 以及依赖于计时变量 τ_e、逻辑状态 q 的指数项所构成的, 其中, 指数函数部分 $\exp(\lambda_1q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)$ 可看成是跃态 Lyapunov 函数项, 它是为了平衡流态过程中 $\langle\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),\ [f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}},\ f_c(\bar{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\rangle$ 和跃态过程中 $V(\boldsymbol{x}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^+)-V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)$ 的递增趋势. 在流态过程中, 它可能是递减的 (见式 (21)), 也可能是递增的, 但递增速度没有流态 Lyapunov 函数 V 递减速度快 (见式 (20)). 在跳跃时刻, 指数函数部分 $\exp(\lambda_1q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)$ 依据不同 q^+ 的值整体上是递减的, 并且递减速度比流态 Lyapunov 函数 V 递增速度要快, 具体分析见式 (26)、(28) 和 (29).

令

$$\boldsymbol{e}_1:=\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2:=\boldsymbol{x}_c-\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\ e_3:=L-0 \tag{17}$$

则扩展后闭环混杂系统的部分状态 $[\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q]^{\mathrm{T}}$ 的流态为:

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q):=\\&\quad[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}},f_c(\bar{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}},1,0]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18}$$

通过选择合适的参数, 函数 W 在流态和跃态都是递减的. 下述两个引理联合描述了这一性质.

引理 3 (流态递减). 若假设 2～4 成立, 则对任意满足 $0<\delta_s\leq\Delta_s<\infty$ 的正数 δ_s 和 Δ_s, 正数 $T_e\in(0,T_e']$, 总存在 $\varepsilon>0$ 以及常数 $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, 使得在下述两种情况下,

1) $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,|\boldsymbol{e}_{12}|)\in((\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s))\times[0,T_e)\times\{1\}\times\delta_{12}\mathbb{B}$;

2) $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,|\boldsymbol{e}_{12}|)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[0,T_e)\times\{0\}\times\delta_{12}\mathbb{B}$;

有

$$\begin{aligned}&\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\rangle\leq\\&\quad-\varepsilon W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{e}_{12}=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\delta_{12}>0$ 表示某一正数.

证明. 在流态过程中, 根据 $\tau_e\in[0,T_e)$ 时连续动力学可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\right\rangle\leq\\&\quad(\lambda_1q+\lambda_2(1-q))\exp(\lambda_1q\tau_e)\times\\&\quad\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)+\\&\quad\exp(\lambda_1q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\Big\langle\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),\\&\quad[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c))^{\mathrm{T}},f_c(\bar{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\Big\rangle\end{aligned}$$

进一步地, 对上式最后一项进行处理可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\right\rangle\leq\\&\quad(\lambda_1q+\lambda_2(1-q))\exp(\lambda_1q\tau_e)\times\\&\quad\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)+\\&\quad\exp(\lambda_1q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\Big\langle\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),\end{aligned}$$

$$[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}})_c)^{\mathrm{T}},f_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\Big\rangle+ \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\times \tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+\exp(\lambda_1 q\tau_e)\times \exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1) \tag{19}$$

其中,

$$\tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2):=|\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|\times |f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_1,\tilde{\boldsymbol{x}}_c+\boldsymbol{e}_2))-f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c))|$$

$$\tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1):=|\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|\times |f_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_1,\tilde{\boldsymbol{x}}_c)-f_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|$$

可见, 函数 $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$ 是连续的, 并且对每个 $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}_{\geq 0}\times\{0,1\}$, 都有

$$\tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,0,0)=0,\ \tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,0)=0$$

先考虑引理 3 的结论 1), 此时 $q=1$. 对所有的 $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\in(\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)$, 根据式 (14) 中函数 V 的性质和不等式 (19), 存在 $\lambda_1>0$, $\varepsilon>0$ 满足 $-\gamma_0+\lambda_1<-2\varepsilon$, 可以推得

$$\Big\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\Big\rangle\leq \exp(\lambda_1\tau_e)\Big(\tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)- 2\varepsilon V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)+\tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1)\Big) \tag{20}$$

由于函数 $\tilde{\rho}_1$ 和 $\tilde{\rho}_2$ 关于 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 是连续且随着 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\to(0,0)$ 而趋于 0, 所以存在足够小的 $\delta_{12}>0$ 使得 $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,|\boldsymbol{e}_{12}|)$ 在区间

$$\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[0,T_e)\times\delta_{12}\mathbb{B}$$

内有

$$\tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)<\frac{\varepsilon}{2}V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)$$

以及

$$\tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1)<\frac{\varepsilon}{2}V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)$$

将上式代入式 (20) 得

$$\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\rangle\leq -\varepsilon W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)$$
$$\forall(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,|\boldsymbol{e}_{12}|)\in((\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s))\times [0,T_e)\times\{1\}\times\delta_{12}\mathbb{B}$$

再考虑引理 3 的结论 2), 此时 $q=0$. 对所有的 $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)$, 可得

$$\Big\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\Big\rangle\leq \lambda_2\exp(\lambda_2\tau_e)V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)+ \exp(\lambda_2\tau_e)|\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|\times \Big|[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c))^{\mathrm{T}},f_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\Big|+ \exp(\lambda_2\tau_e)\tilde{\rho}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)+ \exp(\lambda_2\tau_e)\tilde{\rho}_2(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,\boldsymbol{e}_1) \tag{21}$$

选取某个正数 M_V 使得

$$\max_{(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)}\Big\{|\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|\ \Big|[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c))^{\mathrm{T}}, f_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\Big|\Big\}\leq M_V \tag{22}$$

并令 $\mu\geq\frac{M_V}{\alpha_1(\delta_s)}$. 由条件 1) 得

$$\Big|\langle\nabla V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),[f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}},f_c(\bar{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\rangle\Big|\leq \mu V(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c),\forall(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s\Delta_s)$$

于是, 选择适当的 $\lambda_2<0$, 使得 $\lambda_2+\mu<-2\varepsilon$. 后面的分析类似于 $q=1$ 情况, 对所有 $(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q,|\boldsymbol{e}_{12}|)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[0,T_e)\times\{0\}\times\delta_{12}\mathbb{B}$, 可得

$$\langle\nabla W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q),\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\rangle\leq -\varepsilon W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)$$

□

引理 4 (跃态递减). 若假设 2～4 成立, 则对任意满足 $0<\delta_s\leq\Delta_s<\infty$ 的正数 δ_s 和 Δ_s, 常数 $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$, 以及任一满足 $T_e\lambda_2\in(-1,0)$ 的正数 $T_e\in(0,T_e']$, 存在 $\rho\in(0,1)$, 使得下述情况下

1) $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\in\mathcal{D}_c$, $(\boldsymbol{x},\ \tilde{\boldsymbol{x}}_c,\ \tau_e,\ q,\ |\boldsymbol{e}_{12}|)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[0,T_e)\times\{0,1\}\times\delta_{12}'\mathbb{B}$;

2) $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\notin\mathcal{D}_c,(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[T_e,T_e']\times\{1\}$;

3) $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\in\mathcal{D}_c$, $(\boldsymbol{x},\ \tilde{\boldsymbol{x}}_c,\ \tau_e,\ q,\ |\boldsymbol{e}_{12}|)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[T_e,T_e']\times\{0,1\}\times\delta_{12}'\mathbb{B}$;

有

$$W(\boldsymbol{x}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^+,\tau_e^+,q^+)\leq\rho W(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)$$

其中, $\boldsymbol{e}_{12}=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\delta_{12}'>0$ 为某一正数.

证明. 首先, 考虑结论 1) 情况. 当 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\in\mathcal{D}_c$ 且 $\tau_e\in[0,T_e)$ 时

$$W(\boldsymbol{x}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^+,\tau_e^+q^+)= \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \tag{23}$$

其中, $\boldsymbol{\xi} \in g_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)$.

由于函数 V 在 $\mathbf{R}^{n+n_c}$ 上是光滑的, 所以对任一正数 $\delta' > 0$, 都存在 $\mu > 0$ 使得当 $|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| \le \delta'$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \cap \mathbf{R}^{n+n_c}$ 时, 有

$$|V(\boldsymbol{\eta}_1) - V(\boldsymbol{\eta}_2)| \le \mu\delta' \tag{24}$$

令 $\delta' = \delta'_{12}$, 其中 $\delta'_{12} > 0$ 将稍后确定给出. 联合式 (23) 和函数 V 在跳跃时刻的性质条件 3) 可得, 当 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c, (\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q, |\boldsymbol{e}_{12}|) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times [0, T_e) \times \{0, 1\} \times \delta'_{12}\mathbb{B}$ 时, 有

$$\begin{aligned} &W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \\ &\quad \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\Big(\mu\delta'_{12} + V(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\xi})\Big) \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\xi} \in g_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)$. 由条件 3) 可知, $V(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\xi}) \le \mathrm{e}^{-1}V(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)$, 代入上面不等式可得

$$\begin{aligned} &W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \\ &\quad \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\times \\ &\quad \Big(\mathrm{e}^{-1}V(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) + \mu\delta'_{12}\Big) \end{aligned} \tag{25}$$

再次利用函数 V 的光滑性, 当 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q, |\boldsymbol{e}_{12}|) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times [0, T_e) \times \{0, 1\} \times \delta'_{12}\mathbb{B}$, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c$ 时, 有

$$\begin{aligned} &W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \\ &\quad \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\times \\ &\quad \Big[\mathrm{e}^{-1}V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) + 2\mathrm{e}^{-1}\mu\delta'_{12} + \mu\delta'_{12}\Big] = \\ &\quad \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\times \\ &\quad \Big(\mathrm{e}^{-1}V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) + \mu\delta'_{12}(1 + 2\mathrm{e}^{-1})\Big) \end{aligned}$$

进一步地, 利用 $V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \ge \alpha_1(\delta_s)$ 可得, 对每个 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s)$,

$$\begin{aligned} &W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) = \\ &\quad \exp(\lambda_1 q\tau_e)\exp(\lambda_2(1-q)\tau_e)\times \\ &\quad V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)\Big(\mathrm{e}^{-1} + \frac{\mu\delta'_{12}(1 + 2\mathrm{e}^{-1})}{\alpha_1(\delta_s)}\Big) \end{aligned}$$

因为总存在一个正数 $\rho_1 \in (0, 1)$ 满足 $\rho_1 > \mathrm{e}^{-1}$, 所以总可以选取 δ'_{12} 的值, 使下式成立

$$\rho_1 > \mathrm{e}^{-1} + \frac{\mu\delta'_{12}(1 + 2\mathrm{e}^{-1})}{\alpha_1(\delta_s)}$$

即

$$\delta'_{12} < \frac{\alpha_1(\delta_s)(\rho_1 - \mathrm{e}^{-1})}{\mu(1 + 2\mathrm{e}^{-1})}$$

于是, 联合上面不等式可得, 对任意 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c, (\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q, |e_{12|}) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times [0, T_e) \times \{0, 1\} \times \delta'_{12}\mathbb{B}$ 总有

$$W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \rho_1 W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \tag{26}$$

其次, 考虑结论 2) 情况. 当 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \notin \mathcal{D}_c$, $\tau_e \in [T_e, T'_e]$ 时,

$$W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) = V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)$$

同时, 由 $q = 1$ 可以推出

$$\begin{aligned} &W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) = \\ &\quad \exp(-\lambda_1\tau_e)W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \le \\ &\quad \exp(-\lambda_1 T_e)W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \end{aligned} \tag{27}$$

另外, 对每个 $\lambda_1 > 0$, $T_e > 0$, 总存在一个正数 $\rho_2 \in (0, 1)$ 满足 $\rho_2 > \exp(-\lambda_1 T_e)$. 于是, 将 ρ_2 代入式 (27) 可得

$$W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \rho_2 W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \tag{28}$$

对所有 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \notin \mathcal{D}_c$, $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times [T_e, T'_e] \times \{1\}$.

根据上述两种情况的分析证明, 可以类似地得出 3) 的结论, 即存在 $\rho_3 \in (0, 1)$, 使得当 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) \in \mathcal{D}_c, (\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q, |\boldsymbol{e}_{12}|) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times [T_e, T'_e] \times \{0, 1\} \times \delta'_{12}\mathbb{B}$ 时, 有

$$W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \rho_3 W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \tag{29}$$

因此, 对于条件 1) ~ 3), 都存在 $\rho \in (0, 1)$, 使得

$$W(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+, \tau_e^+, q^+) \le \rho W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \tag{30}$$

其中, $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. □

除了保证函数 W 递减, 还需要利用计时变量 $T_e > 0$ 来确保式 (17) 中各误差向量 $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 有界.

引理 5 (误差有界性). 若假设 2 ~ 4 成立, 则对任意满足 $0 < \delta_s \le \Delta_s < \infty$ 的正数 δ_s 和 Δ_s, 给定一正数 $\delta' > 0$, 总存在正数 $T_e \in (0, T'_e]$, 使系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 从 $(\boldsymbol{x}^0, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^0) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s)$(这里, $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}(0, 0)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_c^0 = \tilde{\boldsymbol{x}}_c(0, 0)$) 出发的解 $\boldsymbol{\xi}_e$ 在时域点 $(T^*, J^*) \in \operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$ 之后总有

$$|\boldsymbol{e}_1(t, j)| \le \delta', |\boldsymbol{e}_2(t, j)| \le \delta', |e_3(t, j)| \le \delta'$$

其中, $(t, j) \succeq (T^*, J^*), (t, j) \in \operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$.

证明. 考虑误差动态系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$, 在流态过程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_1 = f(\bar{\boldsymbol{x}}, \kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)) - f(\boldsymbol{x}, \kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c)) \\ \dot{\boldsymbol{e}}_2 = f_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}_c) - f_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \\ \dot{e}_3 = 0 \end{cases} \tag{31}$$

当 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\in\mathcal{D}_c,\tau_e\in[0,T_e)$ 时,

$$\boldsymbol{e}_1^+=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2^+=0,\ e_3^+=e_3 \tag{32}$$

当 $(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c)\notin\mathcal{D}_c,\tau_e\in[T_e,T_e']$ 时,

$$\boldsymbol{e}_1^+=\boldsymbol{x}-\varphi(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},L),\ \boldsymbol{e}_2^+=\boldsymbol{e}_2,\ e_3^+=re_3 \tag{33}$$

由于 $r<1$, 所以在连续流过程中和跳跃时刻 $|e_3|$ 不是递增的, 不可能大于 $L(0,0)$. 同时, 根据编码器/解码器建立机制可知

$$\boldsymbol{x}-\varphi(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},L)\le L/N\le L(0,0)/N \tag{34}$$

令 $M_0=|[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(0),\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(0),e_3^{\mathrm{T}}(0)]^{\mathrm{T}}|+\delta'+1$, 利用假设 3 并选取三个正数 M_1,M_2,M_3 使得下述不等式成立

$$\begin{aligned}&|f(\boldsymbol{x},\kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c))-f(\bar{\boldsymbol{x}},\kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}_c))|\le\\&\quad F_1|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}|\le F_1L\le F_1L(0,0)=M_1\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\max_{(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)}|f_c(\boldsymbol{x}+M_0\mathbb{B},\tilde{\boldsymbol{x}}_c+M_0\mathbb{B})-\\&\quad f_c(\boldsymbol{x}+M_0\mathbb{B},\tilde{\boldsymbol{x}}_c)|\le M_2\end{aligned} \tag{36}$$

$$|e_3|\le|L|\le L(0,0)=M_3 \tag{37}$$

由于系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 的离散事件发生与否是由计时器 τ_e 和集合 D_c 决定的, 所以对每个解 $\boldsymbol{\xi}_e$, 都存在 $(T^*,J^*)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$ 使得离散事件式 (32) 和式 (33) 至少执行一次, 并且与系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 解 $\boldsymbol{\xi}_e$ 的初始点, 即初始状态 $(\boldsymbol{x}^0,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^0)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)$ 无关.

对任意 $(t,j)\succeq(T^*,J^*)$, $(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$, 根据式 (31), (36), (37) 和 $r<1$ 可知, 在流态过程中, $|\boldsymbol{e}_2|$ 的递增速度不可能超过 M_2T_e 且 $|e_3|$ 的递增也不可能超过 M_3T_e; 由式 (32) 和 (33) 可知, 在跃态过程, $|\boldsymbol{e}_2|$ 和 $|e_3|$ 不会递增. 因此, 可选择合适的编码时间 T_e, 使得对所有 $(t,j)\succeq(T^*,J^*),(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$,

$$M_2T_e\le\min\left\{1,\frac{\delta'}{2}\right\},M_3T_e\le\min\left\{1,\frac{\delta'}{2}\right\} \tag{38}$$

从而有

$$|\boldsymbol{e}_2(t,j)|\le\frac{\delta'}{2},\quad |e_3(t,j)|\le\frac{\delta'}{2} \tag{39}$$

注意到, 当 $\tau_e\ge T_e$ 时发生离散事件, $\boldsymbol{e}_1$ 重置为 $\boldsymbol{x}-\varphi(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},L)$, 而 $\boldsymbol{x}-\varphi(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},L)\le L(0)/N=M_3/N$, 且 $N>1$. 由式 (35) 和式 (39) 可知, $|\boldsymbol{e}_1|$ 的递增也不可能超过 $\delta'/2+M_1T_e$. 同理, 可选择合适的编码时间 T_e, 使得对所有 $(t,j)\succeq(T^*,J^*),(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$

$$M_1T_e\le\min\{1,\delta'/2\} \tag{40}$$

从而有

$$|\boldsymbol{e}_1(t,j)|\le\delta' \tag{41}$$

□

5 半全局实用稳定性

针对上述闭环混杂系统 $\mathcal{H}_{cl}^E$, 给出本文主要结果, 即下述定理, 表明 $\mathcal{H}_{cl}^E$ 存在一紧集 $\mathcal{A}$ 是半全局实用渐近稳定的.

定理 1 (半全局实用稳定性). 在假设 1 和假设 2 成立的前提下, 令 f_c 为连续的且 $r<1$, 则 $\mathcal{H}_{cl}^E$ 存在一紧集 $\mathcal{A}$ 是半全局实用渐近稳定的. 换句话说, 对每个紧集 $K\subset\mathcal{C}_c\cup\mathcal{D}_c$ 和 $\varepsilon_3>0$, 总存在函数 $\gamma\in\mathcal{KLL}$ 和正数 $T_e^*>0$, 使得对每个 $T_e\in(0,T_e^*)$, 系统 $\mathcal{H}_{cl}^E$ 始于 $(\boldsymbol{x}(0,0),\boldsymbol{x}_c(0,0))\in K$ 的解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c,\bar{\boldsymbol{x}},L,\tau_e)$ 是有界的, 且对所有的 $(t,j)\in\operatorname{dom}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_c)$, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}_c$ 满足

$$\begin{aligned}&|(\boldsymbol{x}(t,j),\boldsymbol{x}_c(t,j))|_{\mathcal{A}}\le\\&\quad\gamma(|(\boldsymbol{x}(0,0),\boldsymbol{x}_c(0,0))|_{\mathcal{A}},t,j)+\varepsilon_3\end{aligned}$$

证明. 系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 所有状态向量为 $[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_c{}^{\mathrm{T}},\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}},L,\tau_e,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^{\mathrm{T}},q]^{\mathrm{T}}$. 在后续分析中, 只需考虑具有误差信号的状态向量 $[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{x}}_c^{\mathrm{T}},\tau_e,q,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 其中, $\boldsymbol{e}:=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},e_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 事实上, 系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 的所有状态均可根据上述部分状态向量和误差 $\boldsymbol{e}$ 来表示.

令 $\boldsymbol{\xi}_e$ 为系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 的任一解, 其中状态 $\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c$ 的初值为 $\boldsymbol{x}(0,0)=\boldsymbol{x}^0,\tilde{\boldsymbol{x}}_c(0,0)=\boldsymbol{x}_c{}^0$, $(\boldsymbol{x}^0,\tilde{\boldsymbol{x}}_c^0)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)$. 由引理 3 和引理 4 可以确定参数 δ_{12} 和 δ_{12}', 进一步确定引理 5 中 δ' 为 $\delta'=\max\{\delta_{12},\delta_{12}'\}$, 则存在 $T_e^*>0$ 和 $(T^*,J^*)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$, 使得 $\forall(t,j)\succeq(T^*,J^*)$, $(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$, 有 $|\boldsymbol{e}_i(t,j)|\le\delta'$, $i=1,2,3$. 换句话说, 对所有 $(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$, $|\boldsymbol{e}_i(t,j)|\le\delta'$, $i=1,2,3$.

记 $\tilde{\delta}_1=\tilde{\delta}_2=\tilde{\delta}_3=\delta'$. 由 $|[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}|\le\delta'$ 和引理 3 可得, 在流态过程中, 对每个 $(t,j)\in\operatorname{dom}\boldsymbol{\xi}_e$, 若条件

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\in((\mathcal{C}_c+\delta\mathbb{B})\cap\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s))\times\\&\quad[0,T_e)\times\{1\}\end{aligned}$$

或

$$(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{x}}_c,\tau_e,q)\in\Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s,\Delta_s)\times[0,T_e)\times\{0\}$$

成立, 则对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ 有

$$\begin{aligned}&\dot{W}(\boldsymbol{x}(t,j),\tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j),\tau_e(t,j),q(t,j))\le\\&\quad-\varepsilon W(\boldsymbol{x}(t,j),\tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j)\tau_e(t,j),q(t,j))\end{aligned}$$

其中, ε^* 由引理 3 确定.

另一方面, 在条件 1) ~ 3) 下, 在每个跳跃时刻 (t,j) 满足

$$\begin{aligned}&W(\boldsymbol{x}(t,j+1),\tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j+1),\tau_e(t,j+1),\\&q(t,j+1))\le\rho W(\boldsymbol{x}(t,j),\tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j),\tau_e(t,j),q(t,j))\end{aligned}$$

综上分析, 如果选取 $T_e \le T_e^*$, 则当 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s)$ 时, 系统轨迹满足 $\forall (t,j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\xi}_e$, 在流态过程中

$$\dot{W}(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j), \tau_e(t,j), q(t,j)) \le \\ -\varepsilon W(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j), \tau_e(t,j), q(t,j)) \quad (42)$$

在跃态过程中

$$W(\boldsymbol{x}(t,j+1), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j+1), \tau_e(t,j+1), \\ q(t,j+1)) \le \rho W(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j) \tau_e(t,j), q(t,j)) \quad (43)$$

且有 $|\boldsymbol{e}_i(i,j)| \le \tilde{\delta}_i$, $i = 1,2,3$.

于是, 对任一始于 $(\boldsymbol{x}^0, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^0, \tau_e^0, q^0, \boldsymbol{e}^0) \in \Omega_{\mathcal{A}}(\delta_s, \Delta_s) \times \mathbf{R}_{\ge 0} \times \{0,1\} \times \tilde{\delta}\mathbb{B}$(其中 $\tilde{\delta} = \min\limits_{i \in \{1,2,3\}} \tilde{\delta}_i$) 的系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 解 $\boldsymbol{\xi}_e$, 有

1) 在流态过程中, $\boldsymbol{\xi}_e$ 满足式 (42), 所以对每个 $t \in [t_j, t_{j+1}], t_{j+1} > t_j$, $(t,j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\xi}_e$,

$$W(\boldsymbol{\zeta}(t,j)) \le \exp(-\varepsilon(t - t_j)) W(\boldsymbol{\zeta}(t_j, j)) \quad (44)$$

式中, $\boldsymbol{\zeta}(t,j) := (\boldsymbol{x}(t,j),\ \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j),\ \tau_e(t,\ j),\ q(t,\ j))$, $\boldsymbol{\zeta}^0 = \boldsymbol{\zeta}(0,0)$.

2) 在跃态过程中, $\boldsymbol{\xi}_e$ 满足式 (43), 所以对每个 $(t,j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\xi}_e$ 使得当 $(t,j+1) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\xi}_e$ 时, 有

$$W(\boldsymbol{\zeta}(t,j+1)) \le \rho W(\boldsymbol{\zeta}(t,j)) \quad (45)$$

根据式 (16) 中 W 的定义和光滑函数 V 有界性可得

$$\vartheta_1 \alpha_1(|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}}) \le \vartheta_1 V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \le W(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c, \tau_e, q) \le \\ \vartheta_2 V(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \le \vartheta_2 \alpha_2(|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}}) \quad (46)$$

这里利用了 τ_e 的递增不可能大于 T_e 的事实, 其中, $\vartheta_1 = \exp(\lambda_2 T_e)$, $\vartheta_2 = \exp(\lambda_1 T_e)$.

联合式 (44) 和式 (45), 可得 $|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}}$ 在混杂时域上的上下界. 定义 $\hat{n} = \lfloor \frac{T^*}{T_e} \rfloor$, 则对每个 $(T^*, J^*) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\zeta}$ 有

$$W(\boldsymbol{\zeta}(T^*, J^*)) \le \rho^{\boldsymbol{J}^*} \exp(-\varepsilon \hat{n} T_e) \times \\ \exp(-\varepsilon(T^* - \hat{n} T_e)) W(\boldsymbol{\zeta}^0) \quad (47)$$

上式结合式 (46) 可得

$$|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}} \le \alpha_1^{-1}\Big(\frac{1}{\vartheta_1} \rho^{J^*} \exp(-\varepsilon \hat{n} T_e) \times \\ \exp(-\varepsilon(T^* - \hat{n} T_e)) W(\boldsymbol{\zeta}^0)\Big) \quad (48)$$

由此可得, 当 $|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}} = \delta_s$ 时, 有

$$(\boldsymbol{x}(T^*, J^*), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(T^*, J^*)) \in \Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s) \quad (49)$$

下面固定 δ_s 和 Δ_s 使得初始值在给定初始集合 K 内, 取 $\Delta_s^{'} > 0$ 使得 $K \subset \Omega_{\mathcal{A}}(0, \Delta_s^{'})$, 并记 $\Delta_s = \alpha_1^{-1}\Big(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \alpha_2(\Delta_s^{'})\Big)$.

对于从初始条件

$$(\boldsymbol{x}^0, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^0, \tau_e^0, q^0, \boldsymbol{e}^0) \in \Omega_{\mathcal{A}}(0, \Delta_s^{'}) \times \\ \mathbf{R}_{\ge 0} \times \{0,1\} \times \tilde{\delta}\mathbb{B} \quad (50)$$

出发的系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 解 $\boldsymbol{\zeta}$, 由式 (46) 可得

$$W(\boldsymbol{\zeta}(0,0)) \le \vartheta_2 \alpha_2(|(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)|_{\mathcal{A}}) \quad (51)$$

另一方面, 当存在某一初始时刻 $(t', j') \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\zeta}$ 满足

$$(\boldsymbol{x}(t', j'), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t', j')) \notin \Omega_{\mathcal{A}}(0, \Delta_s) \quad (52)$$

则对所有 $(t,j) \prec (t', j')$, $(t,j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\zeta}$, 函数 W 沿着系统的解是递减的且根据式 (46) 可得

$$\vartheta_1 \alpha_1(|(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j))|_{\mathcal{A}}) \le W(\boldsymbol{\zeta}(t,j)) \le \\ W(\boldsymbol{\zeta}^0) \le \vartheta_2 \alpha_2(\Delta_s^{'}) \quad (53)$$

进一步可得

$$|(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j))|_{\mathcal{A}} \le \alpha_1^{-1}\Big(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \alpha_2(\Delta_s^{'})\Big) = \Delta_s \quad (54)$$

从而, 系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 的解 $\boldsymbol{\zeta}$(每一个从满足式 (50) 的初始条件出发的解) 始终维持在集合 $\Omega_{\mathcal{A}}(0, \Delta_s)$ 内.

当然, 对于 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c) \in \Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s)$, 函数 W 不一定递减, 所以系统状态可能跳出集合外. 此时, 可利用 W 的连续性以及充分小的 δ_s, 系统状态 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)$ 在集合 $\Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s)$ 中发生离散事件后, 选取参数 $\delta_s^{''}$ 满足 $\delta_s \le |(\boldsymbol{x}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_c^+)| \le \delta_s^{''}$. 并令 $\delta_s^{'} = \alpha_1^{-1}\Big(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \alpha_2(\delta_s^{''})\Big)$. 于是, 类似于上述讨论分析可知, 在发生离散事件后系统的解将始终维持在集合 $\Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s^{'})$ 内. 换句话说, 在 $(t^*, j^*) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\zeta}$ 时刻, 若系统状态 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)$ 在集合 $\Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s)$ 中发生离散事件, 并跳出该集合, 则在系统状态 $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}_c)$ 再次进入集合 $\Omega_{\mathcal{A}}(0, \delta_s)$ 之前, 对于所有 $(t,j) \succ (t^*, j^*)$ 且 $(t,j) \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\zeta}$, 总有

$$\vartheta_1 \alpha_1(|(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j))|_{\mathcal{A}}) \le W(\boldsymbol{\zeta}(t,j)) \le \\ W(\boldsymbol{\zeta}^0) \le \vartheta_2 \alpha_2(\delta_s^{''}) \quad (55)$$

即

$$|(\boldsymbol{x}(t,j), \tilde{\boldsymbol{x}}_c(t,j))|_{\mathcal{A}} \le \alpha_1^{-1}\Big(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \alpha_2(\delta_s^{''})\Big) = \delta_s^{'} \quad (56)$$

于是, 由前面 $\delta_s^{'}$ 的定义知, $\delta_s^{''} = \alpha_2^{-1}\Big(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \alpha_1(\delta_s^{'})\Big)$, 并令 $\delta_s^{'} < \varepsilon$, 则由关系 $\delta_s \le \delta_s^{''}$ 很容易确定一个正

数 δ_s. 于是, $\boldsymbol{x}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}_c$ 的有界性可推广到 $\boldsymbol{x}_c$ 以及与系统解相关的 $\mathcal{KLL}$ 函数中, 进一步由混杂系统的逆 Lyapunov 定理可知, 扩展的混杂系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 是预渐近稳定的. 考虑在状态空间 $\mathbf{R}^{n+n_c}$ 上的混杂系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$, 令 $\hat{\mathcal{A}}$ 为 $\mathbf{R}^{n+n_c}$ 中的一个紧集, $\mathcal{B}_{\hat{\mathcal{A}}}$ 为 $\hat{\mathcal{A}}$ 的吸引域点集, K' 为 $\mathbf{R}^{n_c}$ 的一个子集, 控制器的状态变量初始条件满足 $\boldsymbol{x}_c(0,0) \in K' \subset \mathbf{R}^{n_c}$. 根据引理 2, 对每个紧集 $\hat{K} \subset \mathcal{B}_{\hat{\mathcal{A}}}$ 和任一正数 $\varepsilon_2 > 0$, 存在函数 $\gamma \in \mathcal{KLL}$ 以及 $\delta_s^* > 0$ 使得对任一 $\delta_s \in (0, \delta_s^*]$, 系统 $\mathcal{H}_{cl}^{E_e}$ 始于初始集 $\hat{K}$ 上的解 $\boldsymbol{\zeta}$ 满足

$$\omega(\boldsymbol{\zeta}(t,j)) \le \gamma(w(\boldsymbol{\zeta}(0,0)), t, j) + \varepsilon_2,\ \forall (t,j) \in \operatorname{dom}\boldsymbol{\zeta}$$

其中, $\hat{K} = K \times K'$, 算子 $\omega(\cdot) = |\cdot|_{\hat{\mathcal{A}}}$. □

6 仿真例子

下面给出一个控制例子, 来说明所提出混杂控制策略的有效性.

例 1. 考虑一个经典约束控制系统 (Artstein's circles) 的鲁棒镇定问题[30]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = uR(-\pi/2)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^1 \tag{57}$$

其中, $u \in \mathbf{R}$ 是角速度, 作为控制变量. 系统状态以角速度 u 在单位圆上演化. 对应于系统状态沿顺时针旋转运动. 本例控制目的是设计控制策略能鲁棒地镇定系统状态到 $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}} = [1\ 0]^{\mathrm{T}}$.

在经典反馈控制 $u = x_2$ 作用下, $\dot{x}_1 = x_2^2 = 1 - x_1^2$. 于是, 函数 $V(\boldsymbol{x}) := 1 - x_1$ 的导数满足

$$\langle \nabla V(\boldsymbol{x}), x_2 R(-\pi/2)\boldsymbol{x} \rangle = -(1 - x_1^2)$$

注意到, 若系统状态 $\boldsymbol{x}$ 始于点$[\pm 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 将保持常数而非递减, 所以利用该控制策略不能完全将系统解镇定到 $[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$.

再考虑不连续反馈控制 $u = \operatorname{sgn}(x_2)$, 其中符号函数 "sgn" 在 0 处的值可以任意取 -1 或 1. 虽然利用该不连续反馈控制, 函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是递减的, 但它对于任意小的干扰不具有鲁棒性. 在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上点 $[-1\ 0]$ 附近, 且当 $x_2 < 0$, 则在不连续反馈控制器作用下, 该点将逆时针趋于点 $[1\ 0]$, 而当初始点满足 $x_2 > 0$ 时, 系统解将顺时针趋于点 $[1\ 0]$. 因而, 如果在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上点 $[-1\ 0]$ 附近, 存在任意小的一个干扰 $\operatorname{sgn}(x_2 + e)$ 将使得系统解趋于 $[-1\ 0]$, 而非 $[1\ 0]$. 因此, 利用该控制策略也不能完全将系统解镇定到 $[1\ 0]$ 点.

为了解决这一问题, 设计如下混杂控制器

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{\varrho} = 0, & (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \in \mathcal{C}_c \\ x_c^+ = \varrho^+ = 3 - \varrho, & (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \in \mathcal{D}_c \end{cases} \tag{58}$$

控制器输出$u = \kappa_c(\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho)$, 其中 $\varrho \in Q = \{1, 2\}$, $\bar{\boldsymbol{x}} = [\bar{\boldsymbol{x}}_1\ \bar{\boldsymbol{x}}_2]^{\mathrm{T}}$ 为编码器的状态, 编码器由如下方程表示:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{x}_\varrho R(-\pi/2)\bar{\boldsymbol{x}} \\ \dot{L} = 0 \\ \dot{\tau}_e = 1 \end{cases}, \qquad \tau_e \le T_e \tag{59}$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{x}}^+ = \varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L) \\ L^+ = rL \\ \tau_e^+ = 0 \end{cases}, \qquad \tau_e \ge T_e \tag{60}$$

于是, 整个闭环系统可以由一个流态动力学系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = uR(-\pi/2)\boldsymbol{x} \\ \dot{\varrho} = 0 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = uR(-\pi/2)\bar{\boldsymbol{x}} \\ \dot{L} = 0 \\ \dot{\tau}_e = 1 \end{cases}, \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \in \mathcal{C}_c \text{ 且} \tau_e \le T_e \tag{61}$$

和三个跃态动力学系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x} \\ \varrho^+ = 3 - \varrho \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ = \bar{\boldsymbol{x}} \\ L^+ = L \\ \tau_e^+ = \tau \end{cases}, \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \in \mathcal{D}_c \text{ 且} \tau_e < T_e \tag{62}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x} \\ \varrho^+ = \varrho \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ = \varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L), \\ L^+ = rL \\ \tau_e^+ = 0 \end{cases} \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \notin \mathcal{D}_c \text{ 且} \tau_e \ge T_e \tag{63}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{x} \\ \varrho^+ = 3 - \varrho \\ \bar{\boldsymbol{x}}^+ = \varphi(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}, L), \\ L^+ = rL \\ \tau_e^+ = 0 \end{cases} \quad (\bar{\boldsymbol{x}}, \varrho) \in \mathcal{D}_c \text{ 且} \tau_e \ge T_e \tag{64}$$

组成, 式中流集 $\mathcal{C}_c$ 和跃集 $\mathcal{D}_c$ 分别为

$$\mathcal{C}_c = (C_1 \times \{1\}) \cup (C_2 \times \{2\})$$
$$\mathcal{D}_c = (H_1 \times \{1\}) \cup (H_2 \times \{2\})$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&H_1 = \overline{\mathbb{S}^1 \backslash C_1} = \Psi_2 = \{\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}^1 \mid \bar{\boldsymbol{x}}_1 \geq -1/3\} \\
&H_2 = \overline{\mathbb{S}^1 \backslash C_2} = \{\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}^1 \mid \bar{\boldsymbol{x}}_1 \leq -2/3\} \\
&C_1 = \{\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}^1 \mid \bar{\boldsymbol{x}}_1 \leq -1/3\} \\
&C_2 = \{\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}^1 \mid \bar{\boldsymbol{x}}_1 \geq -2/3\} \\
&\Psi_1 := C_1 \\
&\Psi_2 := \overline{\mathbb{S}^1 \backslash C_1} = \{\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}^1 \mid \bar{\boldsymbol{x}}_1 \geq -1/3\}
\end{aligned}
$$

注意到 $C_1 \cup C_2 = \mathbb{S}^1 := \Theta$, $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \mathbb{S}^1 := \Theta$. 由于系统状态轨迹是沿着单位圆运动的, 在仿真中选取如下的参数, 系统非线性函数 Lipschitz 常数 $\vartheta = 2$, 编码阈值时间 $T_e = 0.5$, 每维变量区间分隔数 $N = 8$, 则取 $r = 0.55$ 满足条件 $r > \mathrm{e}^{\vartheta T_e}/N = 0.3398$. 为了验证本文所提出混杂控制器作用下系统具有鲁棒性, 在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上点 $[-1\ \ 0]$ 附近取初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [-0.999\ \ -0.044\,7]^{\mathrm{T}}$, $\bar{\boldsymbol{x}}(0) = [-0.99\ \ -0.141\,1]^{\mathrm{T}}$, 并取 $\tau_e(0) = 0$, $L(0) = 2.1$, $q(0) = 2$. 通过在初始 3 秒内对控制变量 u 施加 ± 0.15 的外部干扰, 对不施加混杂控制器、施加混杂控制器两种情况分别进行仿真实验. 图 2 和图 3 分别显示了不施加混杂控制器和施加混杂控制器两种情况下系统状态以及编码状态的响应曲线. 由图 2 可以看出, 非线性系统 (57) 在编码状态反馈控制下不能镇定到目标点 $[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 而是最终维持到点 $[-1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$; 而图 3 则表明, 闭环系统在混杂编码状态反馈控制作用下, 可半全局实用渐近镇定到目标集 $\mathcal{A} \times Q = \{[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}\} \times Q$, 从而验证了本文中所得的主要结果.

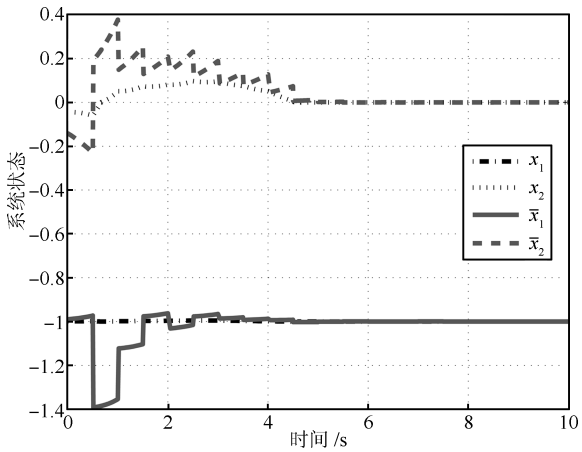


图 2　不施加混杂控制器时, 系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 和编码状态 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 的演化轨迹

Fig. 2　The evolutions of states $\boldsymbol{x}(t)$ and encoder states $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ without hybrid controller

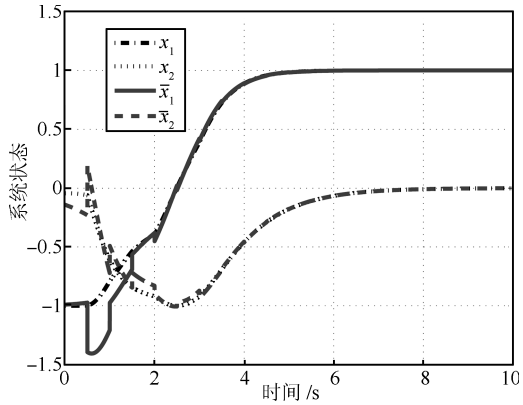


图 3　施加混杂控制器时, 系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 和编码状态 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ 的演化轨迹

Fig. 3　The evolutions of states $\boldsymbol{x}(t)$ and encoder states $\bar{\boldsymbol{x}}(t)$ with hybrid controller

7　结论

本文应用逆 Lyapunov 定理和微分包含理论, 给出了编码反馈机制下混杂系统的解半全局实用稳定的充分条件及控制器的构造方法, 并由此讨论了编码反馈控制参数与闭环混杂系统半全局镇定的关系. 仿真例子说明了所设计控制策略的优越性. 所得结果对混杂系统的稳定性分析和控制器设计是十分重要和方便的. 关于混杂系统的其他镇定问题将另文叙述.

References

1 Wong W S, Brockett R W. Systems with finite communication bandwidth constraints. I: State estimation problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(9): 1294−1299

2 Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(9): 1384−1400

3 Liberzon D, Hespanha J P. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 910−915

4 Liberzon D. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(2): 304−307

5 Nair G N, Fagnani F, Zampieri S, Evans R J. Feedback control under data rate constraints: an overview. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 108−137

6 Tatikonda S, Mitter S. Control under communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1056−1068

7 Tarbouriech S, Gouaisbaut F. Control design for quantized linear systems with saturations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(7): 1883−1889

8 Che Wei-Wei, Yang Guang-Hong. Quantized dynamic output feedback H_∞ control for discrete-time systems with quantizer ranges consideration. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(6): 652−658
(车伟伟, 杨光红. 离散时间系统量化动态输出反馈的 H_∞ 控制. 自动化学报, 2008, **34**(6): 652−658)

9 Jiang Zhong-Ping, Liu Teng-Fei. Quantized nonlinear control—a survey. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1820−1830
(姜钟平, 刘腾飞. 量化非线性控制一综述. 自动化学报, 2013, **39**(11): 1820−1830)

10 De Persis C, Isidori A. Stabilizability by state feedback implies stabilizability by encoded state feedback. *Systems & Control Letters*, 2004, **53**(3−4): 249−258

11 De Persis C, Nešić D. Practical encoders for controlling nonlinear systems under communication constraints. *Systems & Control Letters*, 2008, **57**(8): 654−662

12 Mahmoud M S. Control of linear discrete-time systems by quantised feedback. *IET Control Theory & Applications*, 2012, **6**(13): 2095−2102

13 Fu M Y. Lack of separation principle for quantized linear quadratic gaussian control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2385−2390

14 Hayakawa T, Ishii H, Tsumura K. Adaptive quantized control for nonlinear uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 2009, **58**(9): 625−632

15 Ryan E P. An integral invariance principle for differential inclusions with applications in adaptive control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, **36**(3): 960−980

16 Kellett C M, Shim H, Teel A R. Further results on robustness of (possibly discontinuous) sample and hold feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(7): 1081−1089

17 Sontag E D. Clocks and insensitivity to small measurement errors. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Cambridge University Press*, 1999, **4**: 537−557

18 Sanfelice R G, Teel A R. Lyapunov analysis of sample-and-hold hybrid feedbacks. In: Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA: IEEE, 2006. 4879−4884

19 Sanfelice R G, Prieur C. Uniting two output-feedback controllers with different objectives. In: Proceedings of the 29th American Control Conference. Baltimore, MD: IEEE, 2010. 910−915

20 Prieur C. Uniting local and global controllers with robustness to vanishing noise. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2001, **14**(2): 143−172

21 Chai Tian-You, Zhang Ya-Jun. Nonlinear adaptive switching control method based on unmodeled dynamics compensation. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(7): 773−786
(柴天佑, 张亚军. 基于未建模动态补偿的非线性自适应切换控制方法. 自动化学报, 2011, **37**(7): 773−786)

22 Sanfelice R G, Teel A R. A "throw-and-catch" hybrid control strategy for robust global stabilization of nonlinear systems. In: Proceedings of the 26th American Control Conference. New York, NY: IEEE, 2007. 3470−3475

23 Sanfelice R G, Teel A R, Goebel R, Prieur C. On the robustness to measurement noise and unmodeled dynamics of stability in hybrid systems. In: Proceedings of the 25th American Control Conference. Minneapolis, MN: IEEE, 2006. 4061−4066

24 Sanfelice R G, Teel A R. On hybrid controllers that induce input-to-state stability with respect to measurement noise. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 4891−4896

25 Sanfelice R G, Messina M J, Tuna S E, Teel A R. Robust hybrid controllers for continuous-time systems with applications to obstacle avoidance and regulation to disconnected set of points. In: Proceedings of the 25th American Control Conference. Minneapolis, MN: IEEE, 2006. 3352−3357

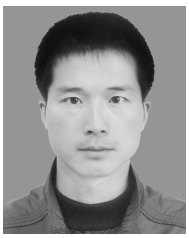
26 Prieur C. Asymptotic controllability and robust asymptotic stabilizability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005, **43**(5): 1888−1912

27 Prieur C, Goebel R, Teel A R. Hybrid feedback control and robust stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(11): 2103−2117

28 Goebel R, Teel A R. Solutions to hybrid inclusions via set and graphical convergence with stability theory applications. *Automatica*, 2006, **42**(4): 573−587

29 Cai C H, Teel A R, Goebel R. Smooth Lyapunov functions for hybrid systems part II: (pre)asymptotically stable compact sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(3): 734−748

30 Artstein Z. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1983, **7**(11): 1163−1173



楼旭阳 江南大学物联网工程学院副教授, 博士. 主要研究方向为系统优化与网络控制. 本文通信作者.
E-mail: xuyang.Lou@gmail.com
(**LOU Xu-Yang** Ph. D., associate professor at the School of IoT Engineering, Jiangnan University. His research interest covers system optimization and network control. Corresponding author of this paper.)

叶 倩 无锡职业技术学院讲师, 博士. 主要研究方向为混杂系统分析与综合.
E-mail: yeqian85@gmail.com
(**YE Qian** Ph. D., lecturer at Wuxi Institute of Technology. Her research interest covers analysis and synthesis of hybrid systems.)