第 40 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 40, No. 5
2014 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 2014

一种高阶无迹卡尔曼滤波方法

张勇刚 [1] 黄玉龙 [1] 武哲民 [1] 李 宁 [1]

摘 要 现有的研究中, 高阶无迹变换 (Unscented transform, UT) 还不存在具体的解析解, 因此, 无法利用高阶无迹变换获得具备更高精度的高阶无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF). 为了解决这一问题, 本文在五阶容积变换 (Cubature transform, CT) 的基础上, 通过引入一个自由参数 κ, 得到高阶无迹变换的解析解, 从而获得了高阶无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF). 同时验证了现有的五阶容积变换和五阶无迹变换分别是本文所提出的高阶无迹变换在 $\kappa=2$ 和 $\kappa=6-n$ 时的两个特例. 进而分析和讨论了高阶无迹卡尔曼滤波器在系统不同维数条件下 κ 值的最优选取, 并讨论了其稳定性. 纯方位跟踪模型和弹道目标再入模型仿真验证了本文方法的正确性, 且与现有方法相比具有更高的精度.

关键词 高阶无迹变换, 五阶容积变换, 五阶无迹变换, 高阶无迹卡尔曼滤波器

引用格式 张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 李宁. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法. 自动化学报, 2014, **40**(5): 838−848

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00838

A High Order Unscented Kalman Filtering Method

ZHANG Yong-Gang[1] HUANG Yu-Long[1] WU Zhe-Min[1] LI Ning[1]

Abstract Currently there is still no specific analytical solution for the high order unscented transform (UT), thus high order UT can not be used to obtain high order unscented Kalman filter (UKF) with higher accuracy. In order to solve this problem, an analytical solution of high order UT is obtained by introducing a free parameter κ on the basis of fifth-order cubature transform (CT), and the high order UKF is then obtained. It is illustrated that the existing fifth-order CT and fifth-order UT are two special cases of the high order UT when κ=2 and $\kappa = 6 - n$, respectively. Furthermore, the optimal choice of parameter κ in the high order UKF is analyzed and discussed for different dimensional systems, and the stability of the proposed method is discussed. Simulations based on the bearings-only tracking model and ballistic object reentry model show that the proposed method is correct and it has better performance as compared with the existing methods.

Key words High order unscented transform (UT), fifth-order cubature transform (CT), fifth-order unscented transform, high order unscented Kalman filter (UKF)

Citation Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Wu Zhe-Min, Li Ning. A high order unscented Kalman filtering method. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 838−848

无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 是一种采用无迹变换 (Unscented transform, UT) 来计算非线性变换均值和协方差的高斯滤波器[1−2]. 按照近似概率分布比近似任意的非线性变换容易得多的原理, UT 变换: 1) 通过确定性地选择一组样本点来表征一个概率分布的某些特征, 比如均值、协方差等; 2) 经非线性变换传播这组样本点; 3) 计算传播后的样本点的均值和协方差[2−3]. UKF 的估计精度取决于 UT 变换计算均值和协方差的精度[2−3]. 相比于扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF), UKF 在与其相同的计算量下能提供更好的性能, 并且不需要计算雅可比矩阵[3]. Lefebvre 将 UT 变换诠释为随机线性回归, 从而揭示了 UKF 优于 EKF 的原因[1, 4]. 但是, 当非线性模型或噪声统计特性不准时, 此时, 文献 [2−3] 中的 UKF 滤波性能变差. 为了解决这一问题, 人们提出了自适应 UKF, 它能实时地对模型误差和噪声统计特性进行估计与修正, 从而提高 UKF 的估计精度[5−7]. 当 UKF 用于高维非线性系统时, 可能会遇到数值不稳定情况[1, 8]. Arasaratnam 等利用球径容积准则, 提出了一种对高维状态估计数值稳定的容积卡尔曼滤波器 (Cubature Kalman filter, CKF)[8]. 事实上 CKF 是 UKF 在自由参数 κ 等于 0 时的一种特例, 为高维状态估计中 κ 应该取 0 提供了严格的理论依据[8]. Jia 等将三阶容积变换 (Cubature transform, CT) 进行推广, 得到了具有任意阶精度的高阶 CKF[9]. 除此之外, UKF 受非本

收稿日期 2013-06-05 录用日期 2013-08-28
Manuscript received June 5, 2013; accepted August 28, 2013
国家自然科学基金 (61001154, 61201409, 61371173), 中国博士后科学基金 (2013M530147), 黑龙江省博士后基金 (LBH-Z13052), 哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项基金 (HEUCFX41307) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61001154, 61201409, 61371173), China Postdoctoral Science Foundation (2013M530147), Heilongjiang Postdoctoral Fund (LBH-Z13052), and Fundamental Research Funds for the Central Universities of Harbin Engineering University (HEUCFX41307)
本文责任编委 高会军
Recommended by Associate Editor GAO Hui-Jun
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001

地采样的影响很大, 特别是当系统的非线性为三角函数或指数函数时, 滤波可能会发散[10−11]. 为了解决这个问题, Julier 等提出了比例 UKF[10], Chang 等提出了变换的 UKF[11].

现有的 UKF 算法本质上是一种基于二阶 UT 变换的非线性滤波方法, 仅能够匹配非线性函数的二阶泰勒展开项, 因此, 其精度有限. 为了提高它的精度, Julier 等在文献 [12] 中讨论了通过选择一组能精确匹配随机向量前四阶矩的样本点的高阶 UT 变换方法, 这些点的取值及其权值满足一个存在未知变量交叉耦合高阶项的方程组, 但该方程组无法解析解出, 因此, 无法完成高阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值的选取, 从而也无法构成高阶 UKF. 此外, Lerner 从数值积分角度基于单项式精确准则给出了五阶 UT 变换[13]. 文献 [1] 指出, 五阶 UT 变换在高阶 UT 变换中, 通过加入所有非中心 Sigma 点到原点的距离都相等这一约束, 来求解高阶 UT 变换中的 Sigma 点及其权值, 并不是实质意义上的高阶 UT 变换. 由于五阶 UT 变换强加了这种约束, 使得它的精度低于高阶 UT 变换.

本文的目的即为解决上述问题, 提出一种精度更高的高阶 UKF 方法. 在三阶 CT 变换是二阶 UT 变换的一种特例这一事实的启发下, 首先, 验证了文献 [9] 中的五阶 CT 变换是文献 [12] 中的高阶 UT 变换的一种特例. 其次, 在五阶 CT 变换的基础上, 通过引入自由参数 κ, 消除高阶 UT 变换求解中的未知自由度, 进而求解了高阶 UT 变换中存在未知变量交叉耦合高阶项的方程组, 得到了高阶 UT 变换的解析解, 并获得了高阶 UKF. 同时, 本文的分析表明, 五阶 CT 变换和文献 [13] 中的五阶 UT 变换分别是本文给出的高阶 UT 变换在 $\kappa=2$ 和 $\kappa=6-n$ 时的两个特例, 因此, 说明本文给出的高阶 UKF 是一种更广义的高阶滤波器, 它能从理论上很好地将现有的五阶 CKF 和五阶 UKF 统一到高阶 UKF 框架下. 最后, 本文给出了高阶 UKF 中自由参数 κ 的最优选取策略, 为设计性能最优的高阶 UKF 提供了理论依据, 并讨论了高阶 UKF 在此最优策略下的稳定性, 探讨了其实际应用的可行性. 本文的理论分析表明, 在高斯假设下, 对于二维和三维系统, 依据本文给出的自由参数 κ 的最优选取策略设计的高阶 UKF 可以获得比五阶 CKF 和五阶 UKF 更高的精度. 纯方位跟踪模型和弹道目标再入模型的仿真结果验证了本文方法的正确性和优越性.

1 非线性高斯滤波器

考虑如下状态空间形式的离散非线性系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{n}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量, $\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 为系统的量测向量, $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{h}(\cdot)$ 为已知的任意函数, 随机系统噪声 $\boldsymbol{n}_{k-1}$ 是零均值方差为 Q_{k-1} 的高斯白噪声, 随机观测噪声 $\boldsymbol{v}_k$ 是零均值方差为 R_k 的高斯白噪声, $\boldsymbol{n}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{v}_k$ 不相关. 非线性滤波是根据当前时刻及此前的含噪声的量测来获得系统状态的最小方差估计 $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_k]$, 其中, $\boldsymbol{Z}_k = \{\boldsymbol{z}_j, 1 \le j \le k\}$.

如果高斯分布能够很好地近似状态的概率密度, 可以使用 Kalman 滤波器结构 (线性最小方差更新准则) 的高斯滤波器完成状态估计任务. 由于均值和方差能够完全表征高斯分布, 高斯滤波器一般结构如下[1, 14]:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + W_k(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}) \\ P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k P_{\boldsymbol{zz},\,k|k-1} W_k^{\mathrm{T}} \\ W_k = P_{\boldsymbol{xz},\,k|k-1} P_{\boldsymbol{zz},\,k|k-1}^{-1} \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \mathrm{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1})|\boldsymbol{Z}_{k-1}] \\ P_{k|k-1} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Z}_{k-1}] \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \mathrm{E}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)|\boldsymbol{Z}_{k-1}] \\ P_{\boldsymbol{zz},\,k|k-1} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Z}_{k-1}] \\ P_{\boldsymbol{xz},\,k|k-1} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Z}_{k-1}] \end{cases} \tag{3}$$

从上述高斯滤波器的一般形式中可以知道, 高斯滤波器需要计算两个均值和三个协方差, 按照线性最小方差准则完成量测更新, 同时高斯滤波器的估计精度取决于式 (3) 中的均值和协方差的计算精度. 采用不同的方法来计算式 (3) 中的均值和协方差, 将得到不同类型的高斯滤波器. 例如, 采用 UT 变换方法, 得到的是 UKF[2−3]; 采用高斯埃尔米特求积方法, 得到的是高斯埃尔米特求积滤波器 (Gauss-Hermite quadrature filter, GHQF)[14]; 采用容积方法, 得到的是 CKF[8, 9]; 采用多项式插值方法, 得到的是中心差分滤波器 (Central difference filter, CDF)[14] 等. 本文将重点研究高斯滤波器中的 UKF, 通过求取高阶 UT 变换的解析解, 进而获得高阶 UKF, 从而提高 UKF 的精度. 下面将介绍现有高阶 UT 变换存在的问题.

2 高阶 UT 变换问题阐述

按照近似概率分布比近似任意的非线性变换容易得多这一原理, UT 变换首先通过确定性地选择一组 Sigma 点来表征一个概率分布的某些特征, 例如均值、协方差等; 其次, 经非线性变换 (系统函数或量测函数) 传播这组 Sigma 点, 得到变换的样本点; 最后, 通过计算变换的样本点的均值和协方差, 完成式 (3) 中均值和协方差的计算. 而式 (3) 中的均值和

协方差的计算精度又取决于 Sigma 点选取策略, 选取的 Sigma 点越能表征状态的概率分布 (即匹配先验状态的各阶矩统计量越多), 式 (3) 中的均值和协方差的计算精度越高[12].

不难发现, 式 (3) 中的数学期望是相对于任意的高斯概率密度. 从理论上讲, 一个非线性函数对一个任意高斯分布的期望总是可以被转换成另外一个非线性函数对标准高斯分布的期望[1, 8−9, 11]. 基于上述原理, 本文不失一般性地假设状态的概率分布是标准高斯分布. 下面将首先介绍传统的二阶 UT 变换方法, 并说明现有的高阶 UT 变换存在的问题.

2.1 二阶 UT 变换

式 (3) 中的均值和协方差计算问题可以归结为标准高斯随机向量的任意非线性变换的均值和协方差计算问题. $\boldsymbol{x}$ 为 n 维的标准高斯随机向量, $\boldsymbol{y}$ 为另一随机向量, $\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的关系为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, UT 变换可用来计算随机向量 $\boldsymbol{y}$ 的均值和协方差.

二阶 UT 变换对称地选取 $2n+1$ 个 Sigma 点, 这组 Sigma 点能够匹配 n 维高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的均值和协方差及所有的高阶奇次阶矩 (Sigma 点的对称性)[12]. 图 1 给出了二维情况下, 二阶 UT 变换在第一象限选择的 Sigma 点. 将图 1 中的二维推广到 n 维, 可以知道, 二阶 UT 变换需要两类 Sigma 点, 第一类 Sigma 点位于坐标原点, 点数为 1, 权值为 w_0; 第二类 Sigma 点对称地分布在与原点距离为 s_1 的 n 条坐标轴上, 点数为 $2n$, 权值均为 w_1[2−3, 12].

对于标准高斯随机向量 $\boldsymbol{x}\sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0},I)$, 二阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值为[12]

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_0=\boldsymbol{0}, & w_0=\dfrac{\kappa}{n+\kappa}\\ \boldsymbol{\chi}_i=\sqrt{(n+\kappa)}\boldsymbol{e}_i, & w_i=\dfrac{1}{2(n+\kappa)}\\ \boldsymbol{\chi}_{i+n}=-\sqrt{(n+\kappa)}\boldsymbol{e}_i, & w_{i+n}=\dfrac{1}{2(n+\kappa)}\end{cases} \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{e}_i=[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$, $i=1,2,\cdots,n$, 即第 i 个元素为 1 的单位列向量.

对于更一般的高斯随机向量 $\boldsymbol{x}\sim \mathrm{N}(\bar{\boldsymbol{x}},P_{\boldsymbol{x}})$, 二阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_0=\bar{\boldsymbol{x}}, & w_0=\dfrac{\kappa}{(n+\kappa)}\\ \boldsymbol{\chi}_i=\bar{\boldsymbol{x}}+\sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{e}_i, & w_i=\dfrac{1}{2(n+\kappa)}\\ \boldsymbol{\chi}_{i+n}=\bar{\boldsymbol{x}}-\sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{e}_i, & w_{i+n}=\dfrac{1}{2(n+\kappa)}\end{cases} \tag{5}$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$.

当 $\kappa=3-n$ 时, 二阶 UT 变换能匹配高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的四阶主矩[2−3, 12]. 类似二阶 UT 变换, 我们可以推导高阶 UT 变换 Sigma 点和权值需要满足的条件.

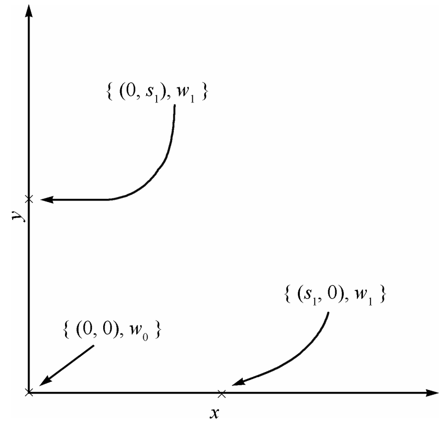

图 1 二维情况下二阶 UT 变换在第一象限选择的 Sigma 点
Fig. 1 Sigma points chosen by second-order UT for a two dimensional case in the first quadrant

2.2 高阶 UT 变换

当一个随机向量的偏度 (三阶矩) 和峰态 (四阶矩) 对它的概率分布的影响很大时, 此时, 二阶 UT 变换计算方程 (3) 获得的协方差可能欠估计[12]. Julier 等将二阶 UT 变换进行推广, 得到了高阶 UT 变换[12].

高阶 UT 变换对称地选取 $2n^2+1$ 个 Sigma 点, 这组 Sigma 点能够匹配 n 维高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的前四阶矩 (均值、协方差、偏度、峰态) 及所有高阶奇次阶矩. 图 2 给出了二维情况下, 高阶 UT 变换在第一象限选择的 Sigma 点. 将图 2 中的二维推广到 n 维可以知道, 高阶 UT 变换需要三类 Sigma 点, 第一类 Sigma 点位于坐标原点, 点数为 1, 权值为 w_0; 第二类 Sigma 点对称地分布在与原点距离为 s_1 的 n 条坐标轴上, 点数为 $2n$, 权值均为 w_1; 第三类 Sigma 点对称地位于 $(0,\cdots,\pm s_2,\cdots,\pm s_2,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ (第 i 个和第 j 个元素不为 0, $i<j, i,j=1,2,\cdots,n$), 点数为 $4\mathrm{C}_n^2$, 权值为 w_2.

为了精确地匹配标准高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的均值、协方差、偏度和峰态, 高阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值必须满足以下条件[12]:

$$\begin{pmatrix} w_0+2nw_1+2n(n-1)w_2-1\\ 2w_1s_1^2+4(n-1)w_2s_2^2-1\\ 2w_1s_1^4+4(n-1)w_2s_2^4-3\\ 4w_2s_2^4-3\end{pmatrix}=0 \tag{6}$$

要使高阶 UT 变换的 Sigma 点能匹配高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的六阶主矩, 则高阶 UT 变换的 Sigma 点及

其权值还必须满足以下条件[12]:

$$2w_1 s_1^6 + 4(n-1)w_2 s_2^6 - 15 = 0 \tag{7}$$

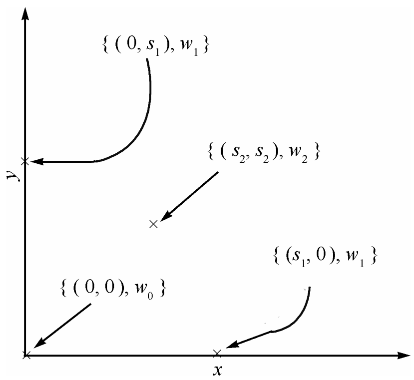

图 2　二维情况下高阶 UT 变换在第一象限选择的 Sigma 点
Fig. 2　Sigma points chosen by high order UT for a two dimensional case in the first quadrant

虽然从理论上讲, 高阶 UT 变换能够匹配高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的全部四阶矩和六阶主矩, 从而获得比二阶 UT 变换更高的精度, 但是上述 Sigma 点及其权值无法解析求出, 导致其实际应用受限. 下面本文将依据五阶 CT 变换的理论基础, 通过引入自由参数 κ, 得到高阶 UT 变换的解析解, 进而获得高阶 UKF 滤波方法.

3　一种高阶 UKF 方法及其参数选择

3.1　高阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值解析解

对于标准高斯随机向量 $\boldsymbol{x} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, I)$, 五阶 CT 变换的 Sigma 点及其权值为[9]

$$\boldsymbol{\chi}_0 = \boldsymbol{0}, \qquad w_0 = \frac{2}{n+2} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{i_1} = \sqrt{(n+2)}\boldsymbol{e}_{i_1} \\ \boldsymbol{\chi}_{i_1+n} = -\sqrt{(n+2)}\boldsymbol{e}_{i_1}, \\ w_1 = \dfrac{4-n}{2(n+2)^2} \end{cases} \quad i_1 = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{i_2} = \sqrt{(n+2)}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} \\ \boldsymbol{\chi}_{i_2+0.5n(n-1)} = -\sqrt{(n+2)}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} \\ \boldsymbol{\chi}_{i_2+n(n-1)} = \sqrt{(n+2)}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} \\ \boldsymbol{\chi}_{i_2+1.5n(n-1)} = -\sqrt{(n+2)}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} \\ w_2 = \dfrac{1}{(n+2)^2} \end{cases},$$
$$i_2 = 1, 2, \cdots, 0.5n(n-1) \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} \{\boldsymbol{s}_{i_2}^{+}\} := \{\sqrt{\dfrac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l) : k < l,\ k, l = 1, 2, \cdots, n\} \\ \{\boldsymbol{s}_{i_2}^{-}\} := \{\sqrt{\dfrac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_l) : k < l,\ k, l = 1, 2, \cdots, n\} \end{cases} \tag{11}$$

通过式 (8) ~ (11) 可知, 五阶 CT 变换需要三类 Sigma 点, 第一类 Sigma 点位于坐标原点, 点数为 1, 权值为 $2/(n+2)$; 第二类 Sigma 点对称地分布在距离原点 $\sqrt{(n+2)}$ 的 n 条坐标轴上, 点数为 $2n$, 权值为 $(4-n)/(2(n+2)^2)$; 第三类 Sigma 点对称地分布于 $(0, \cdots, \pm\sqrt{(n+2)/2}, \cdots, \pm\sqrt{(n+2)/2}, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ (第 k 个和第 l 个元素不为 0, $k < l$, $k, l = 1, 2, \cdots, n$), 点数为 $2n(n-1)$, 权值为 $1/(n+2)^2$. 从而可知, 五阶 CT 变换 Sigma 点的点数和分布情况与高阶 UT 变换 Sigma 点的点数和分布情况十分相似. 类比高阶 UT 变换思想, 五阶 CT 变换的 Sigma 点及其权值参数如下:

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{2}{n+2}, & w_1 = \dfrac{(4-n)}{2(n+2)^2}, & w_2 = \dfrac{1}{(n+2)^2} \\ & s_1 = \sqrt{n+2} & s_2 = \sqrt{\dfrac{n+2}{2}} \end{cases} \tag{12}$$

经过简单的代数运算, 很容易验证式 (12) 给出的五阶 CT 变换的 Sigma 点及其权值参数满足方程组 (6), 从而可知五阶 CT 变换是高阶 UT 变换的一种特例. 下面将在五阶 CT 变换的基础上, 通过引入一个自由参数 κ, 得到高阶 UT 变换的解析解.

类比于二阶 UT 变换[12], 令 $w_2 = 1/(n+\kappa)^2$, 将其代入方程组 (6) 中, 并求解方程组 (6), 获得 w_1, w_2, s_1, s_2 的值, 当 $n \neq 4$ 时, 有:

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{-2n^2 + (4-2n)\kappa^2 + (4\kappa+4)n}{(n+\kappa)^2(4-n)} \\ w_1 = \dfrac{(\kappa+2-n)^2}{2(n+\kappa)^2(4-n)}, \qquad w_2 = \dfrac{1}{(n+\kappa)^2} \\ s_1 = \sqrt{\dfrac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}}, \qquad s_2 = \sqrt{\dfrac{n+\kappa}{2}} \end{cases} \tag{13}$$

当 $n = 4$ 时, 此时, 只有 $\kappa = 2$ 方程组 (6) 才有解, 从而有

$$\begin{cases} w_0 = \dfrac{2}{n+2}, & w_1 = \dfrac{(4-n)}{2(n+2)^2}, & w_2 = \dfrac{1}{(n+2)^2} \\ & s_1 = \sqrt{n+2} & s_2 = \sqrt{\dfrac{n+2}{2}} \end{cases} \tag{14}$$

将上述结果进行推广, 得到一般高斯随机向量 $\boldsymbol{x} \sim \mathrm{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{x}})$ 的高阶 UT 变换的 Sigma 点及其权值的解析解 (现在只考虑 $n \neq 4$ 情况, 而 $n = 4$ 情况类似):

第一类 Sigma 点及其权值:

$$\boldsymbol{\chi}_0 = \bar{\boldsymbol{x}}, \qquad w_0 = \frac{-2n^2 + (4-2n)\kappa^2 + (4\kappa+4)n}{(n+\kappa)^2(4-n)} \tag{15}$$

第二类 Sigma 点及其权值:

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}_{i_1} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{e}_{i_1} \\ &\boldsymbol{\chi}_{i_1+n} = \bar{\boldsymbol{x}} - \sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{e}_{i_1}, \\ &w_1 = \frac{(\kappa+2-n)^2}{2(n+\kappa)^2(4-n)} \end{aligned}\right.$$

$$i_1 = 1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

第三类 Sigma 点及其权值:

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}_{i_2} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} \\ &\boldsymbol{\chi}_{i_2+0.5n(n-1)} = \bar{\boldsymbol{x}} - \sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} \\ &\boldsymbol{\chi}_{i_2+n(n-1)} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} \\ &\boldsymbol{\chi}_{i_2+1.5n(n-1)} = \bar{\boldsymbol{x}} - \sqrt{(n+\kappa)P_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} \\ &w_2 = \frac{1}{(n+\kappa)^2} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

其中, $i_2 = 1, 2, \cdots, 0.5n(n-1)$.

从上述的推导过程中不难发现, 式 (15) ～ (17) 与式 (9) ～ (11) 相比, 当 $\kappa = 2$ 时, 高阶 UT 变换就是五阶 CT 变换, 当 $\kappa = 6 - n$ 时, 不难验证式 (13) 中 $s_1 = s_2$, 此时, 高阶 UT 变换就是五阶 UT 变换. 从以上论述不难得出, 文献 [9] 中提出的五阶 CT 变换和文献 [13] 中提出的五阶 UT 变换是本文高阶 UT 变换在自由参数 $\kappa = 2$ 和 $\kappa = 6 - n$ 时的两个特例. 值得注意的是, 对于四维系统 ($n = 4$ 情况), 高阶 UT 变换只有 $\kappa = 2$ 时, 方程组 (6) 才有解, 且五阶 UT 变换和五阶 CT 变换都是高阶 UT 变换在 $\kappa = 2$ 时的一种特例, 因此, 对于四维系统, 高阶 UT 变换、五阶 CT 变换和五阶 UT 变换三者完全等价.

由五阶 UT 变换和五阶 CT 变换分别是高阶 UT 变换在不同 κ 值下的特例这一事实可以知道, κ 能调节高阶 UT 变换的性能. 因而通过选取合适的 κ 值就可以获得性能最优的高阶 UT 变换, 进而获得更高精度的高阶 UKF 方法. 我们将在下一小节探讨这个问题.

3.2 自由参数 $\boldsymbol{\kappa}$ 的最优选取

高阶 UT 变换可以通过选取合适的 κ 值, 使得 Sigma 点及其分布参数满足式 (7), 从而能捕获到高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的六阶主距, 提高 UT 变换精度. 将式 (13) 中的 w_1, w_2, s_1, s_2 的值代入式 (7) 中, 经过简单的代数运算, 得到如下关于 κ 的代数方程:

$$\begin{aligned} &(n-1)\kappa^2 + (2n^2 - 14n)\kappa + n^3 - 13n^2 + \\ &\quad 60n - 60 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

当 $n = 1$ 时, 式 (18) 的解为 $\kappa = -1$, 将 $\kappa = -1$ 再代入式 (13) 中, 可知此时方程组 (6) 无解, 因此, 在一维情况下不存在合适的 κ 值使得 Sigma 点能捕获到高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的六阶主距, 即从 UT 变换的精度的角度来看, 不存在最优的 κ 值.

当 $n \neq 1$ 时, 根据一元二次方程的有解判据 $\Delta = -96n^2 + 480n - 240$, 要想式 (18) 有解, 必须有 $\Delta \geq 0$, 从而有 $2 \leq n \leq 4$ ($n \in \mathbf{N}$). 而又由于当 $n = 4$ 时, 只有 $\kappa = 2$ 时, 方程组 (6) 才有解, 因此只有当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时, κ 才存在最优值.

当 $n = 2$ 时, 求解式 (18), 得到两个最优 κ 值, 即 $\kappa = 0.835$ 或 $\kappa = 19.165$. 由于 CT 变换具有好的数值稳定性[8−9], 所以最优 κ 值应选择接近 $\kappa = 2$ 的值. 兼顾数值稳定性, 在二维情况下一般取最优值为 $\kappa = 0.835$. 同理当 $n = 3$ 时, 求解式 (18), 得到两个最优 κ 值, 即 $\kappa = 1.417$ 或 $\kappa = 10.583$. 为了保证滤波的数值稳定性, 在三维情况下一般取最优值为 $\kappa = 1.417$.

当 $n \geq 5$ 时, 此时不存在最优的 κ 值使得 Sigma 点能捕获到高斯随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的六阶主距, 但是从 UT 变换的数值稳定角度考虑, 可以设定 $\kappa = 2$, 即采用五阶 CT 变换.

综上所述, 对于二维和三维系统, κ 存在最优值, 而且当 κ 取最优值时, 高阶 UT 变换的精度高于五阶 CT 变换和五阶 UT 变换的精度; 对于四维系统, κ 只能取 2, 此时, 高阶 UT 变换与五阶 CT 变换、五阶 UT 变换等价; 对于一维和四维以上的系统, 从精度角度不存在最优的 κ 值, 但是从数值稳定的角度, 可以设定 $\kappa = 2$.

3.3 一种基于高阶 UT 变换的高阶 UKF 方法

基于高斯滤波器的一般结构 (式 (2) 和 (3)), 类似于二阶 UKF 方法, 采用上述的高阶 UT 变换方法来计算式 (3) 中的两个均值和三个协方差, 将得到高阶 UKF. 具体的高阶 UKF 步骤如下:

1) 状态和量测的一步预测:

假设 $k-1$ 时刻状态向量 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 的后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{k-1}|\boldsymbol{Z}_{k-1}) = \mathrm{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$ 通过 Cholesky 分解 $k-1$ 时刻状态向量的估计误差协方差矩阵 $P_{k-1|k-1}$, 获得矩阵 $S_{k-1|k-1}$:

$$P_{k-1|k-1} = S_{k-1|k-1}S_{k-1|k-1}^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 的第一类 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_{00,k-1|k-1}$ 及其权值 w_0:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{00,k-1|k-1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&w_0=\frac{-2n^2+(4-2n)\kappa^2+(4\kappa+4)n}{(n+\kappa)^2(4-n)}\end{aligned}\right.\tag{20}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 的第二类 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k-1|k-1}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k-1|k-1}$ 及其权值 $w_1\,(i_1=1,2,\cdots,n)$:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k-1|k-1}=\sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{e}_{i_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k-1|k-1}=-\sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{e}_{i_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&w_1=\frac{(\kappa+2-n)^2}{2(n+\kappa)^2(4-n)}\end{aligned}\right.\tag{21}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 的第三类 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k-1|k-1}$, $\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k-1|k-1}$, $\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k-1|k-1}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k-1|k-1}$ 及其权值 $w_2\,(i_2=1,2,\cdots,n(n-1)/2)$:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k-1|k-1}=\sqrt{(n+\kappa)}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k-1|k-1}=-\sqrt{(n+\kappa)}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k-1|k-1}=\sqrt{(n+\kappa)}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k-1|k-1}=-\sqrt{(n+\kappa)}S_{k-1|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\\&w_2=\frac{1}{(n+\kappa)^2}\end{aligned}\right.\tag{22}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}&\{\boldsymbol{s}_{i_2}^{+}\}:=\{\sqrt{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_l):k<l,\ k,l=1,2,\cdots,n\}\\&\{\boldsymbol{s}_{i_2}^{-}\}:=\{\sqrt{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_l):k<l,\ k,l=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}\right.\tag{23}$$

通过非线性系统函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 传播状态向量 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 的 Sigma 点, 得到变换的样本点:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{00,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k-1|k-1})\\&\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}^{*}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k-1|k-1})\end{aligned}\right.\tag{24}$$

计算 k 时刻状态的一步预测值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\ &\mathrm{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1})|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\\&w_0\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}^{*}+w_1\sum_{i_1=1}^{n}(\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}^{*}+\\&\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}^{*})+w_2\sum_{i_2=1}^{n(n-1)/2}(\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}^{*}+\\&\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}^{*}+\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}^{*}+\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}^{*})\end{aligned}\tag{25}$$

计算 k 时刻的状态一步预测估计误差协方差 $P_{k|k-1}$:

$$\begin{aligned}P_{k|k-1}=\ &\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{Z}_{k-1}]=\\&w_0\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}^{*\mathrm{T}}+\\&w_1\sum_{i_1=1}^{n}(\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}^{*\mathrm{T}}+\\&\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}^{*\mathrm{T}})+\\&w_2\sum_{i_2=1}^{n(n-1)/2}(\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}^{*\mathrm{T}}+\\&\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}^{*\mathrm{T}}+\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}^{*}\\&\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}^{*\mathrm{T}}+\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}^{*}\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}^{*\mathrm{T}})-\\&\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}}+Q_{k-1}\end{aligned}\tag{26}$$

假设 k 时刻状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的先验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{Z}_{k-1})=\mathrm{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},P_{k|k-1})$, 通过 Cholesky 分解 $P_{k|k-1}$, 得到 $S_{k|k-1}$:

$$P_{k|k-1}=S_{k|k-1}S_{k|k-1}^{\mathrm{T}}\tag{27}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的第一类 Sigma 点及其权值:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\&w_0=\frac{-2n^2+(4-2n)\kappa^2+(4\kappa+4)n}{(n+\kappa)^2(4-n)}\end{aligned}\right.\tag{28}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的第二类 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}$ 及其权值 $w_1\,(i_1=1,2,\cdots,n)$:

$$\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}=\sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}}S_{k|k-1}\boldsymbol{e}_{i_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\&\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}=-\sqrt{\frac{(4-n)(n+\kappa)}{(\kappa+2-n)}}S_{k|k-1}\boldsymbol{e}_{i_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\\&w_1=\frac{(\kappa+2-n)^2}{2(n+\kappa)^2(4-n)}\end{aligned}\right.\tag{29}$$

计算状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的第三类 Sigma 点 $\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}$, $\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}$, $\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}$ 及其权值 $w_2\,(i_2=$

$1, 2, \cdots, n(n-1)/2)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1} = \sqrt{(n+\kappa)}S_{k|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} + \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1} = -\sqrt{(n+\kappa)}S_{k|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{+} + \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1} = \sqrt{(n+\kappa)}S_{k|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} + \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \\ \boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1} = -\sqrt{(n+\kappa)}S_{k|k-1}\boldsymbol{s}_{i_2}^{-} + \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \\ w_2 = \dfrac{1}{(n+\kappa)^2} \end{cases} \tag{30}$$

通过非线性量测函数 $\boldsymbol{h}(\cdot)$ 传播状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的 Sigma 点, 得到变换的样本点:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_{00,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{1i_1,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{2i_1,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{3i_2,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{4i_2,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{5i_2,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}) \\ \boldsymbol{z}_{6i_2,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}) \end{cases} \tag{31}$$

计算 k 时刻量测的一步预测值 $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$:

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \mathrm{E}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)|\boldsymbol{Z}_{k-1}] = \\ &w_0\boldsymbol{z}_{00,k|k-1} + w_1\sum_{i_1=1}^{n}(\boldsymbol{z}_{1i_1,k|k-1} + \boldsymbol{z}_{2i_1,k|k-1}) + \\ &w_2\sum_{i_2=1}^{n(n-1)/2}(\boldsymbol{z}_{3i_2,k|k-1} + \boldsymbol{z}_{4i_2,k|k-1} + \boldsymbol{z}_{5i_2,k|k-1} + \\ &\boldsymbol{z}_{6i_2,k|k-1}) \end{aligned} \tag{32}$$

计算 k 时刻量测的一步预测估计误差协方差阵 $P_{zz,k|k-1}$:

$$\begin{aligned} &P_{\boldsymbol{zz}},\ k|k-1 = \\ &\mathrm{E}[(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\mathbf{Z}_{k-1}] = \\ &w_0\boldsymbol{z}_{00,k|k-1}\boldsymbol{z}_{00,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \\ &w_1\sum_{i_1=1}^{n}(\boldsymbol{z}_{1i_1,k|k-1}\boldsymbol{z}_{1i_1,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{z}_{2i_1,k|k-1}\boldsymbol{z}_{2i_1,k|k-1}^{\mathrm{T}}) + \\ &w_2\sum_{i_2=1}^{n(n-1)/2}(\boldsymbol{z}_{3i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{3i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \\ &\boldsymbol{z}_{4i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{4i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{z}_{5i_2,k|k-1}\times \\ &\boldsymbol{z}_{5i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{z}_{6i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{6i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}}) - \\ &\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + R_k \end{aligned} \tag{33}$$

计算 k 时刻状态与量测的互相关协方差矩阵:

$$\begin{aligned} &P_{\boldsymbol{xz},\,k|k-1} = \\ &\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}|\mathbf{Z}_{k-1}] = \\ &w_0\boldsymbol{\chi}_{00,k|k-1}\boldsymbol{z}_{00,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \\ &w_1\sum_{i_1=1}^{n}(\boldsymbol{\chi}_{1i_1,k|k-1}\boldsymbol{z}_{1i_1,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \\ &\boldsymbol{\chi}_{2i_1,k|k-1}\boldsymbol{z}_{2i_1,k|k-1}^{\mathrm{T}}) + \\ &w_2\sum_{i_2=1}^{n(n-1)/2}(\boldsymbol{\chi}_{3i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{3i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \\ &\boldsymbol{\chi}_{4i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{4i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}_{5i_2,k|k-1}\times \\ &\boldsymbol{z}_{5i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}_{6i_2,k|k-1}\boldsymbol{z}_{6i_2,k|k-1}^{\mathrm{T}}) - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{34}$$

2) 滤波更新:

计算 k 时刻高阶 UKF 的滤波增益 W_k:

$$W_k = P_{\boldsymbol{xz},\,k|k-1}P_{\boldsymbol{zz},\,k|k-1}^{-1} \tag{35}$$

计算 k 时刻高阶 UKF 的状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + W_k(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}) \tag{36}$$

计算 k 时刻高阶 UKF 的状态估计误差协方差矩阵 $P_{k|k}$:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_kP_{\boldsymbol{zz},\,k|k-1}W_k^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

将第 3.2 节中自由参数 κ 的选取策略应用到高阶 UKF 中, 在系统维数为二维或三维条件下, 得到的高阶 UKF 将具有比五阶 UKF 和五阶 CKF 更加优越的性能.

3.4 高阶 UKF 稳定性讨论

高阶 UKF 稳定性是其实用性的关键指标之一. 由于高阶 UKF 的性能在很大程度上取决于高阶 UT 变换的性能, 所以只有保证高阶 UT 变换的稳定性, 才有可能使高阶 UKF 稳定. 文献 [1] 提出采用权值的绝对值之和作为衡量积分公式 (UT 变换也是一种积分公式) 数值稳定性的指标, 如果 $\sum|w_i| = 1$, 那么数值积分公式是完全稳定的; 如果 $\sum|w_i| \gg 1$, 那么这种积分公式会引入很大的舍入误差, 严重时出现数值不稳定. 由于高阶 UT 变换中所有 Sigma 点的权值之和为 1, 因此, 当所有权值都大于等于零时, 即 $w_i \geq 0$ $(i = 0, 1, 2)$, 此时, $\sum|w_i| = 1$ 恒成立, 那么高阶 UT 变换是完全稳定的. 下面将针对不同的系统维数具体分析本算法的稳定性. 1) $n \leq 3$ 时, 高阶 UT 变换稳定性. 由式 (13) 和 (14) 可以知道, 当系统维数 $n \leq 3$ 时, 此时只有 w_0 可能会小于 0, 并且 w_0 的正负完全取决于自由参数 κ 的选取. 当系统维数 $n = 1$,

$n=2$ 和 $n=3$ 时, 由式 (13) 可以知道此时的权值 w_0 与 $J=-2n^2+(4-2n)\kappa^2+(4\kappa+4)n$ 同号, 当 $n=1$ 时, $J=2(\kappa+1)^2\geq 0$; 当 $n=2$ 时, $J=8\kappa$, 按照第 3.2 节 κ 值的选取策略, 此时 $\kappa=0.835$, 从而 $J>0$; 当 $n=3$ 时, $J=-2\kappa^2+12\kappa-6$, 同样按照第 3.2 节 κ 值的选取策略, 此时 $\kappa=1.417$, 从而 $J>0$. 因此, 当 $n\leq 3$ 时, 按照第 3.2 节 κ 值的选取策略, 所有权值满足 $w_i\geq 0$ $(i=0,\ 1,\ 2)$, 因此, 高阶 UT 变换是完全稳定的. 2) $n=4$ 时, 高阶 UT 变换稳定性. 由式 (13) 和 (14) 可以知道, 当系统维数 $n=4$ 时, 所有权值满足 $w_i\geq 0$ $(i=0,\ 1,\ 2)$, 因此, 高阶 UT 变换是完全稳定的. 3) $n\geq 5$ 时, 高阶 UT 变换稳定性. 按照第 3.2 节 κ 值的选取策略, 高阶 UT 变换与五阶 CT 变换等价. 依据文献 [9] 中的论述, 五阶 CT 变换在 $n\geq 5$ 时是稳定的, 从而此时的高阶 UT 变换也是稳定的.

综上所述, 依据第 3.2 节给出的 κ 值最优选取策略, 能保证高阶 UT 变换在任意维数应用中都是数值稳定的. 实际应用中, 高阶 UT 变换的稳定并不能完全保证高阶 UKF 算法的稳定. 文献 [9] 指出当系统包含强非线性或大的不确定性 (即大的系统噪声) 时, 二阶 UKF 的滤波性能会大大地下降, 严重时甚至会出现滤波发散, 同样高阶 UKF 也会出现类似的情况, 此时可以通过适当地增大系统噪声方差矩阵来提高高阶 UKF 滤波稳定性[15].

4　仿真

为了验证本文提出的高阶 UKF 方法的正确性和优越性, 我们采用与文献 [1, 14, 16−17] 相同的纯方位跟踪模型和弹道目标再入模型仿真.

4.1　纯方位跟踪模型仿真

纯方位跟踪模型为二维非线性模型, 其离散模型如下[16]:

$$\boldsymbol{x}_k=\begin{pmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{n}_{k-1}\tag{38}$$

$$\boldsymbol{z}_k=\tan^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{2,k}-\sin(k)}{\boldsymbol{x}_{1,k}-\cos(k)}\right)+\boldsymbol{v}_k\tag{39}$$

其中状态 $\boldsymbol{x}_k=[\boldsymbol{x}_{1,k}\quad \boldsymbol{x}_{2,k}]^{\rm T}=[s\quad t]^{\rm T}$, 表示 s-t 平面内 (笛卡尔坐标系) 的位置, 系统噪声 $\boldsymbol{n}_k\sim {\rm N}(\boldsymbol{0},Q_k)$, $Q_k=\begin{pmatrix}0.1 & 0.05\\ 0.05 & 0.1\end{pmatrix}$, 观测噪声 $\boldsymbol{v}_k\sim {\rm N}(\boldsymbol{0},R_k)$, $R_k=0.025$. 初始状态真实值 $\boldsymbol{x}_0=[20\quad 5]^{\rm T}$, 初始协方差阵 $P_{0|0}=[0.1\ 0;0\ 0.1]$. 与文献 [16] 相同, 仿真过程中采用如下定义的均方误差性能指标, 比较各种滤波方法的性能:

$${\rm MSE}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x}_{i,k}^n-\boldsymbol{x}_{i,k|k}^n)^2,\qquad i=1,2\tag{40}$$

其中, N 为 Monte Carlo 仿真次数.

仿真时间 100 秒, 在相同初始条件下采用二阶 UKF $(\kappa=1)$、三阶 CKF、本文提出的高阶 UKF $(\kappa=0.835)$、五阶 UKF、五阶 CKF 分别进行 250 次 Monte Carlo 仿真. 仿真结果如下:

从图 3 和图 4 的状态跟踪曲线可以知道, 二阶 UKF (图中点线) $(\kappa=1)$ 和三阶 CKF (图中实线) 在 24 s 后对真实状态 (图中星号线) 的跟踪性能变差, 但二阶 UKF $(\kappa=1)$ 的跟踪性能优于三阶 CKF. 整个过程中五阶 CKF (图中加号线) 和五阶 UKF (图中点划线) 都能较好地跟踪上真实的状态, 但它们的跟踪性能都不如本文提出的高阶 UKF $(\kappa=0.835)$ (图中虚线).

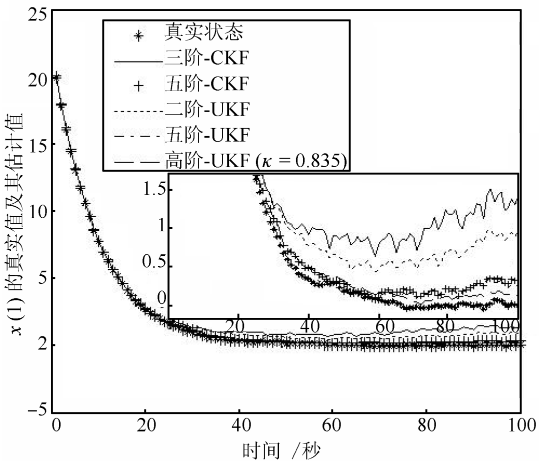

图 3　位置状态 $x(1)$ 的估计

Fig. 3　Estimates of position state $x(1)$

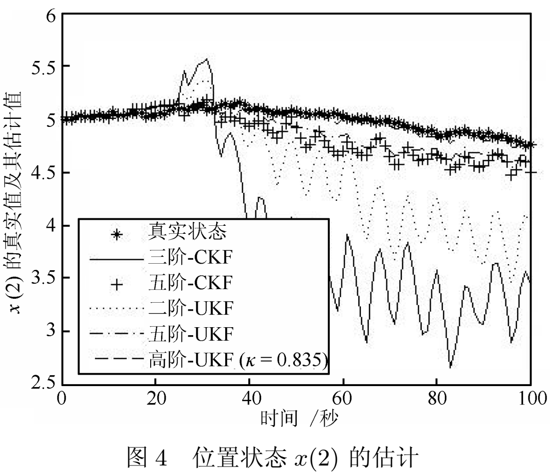

图 4　位置状态 $x(2)$ 的估计

Fig. 4　Estimates of position state $x(2)$

从图 5 和图 6 的状态估计的均方误差曲线可以知道, 二阶 UKF (图中点线) ($\kappa=1$) 的精度高于三阶 CKF (图中实线), 五阶 CKF (图中中等粗的实线) 和五阶 UKF (图中中等粗的点线) 的精度都高于二阶 UKF ($\kappa=1$), 但是这些滤波方法中本文提出的高阶 UKF ($\kappa=0.835$) (图中最粗的实线) 精度最高. 上述结论用符号表示如下:

三阶 CKF< 二阶 UKF< 五阶 CKF 和五阶 UKF< 高阶 UKF ($\kappa=0.835$)

理论上, 在二维情况下, 二阶 UT 变换 ($\kappa=1$) 计算的均值能部分地精确到四阶, 三阶 CT 变换即二阶 UT 变换 ($\kappa=0$) 的均值计算精度为三阶, 五阶 UT 变换和五阶 CT 变换的均值计算精度为五阶, 而本文的高阶 UT 变换在 $\kappa=0.835$ 时计算的均值能部分地精确到六阶. 由于 UKF (CKF) 的精度取决于 UT (CT) 变换的精度, 因此在二维情况下, 本文所提出的高阶 UKF ($\kappa=0.835$) 精度高于五阶 CKF 和五阶 UKF, 同时五阶 CKF 和五阶 UKF 的精度都高于二阶 UKF ($\kappa=1$), 二阶 UKF ($\kappa=1$) 的精度高于三阶 CKF. 仿真结果验证了上述理论分析的正确性, 也体现了本文提出的高阶 UKF 算法的优越性.

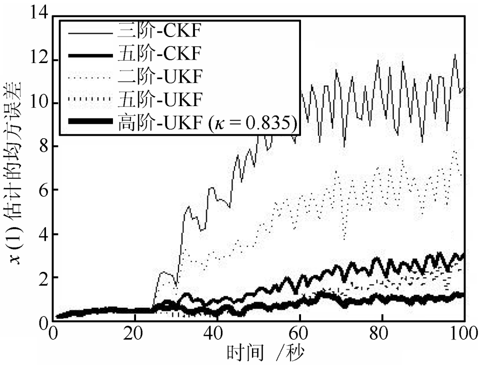

图 5 位置状态 $x(1)$ 的均方误差

Fig. 5 Mean square error of position state $x(1)$

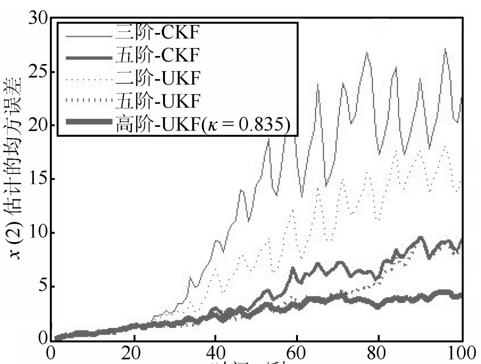

图 6 位置状态 $x(2)$ 的均方误差

Fig. 6 Mean square error of position state $x(2)$

4.2 弹道目标再入模型仿真

弹道目标再入模型为三阶非线性系统, 其目标连续时间动力学方程为[1, 14, 17]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\mathrm{e}^{-\gamma x_1(t)} x_2^2(t) x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

主要目的是对从高处以很快速度进入大气层的载体的位置 x_1、速度 x_2 和弹道常数 x_3 进行估计. 常数 γ 表示大气密度和高度间的关系. 载体的位置通过雷达测定, 它们之间的关系为

$$y_k = \sqrt{M^2 + (\boldsymbol{x}_{1,k} - H)^2} + v_k \tag{42}$$

其中, H 为雷达高度, M 为其与载体之间的水平距离. $\boldsymbol{v}_k \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, R_k)$. 雷达每 1 秒测量一次间距.

为了消除系统强非线性的影响, 通常在两次观测之间使用 64 次四阶 Runge-Kutta 方法对式 (41) 进行积分[1, 14, 17]. 仿真过程中, 所有的滤波器都以小步长 (ft) 在每个点处进行预测, 并在观测量到来之前计算均值和协方差矩阵. 系统仿真参数如下:

$$\gamma = 5\times10^{-5}, H = 10^5\,\mathrm{ft}, M = 10^5\,\mathrm{ft}, R_\mathrm{k} = 10^4\,\mathrm{ft}^2$$

系统真实状态初值 $\boldsymbol{x}_0 = [3{\times}10^5\ 2{\times}10^4\ 10^{-3}]^\mathrm{T}$, 仿真中滤波初始值设为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0} = [3\times10^5\ 2\times10^4\ 3\times10^{-5}]^\mathrm{T}$, 协方差矩阵 $P_{0|0} = \mathrm{diag}\{10^6\ 4\times10^6\ 10^{-4}\}$. 与文献 [1, 14, 17] 相同, 仿真中采用如下定义的平均绝对值误差比较各种滤波方法:

$$\lambda(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\boldsymbol{x}_k^n - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^n| \tag{43}$$

其中, N 为 Monte Carlo 次数.

仿真时间 60 秒, 在相同初始条件下采用二阶 UKF ($\kappa=0$) (此时与三阶 CKF 等价)、高阶 UKF ($\kappa=1.417$)、五阶 UKF、五阶 CKF 分别进行 250 次 Monte Carlo 仿真. 仿真结果如下:

从图 7～图 9 可以知道, 在三维情况下, 五阶 CKF (图中点线) 和五阶 UKF (图中粗实线) 的精度几乎一样, 而且五阶 CKF 和五阶 UKF 的精度高于二阶 UKF ($\kappa=0$) (图中实线), 但是这些滤波方法中本文提出的高阶 UKF ($\kappa=1.417$) (图中粗点线) 精度最高. 上述结论用符号表示如下:

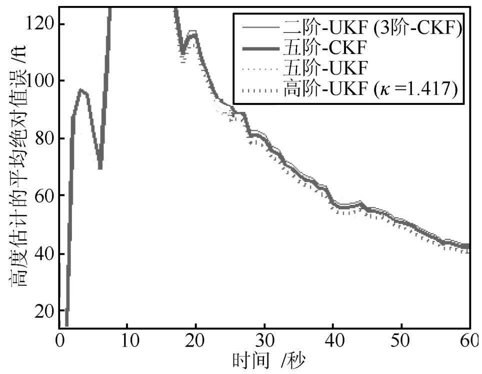

图 7　位置的平均绝对值误差

Fig. 7　Averaged absolute error of position

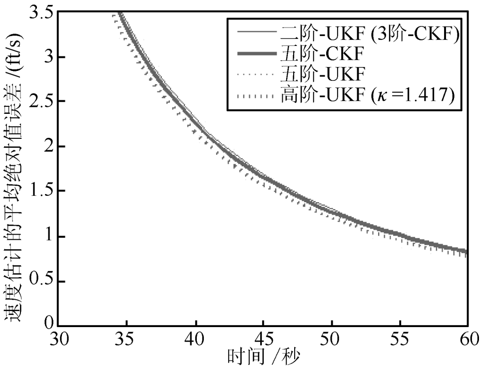

图 8　速度的平均绝对值误差

Fig. 8　Averaged absolute error of velocity

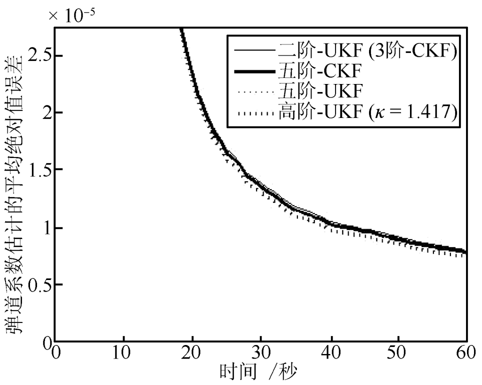

图 9　弹道系数的平均绝对值误差

Fig. 9　Averaged absolute error of ballistic coefficient

三阶 CKF $=$ 二阶 UKF $<$ 五阶 CKF 和五阶 UKF $<$ 高阶 UKF ($\kappa = 1.417$)

理论上, 在三维情况下, 二阶 UT 变换 ($\kappa = 0$) 与三阶 CT 变换是等价的, 它们计算的均值都能部分地精确到四阶, 五阶 UT 变换和五阶 CT 变换的均值计算精度为五阶, 而本文的高阶 UT 变换在 $\kappa = 1.417$ 时, 计算的均值能部分地精确到六阶. 由于 UKF (CKF) 的精度取决于 UT (CT) 变换的精度, 因此在三维情况下, 本文的高阶 UKF ($\kappa = 1.417$) 精度高于五阶 CKF 和五阶 UKF, 同时五阶 CKF 和五阶 UKF 的精度都高于二阶 UKF ($\kappa = 0$) 或三阶 CKF. 仿真结果验证了上述理论分析的正确性, 也体现了本文提出的高阶 UKF 算法的优越性.

5　结论

本文在五阶 CT 变换的基础上, 通过引入一个自由参数 κ, 得到了高阶 UT 变换的解析解, 进而获得了高阶 UKF 方法. 在高斯假设下, 分析并证明了二维和三维系统可以通过选取合适的 κ 值来匹配随机向量的六阶主矩, 从而提高 UKF 精度. 仿真结果表明, 对于二维和三维系统分别选取 $\kappa = 0.835$ 和 $\kappa = 1.417$, 可以获得比五阶 UKF 和五阶 CKF 更高的滤波精度, 而对于一维系统和三维以上的系统从数值稳定性的角度来讲应该选取 $\kappa = 2$. 本文的分析为高阶 UKF 的实际应用提供了理论依据.

References

1 Wu Y X, Hu D W, Wu M P, Hu X P. A numerical-integration perspective on Gaussian filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(8): 2910−2921

2 Julier S J, Uhlman J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 477−482

3 Julier S J, Uhlman J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, **92**(3): 401−422

4 Lefebvre T, Bruyninckx H, de Schuller J. Comment on "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" [and author's reply]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(8): 1406−1409

5 Zhao Lin, Wang Xiao-Xu, Sun Ming, Ding Ji-Cheng, Yan Chao. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 1007−1019
(赵琳, 王小旭, 孙明, 丁继成, 闫超. 基于极大后验估计和指数加权的自适应 UKF 滤波算法. 自动化学报, 2010, **36**(7): 1007−1019)

6 Sun Yao, Zhang Qiang, Wan Lei. Small autonomous underwater vehicle navigation system based on adaptive UKF algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **37**(3): 342−353
(孙尧, 张强, 万磊. 基于自适应 UKF 算法的小型水下机器人导航系统. 自动化学报, 2010, **37**(3): 342−353)

7 Wang Lu, Li Guang-Chun, Qiao Xiang-Wei, Wang Zhao-Long, Ma Tao. An adaptive UKF algorithm based on maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1200−1210
(王璐, 李光春, 乔相伟, 王兆龙, 马涛. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法. 自动化学报, 2012, **38**(7): 1200−1210)

8 Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254−1269

9 Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, **49**(2): 510−518

10 Julier S J, Uhlman J K. The scaled unscented transformation. In: Proceedings of the 2000 American Control Conference. Anchorage, AK, USA: IEEE, 2002, **6**: 4555−4559

11 Chang L B, Hu B Q, Li A, Qin F J. Transformed unscented Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 252−257

12 Julier S J, Uhlman J K. A consistent, debiased method for converting between polar and Cartesian coordinate systems. In: Proceedings of Acquisition, Tracking and Pointing XI. Orlando, 1997, **3086**. 110−121

13 Lerner U N. Hybrid Bayesian Networks for Reasoning about Complex Systems [Ph. D. dissertation], Stanford University, USA, 2002

14 Ito K, Xiong K Q. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(5): 910−927

15 Xiong K, Zhang H Y, Chan C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering. *Automatica*, 2006, **42**(2): 261−270

16 Dunik J, Simandl M, Straka O. Unscented Kalman filter: aspects and adaptive setting of scaling parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2411−2416

17 Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 2000, **36**(11): 1627−1638

张勇刚 哈尔滨工程大学自动化学院副教授. 2007 年获得英国 Cardiff 大学博士学位. 主要研究方向为滤波算法, 组合导航.
E-mail: zhangyg@hrbeu.edu.cn
(**ZHANG Yong-Gang** Associate professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. He received his Ph. D. degree from Cardiff University, UK in 2007. His research interest covers filtering algorithms and integrated navigation.)

黄玉龙 哈尔滨工程大学自动化学院硕士研究生. 2012 年获得哈尔滨工程大学学士学位. 主要研究方向为滤波算法, 组合导航. 本文通信作者.
E-mail: heuedu@163.com
(**HUANG Yu-Long** Master student at the College of Automation, Harbin Engineering University. He received his bachelor degree from Harbin Engineering University in 2012. His research interest covers filtering algorithm and integrated navigation. Corresponding author of this paper.)

武哲民 哈尔滨工程大学自动化学院硕士研究生. 2012 年获得哈尔滨工程大学学士学位. 主要研究方向为滤波算法, 组合导航.
E-mail: wuzhemin@hrbeu.edu.cn
(**WU Zhe-Min** Master student at the College of Automation, Harbin Engineering University. She received her bachelor degree from Harbin Engineering University in 2012. Her research interest covers filtering algorithm and integrated navigation.)

李 宁 哈尔滨工程大学自动化学院助理研究员. 2009 年获得哈尔滨工程大学博士学位. 主要研究方向为自适应滤波和组合导航.
E-mail: ningli@hrbeu.edu.cn
(**LI Ning** Assistant professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. She received her Ph. D degree from Harbin Engineering University in 2009. Her research interest covers adaptive filtering and integrated navigation.)