混杂系统的一致输入输出对状态稳定性

楼旭阳 [1,2] 叶 倩 [3] 崔宝同 [1,2]

摘 要 混杂系统的输入输出对状态稳定性是混杂控制系统领域极富挑战性的课题之一. 为了观测混杂系统的状态, 本文提出了一类混杂系统的一致输入输出对状态稳定的充分条件, 分析了混杂系统的一致输入输出对状态稳定性、光滑 Lyapunov 函数存在性和状态模估计器存在性三者之间的关系. 借助状态模估计器将混杂系统化为受扰动系统, 获得了受扰动系统一致输入输出对状态稳定性的结果, 并进一步证明了混杂系统的一致输入输出对状态稳定性.

关键词 混杂系统, 输入输出对状态稳定性, 光滑 Lyapunov 函数, 状态模估计器

引用格式 楼旭阳, 叶倩, 崔宝同. 混杂系统的一致输入输出对状态稳定性. 自动化学报, 2014, **40**(3): 516−521

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00516

Uniform Input-output-to-state Stability of Hybrid Systems

LOU Xu-Yang[1,2] YE Qian[3] CUI Bao-Tong[1,2]

Abstract The input-output-to-state stability of hybrid systems is one of the challenging topics in the field of hybrid control systems. To observe the states of hybrid systems, we propose sufficient conditions for the uniform input-output-to-state stability of a class of hybrid systems, and analyze the relationships among the uniform input-output-to-state stability of hybrid systems, the existence of the smooth Lyapunov function, and the existence of the state-norm estimator. With the help of the state-norm estimator, the hybrid systems are transformed into disturbed systems. Moreover, we obtain the uniform input-output-to-state stability conclusions of the disturbed systems, and then prove the uniform input-output-to-state stability of the hybrid systems.

Key words Hybrid systems, input-output-to-state stability, smooth Lyapunov function, state-norm estimator

Citation Lou Xu-Yang, Ye Qian, Cui Bao-Tong. Uniform input-output-to-state stability of hybrid systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 516−521

近年来, 输入对状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS) 已经成为了一种非常流行的非线性系统分析和设计方法. 它最初是由 Sontag 教授于 1989 年提出的一种采用状态空间方法描述受迫系统 (存在外加输入的系统) 稳定性的新概念[1]. 他的工作受到许多同行的关注, 从而成为非线性控制系统稳定性研究的一项重要内容. 近 20 多年, ISS 在控制系统分析中的作用越来越受重视. 许多线性或非线性系统的 ISS 问题成为自动控制领域诸多学者们共同的研究热点. 于是, 由 ISS 衍生出来的其它相关概念, 如输出对状态稳定 (Output-to-state stability, OSS)、输入输出对状态稳定性 (Input-output-to-state stability, IOSS) 等[2−11], 逐渐开始形成了一定的理论框架. Mancilla-Aguilar 等[2] 探讨了一类非线性切换系统的不变集的渐近稳定性, 研究了平衡点的一致输入对状态稳定性和一致积分 ISS 的共同 Lyapunov 函数的存在性. Arcak 和 Teel 分析了由一个线性模块和一个非线性单元所构成的 Lurie 系统的 ISS, 所得结果有助于系统执行器非线性和干扰的鲁棒性分析[3]. 赵军等[4] 利用比较函数的方法给出了切换系统 ISS 的一个充分条件. 文献 [5] 利用动态规划方法描述了最小 ISS 增益和暂态界限特征, 并建立了 ISS 与非线性耗散系统理论优化问题之间的联系. Liberzon 等[6] 利用 Lyapunov 函数法和时间采样法两种控制策略, 实现了具有量化状态反馈的线性系统的 ISS. Jayawardhana 等证明了一类微分包含系统的 ISS, 并将结果应用到具有时滞的量化反馈系统中[7]. 文献 [8] 给出了一些 OSS 的 Lyapunov 特性, 建立了一类 OSS 且全局可观测连续系统的全局收敛观测器. Krichman 等[9] 提出了

收稿日期 2012-11-12 录用日期 2013-03-11
Manuscript received November 12, 2012; accepted March 11, 2013
国家自然科学基金 (61174021, 61104155), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP51322B), 高等学校学科创新引智计划 (B12018) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174021, 61104155), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP51322B), and the 111 Project (B12018)
本文责任编委 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang
1. 江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室 无锡 214122 2. 江南大学物联网工程学院 无锡 214122 3. 无锡职业技术学院 无锡 214121
1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122 2. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122 3. Wuxi Institute of Technology, Wuxi 214121

IOSS 概念, 深入研究了非线性系统 IOSS 的 Lyapunov 特征, 建立了系统 IOSS 与光滑 Lyapunov 函数之间的等价关系. 林相泽等[10] 提出了一类非线性切换系统 (特殊的混杂系统) 一致输入输出对状态稳定的充分条件. Cai 等[11] 提出了离散非线性系统一致输出对状态稳定性 (Uniform input-output-to-state stability, UOSS) 和一致输入输出对状态稳定性 (Uniform output-to-state stability, UIOSS) 的 Lyapunov 特征, 给出了离散系统 UIOSS、光滑 Lyapunov 函数存在性和状态模估计器存在性三者之间的等价关系.

上述研究主要侧重于连续系统、离散系统或特殊混杂系统, 而对于一般混杂系统框架下的 ISS 工作尚未深入展开. 文献 [12−15] 在混杂系统框架下 ISS 的研究工作中获得了重要成果. Hespanha 等[14] 针对脉冲系统提出了 ISS 和积分 ISS 概念, 并给出了一系列基于 Lyapunov 函数的 ISS 充分条件, 分别探讨了连续动态部分 ISS 或脉冲动态部分 ISS 的情形, 获得了基于平均滞留时间 (Average dwell-time) 和逆平均滞留时间的相关结果. 文献 [16] 提出了混杂动态系统 OSS 的 Lyapunov 特征和渐近特征, 着重指出了全局可检测 (非 UOSS) 的混杂系统存在一个光滑输出对状态稳定性 Lyapunov 函数.

尽管针对 ISS 及其相关工作的研究已经取得了众多阶段性结果, 但是对于一般混杂系统的 IOSS 研究尚未见报道. 本文将分析一般混杂系统的输入–输出特性, 建立 UIOSS 的逆 Lyapunov 定理, 研究 UIOSS Lyapunov 函数与指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数之间的关系, 最后借助状态模估计器给出混杂系统 UIOSS 的判定准则.

1　混杂系统

一般地, 一个带输出的混杂系统 $\mathcal{H}$ 可以由五元组 $(f,\mathcal{C},g,\mathcal{D},h)$ 来描述:

$$\mathcal{H}=\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\mathcal{C}\\ \boldsymbol{x}^{+}=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\mathcal{D}\\ \boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x}), & \text{其他}\end{cases}\tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\boldsymbol{u}\in U\subset\mathbf{R}^m$ 为系统控制输入; $f:\mathcal{C}\to\mathbf{R}^n$ 表示发生连续事件 (即当状态属于流集 $\mathcal{C}\subset\mathbf{R}^n\times U$ 时的事件) 的函数; $g:\mathcal{D}\to\mathbf{R}^n$ 表示发生离散事件 (即当状态属于跃集 $\mathcal{D}\subset\mathbf{R}^n\times U$ 时的事件) 的函数 $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ 是输出映射, 定义了系统的输出. $\boldsymbol{x}^{+}$ 为状态跳跃后的值. 状态 $\boldsymbol{x}$ 可能既包含 "连续" 变量又包含 "离散" 变量, 后者通常表示整数形式的逻辑模式.

为简便起见, 具有形式 (1) 的混杂系统用 $\mathcal{H}=(f,\mathcal{C},g,\mathcal{D},h)$ 表示[15]. 混杂系统 $\mathcal{H}$ 的解是由定义在混杂时域上的混杂弧和混杂输入给出, 其中时域参数可表示为 (t,j), t 表示连续事件发生的常规时间, j 表示离散事件发生的跳跃次数.

给定一个子集 $\mathcal{E}\subset\mathbf{R}_{\geq0}\times\mathbf{Z}_{\geq0}$, 若对有限的时间序列 $0=t_0\leq t_1\leq\cdots\leq t_J$ 有 $\mathcal{E}=\bigcup_{j=0}^{J-1}([t_j,t_{j+1}],j)$, 则称 $\mathcal{E}$ 是一个紧致混杂时域. 若对于所有 $(T,J)\in\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\cap([0,T]\times\{0,1,\cdots,J\})$ 是一个紧致混杂时域, 则称 $\mathcal{E}$ 是一个混杂时域. 设 $\mathrm{dom}\ \boldsymbol{x}$ 表示混杂时域, 如果对于任一给定 $j\in\mathbf{Z}_{\geq0}$, 函数 $\boldsymbol{x}:t\mapsto\boldsymbol{x}(t,j)$ 是一个局部绝对连续函数, 则称函数 $\boldsymbol{x}:\mathrm{dom}\ \boldsymbol{x}\longrightarrow\mathbf{R}^n$ 是一个混杂弧. 设 $\mathrm{dom}\ \boldsymbol{u}$ 是混杂时域, 如果对于任一给定 $j\in\mathbf{Z}_{\geq0}$, 函数 $\boldsymbol{u}:t\mapsto\boldsymbol{u}(t,j)$ 是一个 Lebesgue 可测且在区间 $\{t:(t,j)\in\mathrm{dom}\ \boldsymbol{u}\}$ 上局部本质有界函数, 则称函数 $\boldsymbol{u}:\mathrm{dom}\ \boldsymbol{u}\to U$ 是一个混杂输入. 鉴于后续证明需要, 下面定义几类函数. 如果连续函数 $\alpha:\mathbf{R}_{\geq0}\to\mathbf{R}_{\geq0}$ 严格递增, 且 $\alpha(0)=0$, 则 α 属于 $\mathcal{K}$ 类函数. 进一步地, 若 α 是 $\mathcal{K}$ 类函数且当 $r\to\infty$ 时, $\alpha(r)\to\infty$, 则 α 属于 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数. 对于连续函数 $\beta:\mathbf{R}_{\geq0}\times\mathbf{R}_{\geq0}\to\mathbf{R}_{\geq0}$, 如果对于每个固定的 s, 映射 $\beta(r,s)$ 都是关于 r 的 $\mathcal{K}$ 类函数, 并且对于每个固定的 r, 映射 $\beta(r,s)$ 是 s 的递减函数, 且当 $s\to\infty$ 时 $\beta(r,s)\to0$, 则 β 属于 $\mathcal{KL}$ 类函数.

给定一个混杂输入 $\boldsymbol{u}:\mathrm{dom}\ \boldsymbol{u}\to U$ 和一个初始条件 $\boldsymbol{\zeta}$, 如果下述条件成立, 则称混杂弧 $\boldsymbol{\phi}:\mathrm{dom}\ \boldsymbol{\phi}\to\mathbf{R}^n$ 定义了混杂系统 $\mathcal{H}=(f,\mathcal{C},g,\mathcal{D},h)$ 的解对 $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})$:

S0. $(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u}(0,0))\in\bar{\mathcal{C}}\cup\mathcal{D}$, 且 $\mathrm{dom}\ \boldsymbol{\phi}=\mathrm{dom}\ \boldsymbol{u}$;

S1. 对每个 $j\in\mathbf{Z}_{\geq0}$, $I_j=\{t:(t,j)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})\}$ 存在非空内点 $\mathrm{int}(I_j)$ 且 $(\boldsymbol{\phi}(t,j),\boldsymbol{u}(t,j))\in\mathcal{C},\forall t\in\mathrm{int}(I_j)$, 以及对几乎所有的 $t\in I_j$, 恒有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\phi}(t,j)=f(\boldsymbol{\phi}(t,j),\boldsymbol{u}(t,j))$;

S2. 对任意 $(t,j)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})$, 当 $(t,j+1)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})$, $(\boldsymbol{\phi}(t,j),\boldsymbol{u}(t,j))\in\mathcal{D}$ 时, 有 $\boldsymbol{\phi}(t,j+1)=g(\boldsymbol{\phi}(t,j),\boldsymbol{u}(t,j))$.

设 $\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{R}^n$, $S_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\zeta})$ 表示混杂系统 $\mathcal{H}$ 从 $\boldsymbol{\phi}(0,0)=\boldsymbol{\phi}$ 出发的最大解对 $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})$ 的集合. 给定一个集合 $\mathcal{A}\in\mathbf{R}^n$, 定义 $|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}=\inf_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{A}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. 对于一个解对 $(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})\in S_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\zeta})$, 令 $\boldsymbol{\phi}(t,j,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u})$ 表示在 $(t,j)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{u})$ 时刻的值, 其中 $\boldsymbol{\zeta}$ 表示对应状态的初始条件.

定义 1 (稳定性). 设 $\mathcal{A}\subset\mathbf{R}^n$ 为紧集,

1) 如果对任一 $\varepsilon>0$, 存在正数 $\delta>0$ 使得满足 $|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}}\leq\delta$ 的每个解对 $(\boldsymbol{\phi},0)\in S_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\zeta})$ 有 $|\boldsymbol{\phi}(t,j,\boldsymbol{\zeta},0)|_{\mathcal{A}}\leq\varepsilon,\forall(t,j)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},0)$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 0-输入稳定的;

2) 如果存在正数 $\mu>0$ 使得满足 $|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}}\leq\mu$ 的每个解对 $(\boldsymbol{\phi},0)\in S_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\zeta})$ 是有界的. 进一步地, 当它是完备时满足 $\lim_{(t,j)\in\mathrm{dom}\ (\boldsymbol{\phi},0),t+j\to\infty}|\boldsymbol{\phi}(t,j,\boldsymbol{\zeta},0)|_{\mathcal{A}}=$

0, 则称 $\mathcal{A}$ 是 0-输入吸引的;

3) 如果 $\mathcal{A}$ 是 0-输入稳定且 0-输入吸引的, 则称 $\mathcal{A}$ 是 0-输入渐近稳定的.

假设 1 (混杂基本条件). 对于混杂系统 $\mathcal{H}$, 设其参数 $(f, \mathcal{C}, g, \mathcal{D}, h)$ 满足下列条件:

H1. $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ 是闭集;

H2. 函数 $f : \mathcal{C} \to \mathbf{R}^n, g : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$ 及 $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ 是连续的.

2 光滑 Lyapunov 函数

对于离散时间系统, 文献 [11] 提出了相应的光滑 Lyapunov 函数来证明 UIOSS. 本文在不通过求混杂系统解的情况下, 给出混杂系统一致输入输出对状态稳定的充分性条件. 下面给出后续证明所需要的几个光滑 Lyapunov 函数定义.

定义 2 (一致输入输出对状态稳定 Lyapunov 函数). 如果混杂系统 $\mathcal{H}$ 在紧集 $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ 上存在一个光滑函数 $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, 且存在函数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ 以及 $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}$, 使得函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足如下条件:

1) $\alpha_1(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) \leq V(\boldsymbol{x}) \leq \alpha_2(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$;

2) $\langle V(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\rangle \leq -\alpha_3(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}$;

3) $V(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha_3(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D}$.

则称函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是混杂系统 $\mathcal{H}$ 的 UIOSS Lyapunov 函数.

定义 3 (指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数). 如果混杂系统 $\mathcal{H}$ 在紧集 $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ 上存在一个光滑函数 $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, 且存在函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{K}$ 以及某一常数 $\varepsilon \in (0, 1]$, 使得函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足如下条件:

1) $\alpha_1(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) \leq V(\boldsymbol{x}) \leq \alpha_2(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$;

2) $\langle V(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\rangle \leq -\varepsilon V(\boldsymbol{x}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|),\ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}$;

3) $V(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\varepsilon V(\boldsymbol{x}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|),\ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D}$.

则称函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是混杂系统 $\mathcal{H}$ 的指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数.

3 一致输入输出对状态稳定

本节分析在一定条件下, 混杂系统 UIOSS、存在光滑 Lyapunov 函数和存在状态模估计器三者之间的关系. 并给出混杂系统 UIOSS 的充分条件.

定义 4. 如果对任意的 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^n$, $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u}) \in S_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\zeta})$ 且 $(t, j) \in \mathrm{dom}\,(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{u})$, 存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ 使得:

$$|\boldsymbol{\phi}(t, j, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{u})|_{\mathcal{A}} \leq \max\{\beta(|\boldsymbol{\phi}(0, 0, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{u})|_{\mathcal{A}}, t + j), \gamma_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)}), \gamma_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)})\} \tag{2}$$

则称混杂系统 $\mathcal{H}$ 的紧集 $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^n$ 是 UIOSS 的.

下面给出本文主要结果中需要用到的 3 个引理.

引理 1. 对于混杂系统 $\mathcal{H}$, 下述命题是等价的:

1) 系统 $\mathcal{H}$ 存在 UIOSS Lyapunov 函数;

2) 系统 $\mathcal{H}$ 存在指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数.

证明. 先证 2) $\Rightarrow$ 1). 若系统 $\mathcal{H}$ 存在指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数, 则由定义 3 得, 存在光滑函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\langle \nabla V(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\rangle \leq -\varepsilon V(\boldsymbol{x}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}$$

$$V(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\varepsilon V(\boldsymbol{x}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D}$$

再利用定义 3 中条件 $\alpha_1(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) \leq V(\boldsymbol{x})$ 得:

$$\langle \nabla V(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\rangle \leq -\varepsilon \alpha_1(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}$$

$$V(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\varepsilon \alpha_1(|\boldsymbol{x}|_{\mathcal{A}}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D}$$

在定义 2 中取 $\alpha_3 = \varepsilon \alpha_1$. 由上面两个不等式不难得出定义 2 中的条件 2) 和 3).

再证 1) $\Rightarrow$ 2). 假设系统 $\mathcal{H}$ 存在 UIOSS Lyapunov 函数, 利用定义 2 中的条件 1) $\sim$ 3), 可得:

$$\langle \nabla V(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\rangle \leq -\alpha(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C} \tag{3}$$

$$V(g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})) - V(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|), \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{D} \tag{4}$$

其中, $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$. 定义函数 $W(\boldsymbol{x}) = \rho(V(\boldsymbol{x}))$, 其中函数 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ 具有如下性质:

a) ρ 连续可微且 $\rho \in \mathcal{C}^1$;

b) 函数 $\rho'(\cdot)$ 是非负定非减函数且满足 $\rho'(s)\alpha(s) \geq 2\rho(s),\ \forall s \geq 0$.

下面针对连续事件和离散事件两种情况分别进行讨论.

情况 1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}$

由于函数 W 是正定的, 沿着系统轨迹对时间 t

求导可得:

$$\langle \nabla W(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(\boldsymbol{x}) = \rho'(V(\boldsymbol{x}))V(\boldsymbol{x}) \leq -\rho(V(\boldsymbol{x})) + \rho'(V(\boldsymbol{x}))\left(-\frac{\alpha(V(\boldsymbol{x}))}{2} + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)\right) \tag{5}$$

i) 当 $V(\boldsymbol{x}) \geq \alpha^{-1}(2\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + 2\rho_2(|\boldsymbol{y}|))$ 时,

$$\rho'(V(\boldsymbol{x}))\Big(-\frac{\alpha(V(\boldsymbol{x}))}{2} + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)\Big) \leq 0 \tag{6}$$

于是, 由式 (5) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(\boldsymbol{x}) \leq -\rho(V(\boldsymbol{x})) = -W(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

ii) 当 $V(\boldsymbol{x}) \leq \alpha^{-1}(2\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + 2\rho_2(|\boldsymbol{y}|))$ 时, 有:

$$\rho'(V(\boldsymbol{x}))(\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)) \leq \rho'\Big(\alpha^{-1}(2\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + 2\rho_2(|\boldsymbol{y}|))\Big)(\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|))$$

于是, 存在函数 $\check{\rho}_1, \check{\rho}_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 使得:

$$\rho'(V(\boldsymbol{x}))(\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)) \leq \check{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \check{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|) \tag{8}$$

由式 (5) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(\boldsymbol{x}) \leq -\rho(V(\boldsymbol{x})) + \check{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \check{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|) = -W(\boldsymbol{x}) + \check{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \check{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|) \tag{9}$$

联合式 (7) 和 (9) 估计式 (5) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(\boldsymbol{x}) \leq -W(\boldsymbol{x}) + \check{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \check{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|)$$

情况 2. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in \mathcal{D}$

对任意 $s \geq 0$ 有: $\alpha(s) \leq s$. 不然, 若 $\alpha(s) \geq s$, 根据式 (4) 有:

$$V(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) \leq V(\boldsymbol{x}) - \alpha(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|) \leq \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)$$

当 $\boldsymbol{u} = 0$, $\boldsymbol{y} = 0$ 时,

$$V(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) \leq 0$$

这与函数 V 的正定性相矛盾.

设 Id 表示单位映射. 利用中值定理和 $\rho'(s)\alpha(s) \geq 2\rho(s)$ 可得 $\forall s \geq 0$,

$$2\rho(s) \leq \frac{\rho'(s)\alpha(s)}{2} + \rho(s) \leq \rho\Big(s + \frac{\alpha(s)}{2}\Big) = \rho \circ \Big(\mathrm{Id} + \frac{\alpha}{2}\Big)(s)$$

特别地, 将 $s = (\mathrm{Id} - \frac{\alpha}{2})(r)$ 代入上式有 $\forall r \geq 0$,

$$2\rho \circ (\mathrm{Id} - \frac{\alpha}{2})(r) \leq \rho \circ (\mathrm{Id} + \frac{\alpha}{2})(r) \circ (\mathrm{Id} - \frac{\alpha}{2})(r) \leq \rho(r)$$

再由式 (4) 得:

$$V(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) \leq V(\boldsymbol{x}) - \alpha(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)$$

于是, 任给 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ 和 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^p$, 有:

$$W(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) = \rho(V(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))) \leq \rho\Big((\mathrm{Id} - \alpha)(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)\Big)$$

i) 当 $\alpha(V(\boldsymbol{x})) \geq 2\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + 2\rho_2(|\boldsymbol{y}|)$ 时,

$$\rho((\mathrm{Id} - \alpha)(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)) \leq \rho \circ \Big(\mathrm{Id} - \frac{\alpha}{2}\Big)(V(\boldsymbol{x})) \leq \frac{\rho(V(\boldsymbol{x}))}{2} = \frac{W(\boldsymbol{x})}{2} \tag{10}$$

ii) 当 $\alpha(V(\boldsymbol{x})) \leq 2\rho_1(|\boldsymbol{u}|) + 2\rho_2(|\boldsymbol{y}|)$ 时,

$$\rho((\mathrm{Id} - \alpha)(V(\boldsymbol{x})) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)) \leq \rho(V(\boldsymbol{x}) + \rho_1(|\boldsymbol{u}|) + \rho_2(|\boldsymbol{y}|)) \leq \rho \circ 2(\alpha^{-1} \circ 4\rho_1 + \rho_1)(|\boldsymbol{u}|) + \rho \circ 2(\alpha^{-1} \circ 4\rho_2 + \rho_2)(|\boldsymbol{y}|) \tag{11}$$

定义 $\bar{\rho}_1 = \rho \circ 2(\alpha^{-1} \circ 4\rho_1 + \rho_1)$, $\bar{\rho}_2 = \rho \circ 2(\alpha^{-1} \circ 4\rho_2 + \rho_2)$. 根据函数 $W(\boldsymbol{x})$ 定义以及式 (11) 可得:

$$W(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) - W(\boldsymbol{x}) \leq -\frac{1}{2}W(\boldsymbol{x}) + \bar{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \bar{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|)$$

结合上述两种情况的推导可知, 函数 $W : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ 是系统 $\mathcal{H}$ 的指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数, 即任给 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$, 以及 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^p$,

$$\hat{\alpha}_1(|\boldsymbol{x}|) \leq W(\boldsymbol{x}) \leq \hat{\alpha}_2(|\boldsymbol{x}|)$$

$$\langle \nabla W(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\rangle \leq -W(\boldsymbol{x}) + \tilde{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \tilde{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|)$$

$$W(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})) - W(\boldsymbol{x}) \leq -\frac{1}{2}W(\boldsymbol{x}) + \tilde{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) + \tilde{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|)$$

其中,

$\hat{\alpha}_1 = \rho \circ \alpha_1$, $\hat{\alpha}_2 = \rho \circ \alpha_2$

$\tilde{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|) = \max\{\check{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|), \bar{\rho}_1(|\boldsymbol{u}|)\}$

$\tilde{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|) = \max\{\check{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|), \bar{\rho}_2(|\boldsymbol{y}|)\}$ □

在给出引理 2 之前, 先简单介绍一下状态模估计器. 当系统的状态不完全可测且系统输出是关于

状态的函数时, 状态模估计器对于控制系统设计具有重要作用. 状态模估计器与下述混杂系统有关:

$$\mathcal{H}_o=\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}=f_o(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})=\\ \quad -\varepsilon\boldsymbol{z}+\rho_1(|\boldsymbol{u}|)+\\ \quad \rho_2(|\boldsymbol{y}|),(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{C}_o\\ \boldsymbol{z}^+=g_o(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})=\\ \quad (1-\varepsilon)\boldsymbol{z}+\rho_1(|\boldsymbol{u}|)+\\ \quad \rho_2(|\boldsymbol{y}|),(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{D}_o\end{cases}\tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n_o}$ 是混杂系统 $\mathcal{H}_o$ 的状态, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 和 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^p$ 分别为混杂系统 $\mathcal{H}$ 的输入和输出, $\mathcal{C}_o=\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathbf{R}^{n_o}\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^p:\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x}),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\mathcal{C}\}$, $\mathcal{D}_o=\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathbf{R}^{n_o}\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^p:\boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x}),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\mathcal{D}\}$. 系统 $\mathcal{H}_o$ 的解由 $(\boldsymbol{z},(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}))\in S_{\mathcal{H}_o}(\boldsymbol{\xi})$ 表示.

定义 5. 如果 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})$ 满足下列条件:

1) 存在函数 $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2\in\mathcal{K}$, $\hat{\beta}_1\in\mathcal{KL}$ 使得 $\forall\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n_o}$, $\forall(t,j)\in\mathrm{dom}\,(\boldsymbol{z},(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}))$, 系统的解对 $(\boldsymbol{z},(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}))$ 满足

$$|\psi(\boldsymbol{z}(t,j,\boldsymbol{\xi},(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})),\boldsymbol{y}(t,j))|\le\hat{\beta}_1(|\boldsymbol{\xi}|,t+j)+\hat{\rho}_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)})+\hat{\rho}_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)})\tag{13}$$

式中, $\psi:\mathbf{R}^{n_o}\times\mathbf{R}^p\longrightarrow\mathbf{R}$.

2) 存在函数 $\hat{\rho}_3\in\mathcal{K}$, $\hat{\beta}_2\in\mathcal{KL}$ 使得 $\forall(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n_o}$, 系统 $\mathcal{H},\mathcal{H}_o$ 在输入 $\boldsymbol{u}$ 下的联合解 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ 满足

$$|\boldsymbol{x}(t,j,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u})|_{\mathcal{A}}\le\hat{\beta}_2(|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}}+|\boldsymbol{\xi}|,t+j)+\hat{\rho}_3\Big(|\psi(\boldsymbol{z}(t,j,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}),h(\boldsymbol{x}(t,j,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u})))|\Big)\tag{14}$$

则称 $(\mathcal{H}_o,\psi)$ 为混杂系统 $\mathcal{H}$ 在紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbf{R}^n$ 上的状态模估计器.

引理 2. 对于混杂系统 $\mathcal{H}$, 如果系统 $\mathcal{H}$ 存在指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数, 则系统 $\mathcal{H}$ 存在状态模估计器.

证明. 设函数 V 是系统 $\mathcal{H}$ 满足定义 3 中条件的指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数, 条件中函数 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{K}_\infty$, $\rho_1,\rho_2\in\mathcal{K}$, 常数 $\varepsilon\in(0,1]$. 不失一般性, 令 $s\le\alpha_2(s)$, $\forall s\ge0$. 由于系统 $\mathcal{H}_o$ 是关于输入 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})$ 渐近稳定的线性系统, 所以系统 $\mathcal{H}_o$ 是输入对状态稳定的, 从而不等式 (13) 显然成立. 任取系统 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_o$ 的初始状态 $\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2$. 考虑 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_o$ 组合系统的轨迹 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ 以及引理 2 中已知条件, 当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{C}$ 且 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{C}_o$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z})\le-\varepsilon(V(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z})\tag{15}$$

再利用 $\forall s\ge0$, $s\le\alpha_2(s)$. 因而有:

$$V(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{z}+\mathrm{e}^{-\varepsilon t}(V(\boldsymbol{\xi}_1)-\boldsymbol{\xi}_2)\le|\boldsymbol{z}|+2\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\alpha_2(|\boldsymbol{\xi}_1|+|\boldsymbol{\xi}_2|)$$

当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{D}$ 且 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})\in\mathcal{D}_o$ 时,

$$V(\boldsymbol{x}^+)-\boldsymbol{z}^+=V(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))-\Big((1-\varepsilon)\boldsymbol{z}+\rho_1(|\boldsymbol{u}|)+\rho_2(|\boldsymbol{y}|)\Big)\le(1-\varepsilon)(V(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z})\tag{16}$$

进一步地, 通过递推演绎分析, 以及利用 $\forall s\ge0$, $s\le\alpha_2(s)$ 可得:

$$V(\boldsymbol{x})\le\boldsymbol{z}+(1-\varepsilon)^j(V(\boldsymbol{\xi}_1)-\boldsymbol{\xi}_2)\le|\boldsymbol{z}|+2(1-\varepsilon)^j\alpha_2(|\boldsymbol{\xi}_1|+|\boldsymbol{\xi}_2|),\quad j\ge\mathbf{Z}_{\ge0}$$

于是, 令 $\hat{\rho}_3(s)=\alpha_1^{-1}(2(s))$, $\hat{\beta}_2(s,t,j)=\max\{\alpha_1^{-1}\circ4\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\alpha_2(s),\alpha_1^{-1}\circ4(1-\varepsilon)^j\alpha_2(s)\}$, 可得式 (14). □

引理 3. 对于混杂系统 $\mathcal{H}$, 如果 $\mathcal{H}$ 存在状态模估计器, 则混杂系统 $\mathcal{H}$ 是 UIOSS.

证明. 设系统 $\mathcal{H}_o$ 和函数 ψ 定义了混杂系统 $\mathcal{H}$ 在紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbf{R}^n$ 上的状态模估计器. 令 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 为混杂系统 $\mathcal{H}$ 的解, $(\boldsymbol{z},(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}))$ 为混杂系统 $\mathcal{H}_o$ 的解, $\forall\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y}(t,j)=h(\boldsymbol{x}(t,j,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u})$. 当系统 $\mathcal{H}_o$ 的初始状态 $\boldsymbol{\xi}=0$ 时, 由式 (13) 得:

$$|\psi(\boldsymbol{z}(t,j,0,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})),\boldsymbol{y}(t,j))|\le\hat{\rho}_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)})+\hat{\rho}_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)})$$

联合上式和式 (14) 可知:

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{x}(t,j,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u})|\le\\ &\hat{\beta}_2(|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}},t,j)+\hat{\rho}_3(|\psi(\boldsymbol{z}(t,j,0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}(t,j))|)\le\\ &\hat{\beta}_2(|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}},t,j)+\hat{\rho}_3(\hat{\rho}_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)})+\hat{\rho}_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)}))\le\\ &\max\Big\{2\hat{\beta}_2(|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}},t,j),2\hat{\rho}_3(2\hat{\rho}_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)})),\\ &\qquad 2\hat{\rho}_3(2\hat{\rho}_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)}))\Big\}=\\ &\max\Big(\beta(|\boldsymbol{\zeta}|_{\mathcal{A}},t,j),\gamma_1(\|\boldsymbol{u}\|_{(t,j)}),\gamma_2(\|\boldsymbol{y}\|_{(t,j)})\Big\}\end{aligned}$$

其中, $\beta=2\hat{\beta}_2,\gamma_1=2\hat{\rho}_3\circ2\hat{\rho}_1$, $\gamma_2=2\hat{\rho}_3\circ2\hat{\rho}_2$. 也就是说, 定义 4 中式 (2) 成立, 即混杂系统 $\mathcal{H}$ 是 UIOSS. □

定理 1. 对于混杂系统 $\mathcal{H}$, 如果 $\mathcal{H}$ 存在 UIOSS Lyapunov 函数, 那么混杂系统 $\mathcal{H}$ 是 UIOSS.

证明. 若混杂系统 $\mathcal{H}$ 存在 UIOSS Lyapunov 函数, 由引理 1 的等价条件知混杂系统 $\mathcal{H}$ 存在指数衰减 UIOSS Lyapunov 函数, 进而由引理 2 可知系

统 $\mathcal{H}$ 存在状态模估计器. 再根据引理 3, 系统 $\mathcal{H}$ 存在状态模估计器意味着混杂系统 $\mathcal{H}$ 是 UIOSS. □

注 1. 定理 1 中, 一致输入输出对状态稳定的定义是在全局意义上建立的. 若定义 2 和定义 3 中函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, 则在局部意义上定理 1 的结论仍然成立.

注 2. 本文获得了一般性混杂系统的 UIOSS 结论, 与文献 [12−13] 研究的混杂系统 ISS 和文献 [16] 研究的混杂系统 OSS 相比, 具有更一般化, 而且本文利用了状态模估计器, 进而可根据需要获得混杂系统状态的估计. 另外, 当本文所研究混杂系统 $\mathcal{H}$ 满足 $\mathcal{C} = \emptyset, \mathcal{D} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 时, 可得文献 [11] 中离散非线性系统的 IOSS 结论. 切换系统是混杂系统的一种特殊形式, 如果在混杂系统 $\mathcal{H}$ 状态 $\boldsymbol{x}$ 中离散变量用不同时刻切换模式来代替, 混杂系统 $\mathcal{H}$ 可退化为非线性切换系统, 而文献 [4, 10] 分别研究了切换系统的 ISS 和 IOSS, 所以定理 1 涵盖了文献 [4, 10] 中所得结论.

4　结论

本文应用逆 Lyapunov 定理分析了非线性混杂系统的一致输入输出对状态稳定性, 给出了一致输入输出对状态稳定 Lyapunov 函数与指数衰减一致输入输出对状态稳定 Lyapunov 函数之间的等价关系, 继而获得了一致输入输出对状态稳定性的判定准则, 所得结果对混杂系统的稳定性分析和控制器设计是十分重要和方便的. 关于混杂系统输入输出对状态稳定的必要条件和充要条件有待进一步研究.

References

1 Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(4): 435−443

2 Mancilla-Aguilar J L, Gascia R A. A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 2000, **41**(1): 67−71

3 Arcak M, Teel A. Input-to-state stability for a class of Lurie systems. *Automatica*, 2002, **38**(11): 1945−1949

4 Zhao Jun, Nie Hong. Sufficient conditions for input-to-state stability of switched systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(2): 252−257
(赵军, 聂宏. 切换系统输入对状态稳定性的充分条件. 自动化学报, 2003, **29**(2): 252−257)

5 Huang S D, James M R, Nešić D, Dower P M. Analysis of input-to-state stability for discrete time nonlinear systems via dynamic programming. *Automatica*, 2005, **41**(12): 2055−2065

6 Liberzon D, Nešić D. Input-to-state stabilization of linear systems with quantized state measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(5): 767−781

7 Jayawardhana B, Logemann H, Ryan E P. Input-to-state stability of differential inclusions with applications to hysteretic and quantized feedback systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, **48**(2): 1031−1054

8 Astolfi A, Praly L. Global complete observability and output-to-state stability imply the existence of a globally convergent observer. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2006, **18**(1): 32−65

9 Krichman M, Sontag E D, Wang Y. Input-output-to-state stability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **39**(6): 1874−1928

10 Lin Xiang-Ze, Zou Yun. Input-output-to-state stability of nonlinear switched systems. *Journal of Nanjing University of Science and Technology (Natural Science)*, 2010, **34**(3): 303−336
(林相泽, 邹云. 非线性切换系统的输入输出对状态稳定. 南京理工大学学报 (自然科学版), 2010, **34**(3): 303−308)

11 Cai C H, Teel A R. Input-output-to-state stability for discrete-time systems. *Automatica*, 2008, **44**(2): 326−336

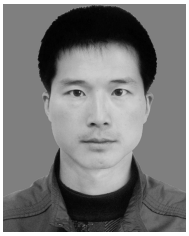
12 Cai C H, Teel A R. Characterizations of input-to-state stability for hybrid systems. *Systems & Control Letters*, 2009, **58**(1): 47−53

13 Nešić D, Teel A R. A Lyapunov-based small-gain theorem for hybrid ISS systems. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 3380−3385

14 Hespanha J P, Liberzon D, Teel A R. Lyapunov conditions for input-to-state stability of impulsive systems. *Automatica*, 2008, **44**(11): 2735−2744

15 Sanfelice R G. Results on input-to-output and input-output-to-state stability for hybrid systems and their interconnections. In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010. 2396−2401

16 Cai C H, Teel A R. Output-to-state stability for hybrid systems. *Systems & Control Letters*, 2011, **60**(1): 62−68



楼旭阳　江南大学物联网工程学院副教授, 博士. 主要研究方向为系统优化与网络控制. 本文通信作者.
E-mail: xuyang.lou@gmail.com
(**LOU Xu-Yang**　Associate professor, Ph. D. at the School of IoT Engineering, Jiangnan University. His research interest covers system optimization and network control. Corresponding author of this paper.)

叶　倩　无锡职业技术学院讲师, 博士. 主要研究方向为混杂系统分析与综合.
E-mail: yeqian85@gmail.com
(**YE Qian**　Lecturer, Ph. D. at Wuxi Institute of Technology. Her research interest covers analysis and synthesis of hybrid systems.)

崔宝同　江南大学物联网工程学院教授, 博士. 主要研究方向为复杂系统控制理论与应用. E-mail: btcui@vip.sohu.com
(**CUI Bao-Tong**　Professor, Ph. D. at the School of IoT Engineering, Jiangnan University. His research interest covers control theory and application of complex systems.)