复杂分数阶多自主体系统的运动一致性

杨洪勇 [1,2] 郭 雷 [2] 张玉玲 [1] 姚秀明 [2]

摘 要 复杂环境中, 许多自然现象的动力学特性不能应用整数阶方程描述, 而只能用分数阶 (非整数阶) 动力学的智能个体合作行为来解释. 本文假设多自主体系统存在个体差异, 采用不同的分数阶动力学特性组成复杂分数混合阶微分方程. 应用分数阶系统的 Laplace 变换和频域理论, 研究了有向网络拓扑下, 时延分数混合阶多自主体系统的运动一致性. 由于整数阶系统是分数阶系统的特殊情况, 本文的结论可以推广到整数阶与分数阶混合的多自主体系统中. 最后, 应用仿真实例对本文结论进行了验证.

关键词 分数阶, 多自主体系统, 时延, 一致性

引用格式 杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性. 自动化学报, 2014, **40**(3): 489−496

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00489

Movement Consensus of Complex Fractional-order Multi-agent Systems

YANG Hong-Yong[1,2] GUO Lei[2] ZHANG Yu-Ling[1] YAO Xiu-Ming[2]

Abstract Due to the complexity of the practical environment, many distributed multi-agent systems can not be illustrated with the integer-order dynamics and can only be described with the fractional-order dynamics. Suppose multi-agent systems will show the individual diversity with the difference agents, where the different fractional-order dynamics are used to illustrate the agent systems and compose complex fractional compounded-order systems. Applying the Laplace transform and frequency domain theory of the fractional-order operator, the consensus of delayed multi-agent systems is studied with directed weighted topologies. Since the integer-order model is a special case of fractional-order model, the results in this paper can be extend to the compounded-order systems with integer-order models and fractional-order models. Finally, simulation examples are used to verify our results.

Key words Fractional-order, multi-agent systems, communication delays, consensus

Citation Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Movement consensus of complex fractional-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(3): 489−496

近年来, 随着计算机技术、网络技术和通信技术的飞速发展, 人们对于基于分布式网络的多自主体系统的交互和协调控制的研究越来越多. 特别是, 多自主体系统在无人驾驶飞行器的编队控制、分布式传感器网络、卫星的姿态控制、云计算以及通讯网络的拥塞控制等各个领域得到广泛应用. 多自主体系统的协调控制已引起了众多研究领域学者的研究兴趣, 如生物、人工智能、自动控制等. 不同学科的研究者们从不同的角度对这一问题进行研究, 比如, 从生物科学的角度, 希望揭示群集生物体之间的合作规则[1−3], 而物理学家则通过建立模型来模拟群集现象[4−6], 系统与控制科学领域的研究者们则希望利用生物群集的自然规律来设计和控制实际群集智能体系统 (卫星、机器人、无人驾驶飞行器、自治水下潜艇等) 完成复杂的任务[7−20]. 现在, 作为多自主体系统的协调控制中最基本的问题之一, 一致性问题受到了广大科学工作者的广泛关注, 已成为系统与控制领域的一个重要研究课题[21−24].

多自主体系统的一致性是指空间分布的几个自主体, 在没有中央集中控制或者全局通信的情况下, 个体之间通过局部的相互耦合作用, 达到一个相同的状态或者输出. 在多个体系统中, 个体之间通过相互感应来获得周围环境和邻居的状态信息, 根据需求来调整自身的运动状态. 1995 年, 基于 Reynolds 提出的模仿动物集结的计算机模型[5], Vicsek 等[6] 从统计力学的角度首次提出了一个非平衡多自主体系统模型, 仿真发现系统所有个体在一定条件下可以按照相同方向运行. Jadbabaie 等[7] 对 Vicsek 模型线性化后从理论上研究了该模型的方向一致性问题. Olfati-Saber 等则对具有切换拓扑结构和通信

收稿日期 2012-12-26 录用日期 2013-05-24
Manuscript received December 26, 2012; accepted May 24, 2013
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2012CB720003), 国家自然科学基金 (61127007, 61203041, 61273152, 91016004), 山东省自然科学基金 (ZR2011FM017, ZR2013FL007) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB720003), National Natural Science Foundation of China (61127007, 61203041, 61273152, 91016004), Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2011FM017, ZR2013FL007)
本文责任编委 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 鲁东大学信息与电气工程学院 烟台 264025 2. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100191
1. School of Information and Electrical Engineering, Ludong University, Yantai 264025 2. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191

时延的多自主体系统的一致性进行了研究[8]. 在多自主体系统的一致性问题研究中, 一般假设系统具有连续时间模型或离散时间模型, 许多国内外学者致力于多自主体系统的一阶或者二阶动力学模型的研究[9−20]. 在多个体系统的协调控制网络中, 个体之间通过传感器或者通信设备进行信息传输而产生通信时延, 时延对系统的群集行为具有很大影响. 因此, 通信时延对多自主体系统运动一致性行为的影响也受到众多学者的关注[8, 11−12, 17−19], 时延系统的稳定性问题已成为多自主体领域的研究热点问题.

上述文献的重要结果, 都是针对整数阶多自主体系统的一致性问题研究. 目前研究发现许多复杂环境中的物理系统因其特殊的材料和特性而展现出分数阶 (非整数阶) 动力学行为, 如随机扩散和波动地传播、大分子链的变形、混沌和湍流、控制和机器人、粘弹性动力学等. 使用分数阶动力学描述带有分数阶特性的研究对象, 可以更好地揭示对象的本质特性及其行为[25−26]. 根据自主体工作环境的复杂性, 许多自然现象的动力学特性不能应用整数阶方程描述, 只能用分数阶 (非整数阶) 动力学的智能个体合作行为来解释, 例如: 借助于个体的分泌物而进行的微生物的群集运动和食物搜索、在有大量微生物和粘性物质的海底工作的水下机器人、在复杂太空环境运行的无人驾驶飞行器等[27]. Cao 等研究了基于分数阶的多自主体系统的分布协作问题[28−29], 给出了稳定的多自主体系统中个体数量与分数阶之间的关系. 对分数阶的多自主个体系统协调控制的进一步研究, 现有的相关研究成果仍然很少.

本文拟开展复杂环境下分数混合阶分布式多自主体系统协调控制的研究. 在实际工程应用中, 智能个体的动力学系统可能会受到周围环境的影响, 它们的运动方程可能是异类的. 然而, 现有文献得到的结论, 主要是假设系统中的智能个体具有相同的整数阶动力学方程 (如: 都是一阶系统, 或者都是二阶系统), 但是对于具有不同动力学系统的异类多自主体系统的一致性问题研究较少. Lee 等[30] 研究了具有不同整数阶动力学方程的多自主体的一致性. 最近, 文献 [31−34] 分别研究了整数混合阶的多自主体系统的一致性. Zheng 等研究了在无向连通网络拓扑下一阶和二阶混合多自主体系统的一致性[31], 进一步研究了强连通网络拓扑下一阶和二阶混合多自主体系统一致性的有限时间收敛问题[32]. Liu 等研究了离散时间情况下一阶和二阶混合的多自主体系统的一致性[33], Tian 等分析了时延不定的异类高阶多自主体系统的一致性[34], 给出了异类多自主体系统的高阶一致解存在的充要条件. 而据作者所知, 对分数混合阶分布式多自主体系统协调控制的研究成果鲜有报道.

本文的主要创新之处在于首次提出对分数混合阶分布式多自主体系统协调控制的研究, 而且个体之间的信息传输存在通信时延. 本文假设在有向连通网络拓扑下多自主体系统由两组具有不同分数阶特性的自主体组成. 本文拟开展对具有通信时延的分数混合阶多自主体系统的运动一致性进行研究. 本文研究问题的难点在于: 由于多自主体系统是分数混合阶的动力学方程, 而且系统存在通信时延, 现有的一些分数阶系统的分析方法无法直接应用, 本文提出应用分数阶算子的 Laplace 变换和频域稳定性理论, 研究复杂分数阶多自主体系统的运动一致性.

1 问题描述

1.1 分数阶算子

自然界和工程应用中存在大量的分数维现象, 涉及复杂物理、力学、控制、航空航天等多个领域. 近年来, 分数阶导数在一些 “复杂” 的社会和物理现象的研究中得到广泛关注. 常用的分数阶微积分有 Grunwald-Letnikov 分数阶算子、Riemann-Liounille 分数阶算子、Caputo 分数阶算子等, 由于 Caputo 分数阶算子在建模应用和积分变换中需满足的初始条件以整数阶微积分的形式给出, 现在实际问题建模广泛应用 Caputo 分数阶算子. Caputo 微分定义如下:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \mathrm{d}\tau \tag{1} $$

其中, α 为大于零的正数, n 为大于 α 的最小正整数, $f^{(n)}(\tau)$ 为函数 $f(\tau)$ 的 n 阶导数, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数.

Caputo 分数阶微分算子的 Laplace 变换为

$$ L\{{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{2} $$

其中, $F(s) = L\{f(t); s\}$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换, $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$. 为了书写方便, 本文中用 $f^{(\alpha)}(t)$ 代替 ${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ 分数阶 Caputo 微分算子.

1.2 分数混合阶多自主体系统

假设多自主体系统由 n 个自主个体组成, 自主个体之间构成网络拓扑 G. 假设 $G = \{V, E, A\}$ 表示一个有向加权图, 其中, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 表示具有 n 个节点的集合, 它的边集合 $E \subseteq V \times V$. 节点的下标集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$, 其中, 矩阵元素 $a_{ik} \geq 0$ 表示节点 i 到节点 k 的连接权重, 如果节点 i 可以得到节点 k 的信息, 则 $a_{ik} > 0$; 否则, $a_{ik} = 0$. 假设网络图中每个节点没有自连, 也就是, 对于所有 $i \in I$, $a_{ii} = 0$.

定义节点 i 的邻居集合为 $N_i=\{k:a_{ik}>0\}$, 矩阵 $D=\mathrm{diag}\{d_i,i=1,2,\cdots,n\}$, $d_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$ 为矩阵 A 的第 i 行元素的和, 则矩阵 $L=D-A$ 为图 G 的 Laplace 矩阵. 如果对于两个节点 i,k, 存在下标集合 $\{k_1,k_2,\cdots,k_l\}$, 满足 $a_{ik_1}>0,a_{k_1k_2}>0,\cdots,a_{k_lk}>0$, 则称节点 i 到节点 k 之间存在一条有向信息传输路径, 此时节点 i 可得到节点 k 的信息. 如果对于节点 i, 都能找到一条路径到达图中任意节点, 则称节点 i 是网络全局可达的.

引理 1[9]**.** 假设多自主体系统有 n 个自主个体, 网络连接拓扑为有向加权网络且有一个全局可达节点. 则矩阵 L 的秩为 $n-1$, 有一个特征值 0, 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_0=c[1,1,\cdots,1]$, 其中, L 为 n 个自主体组成的连接拓扑图的 Laplacian 矩阵.

引理 2[35]**.** 假设矩阵 $Q\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为正定厄米特矩阵, 满足 $Q=Q^{\mathrm{H}}$, 矩阵 $T=\mathrm{diag}\{t_i,t_i\in\mathbf{C}\}$, 则有:

$$\lambda(QT)\in\rho(Q)Co(0\cup\{t_i\})\tag{3}$$

其中, $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值, $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径, $Co(\cdot)$ 表示凸包.

假设复杂环境中多自主体系统存在个体差异, 由两组具有不同的分数阶的多自主体系统组成, 分数阶动力学方程为

$$\begin{aligned}&x_i^{(\alpha)}(t)=u_i(t),\qquad i=1,\cdots,m\\&x_i^{(\beta)}(t)=u_i(t),\qquad i=m+1,\cdots,n\end{aligned}\tag{4}$$

其中, $x_i(t)$ 和 $u_i(t)$ 分别表示第 i 个自主个体的状态和控制输入, $x_i(t)\in\mathbf{R}$, $u_i(t)\in\mathbf{R}$. $x_i^{(\alpha)}(t)$ 和 $x_i^{(\beta)}(t)$ 分别是 $x_i(t)$ 的第 α 阶和第 β 阶 Caputo 分数阶导数, $\alpha>\beta>0$. 假设多自主体系统采用如下的控制协议:

$$\begin{aligned}u_i(t)=\gamma\textstyle\sum_{k\in N_i}a_{ik}(x_k(t)-x_i(t)),\\ i=1,\cdots,m,m+1,\cdots,n\end{aligned}\tag{5}$$

其中, a_{ik} 是邻接矩阵 A 的第 (i,k) 元素, N_i 表示第 i 个 Agent 的邻居集合.

注 1. 假设分数阶 $\alpha=\beta$, 系统的控制增益 $\gamma=1$, 则系统 (1) 与文献 [24] 模型一样.

本文假设系统存在通信时延, 研究具有通信时延的混合阶多自主体系统的一致性. 混合阶多自主体系统 (4) 在有通信时延的影响下, 可以得到下面的算法:

$$\begin{aligned}&x_i^{(\alpha)}(t)=u_i(t-\tau),\qquad i=1,\cdots,m\\&x_i^{(\beta)}(t)=u_i(t-\tau),\qquad i=m+1,\cdots,n\end{aligned}\tag{6}$$

其中, $\tau>0$ 为系统的通信时延. 则具有通信时延的多自主个体系统可以改写为

$$[\tilde{\boldsymbol{X}}_1^{(\alpha)}(t),\tilde{\boldsymbol{X}}_2^{(\beta)}(t)]^{\mathrm{T}}=-\gamma L\boldsymbol{X}(t-\tau)\tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}\\&\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)]^{\mathrm{T}}\\&\tilde{\boldsymbol{X}}_2(t)=[x_{m+1}(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{8}$$

L 为系统的 Laplacian 矩阵. 假设对于任意的初始值, 自主个体的运动状态满足 $\lim_{t\to\infty}(x_i(t)-x_k(t))=0$, $\forall i,k\in I$, 则称多自主体系统渐近达到一致.

2　分数混合阶多自主体系统的一致性

引理 3. 对于任意实数 $\alpha\in(0,1)$, 函数 $y=-x^{\alpha}\cos(x+\alpha\pi/2)$ 在区间 $x\in(0,\pi)$ 上存在极大值.

证明. 对函数 $y=-x^{\alpha}\cos(x+\alpha\pi/2)$ 关于 x 求导数, 得到:

$$y'=\alpha x^{-\alpha-1}\cos\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+x^{-\alpha}\sin\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\tag{9}$$

由于当 $x_0+\alpha\pi/2\in(0,\pi/2]$ 时, 函数的导数大于 0; 当 $x_0+\alpha\pi/2=\pi$ 时, 函数的导数小于 0. 所以存在 $x_0+\alpha\pi/2\in(\pi/2,\pi]$, 使得 $y'=0$. 令 $y'=0$ 可得:

$$x\sin\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=-\alpha\cos\left(x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\tag{10}$$

因此, 存在 $x=x_0$, 而且 $x_0+\alpha\pi/2\in(\pi/2,\pi]$ 满足:

$$x_0\tan\left(x_0+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=-\alpha\tag{11}$$

这样, 得到函数 $y=-x^{\alpha}\cos(x+\alpha\pi/2)$ 在区间 $x\in(0,\pi)$ 上存在极大值:

$$y_{\max}=\frac{x_0^{1-\alpha}}{\sqrt{x_0^2+\alpha^2}}\tag{12}$$

□

定理 1. 假设有 n 个自主个体组成的多自主体系统, 其连接拓扑为有向网络, 而且存在一个全局可达节点. 则具有时延的混合阶多自主体系统 (7) 可渐近达到一致, 如果 $1>\alpha>\beta>0$,

$$\tau<\min\left\{\frac{1}{(2\gamma\bar{l}\Theta_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{(2\gamma\bar{l}\Theta_\beta)^{\frac{1}{\beta}}}\right\}\tag{13}$$

其中, $\bar{l}=\max_{i\in I}\{l_{ii}\}$, $l_{ii}=\sum_{k\in N_i}a_{ik}$, $\Theta=\max\{\Theta_\alpha,\Theta_\beta\}$, $\Theta_\alpha=\xi_\alpha^{1-\alpha}/\sqrt{\xi_\alpha^2+\alpha^2}$, $\Theta_\beta=\xi_\beta^{1-\beta}/\sqrt{\xi_\beta^2+\beta^2}$; 而且 $\xi_\alpha\in(\frac{(1-\alpha)\pi}{2},\frac{(2-\alpha)\pi}{2})$ 满足 $\xi_\alpha\tan(\xi_\alpha+\alpha\pi/2)=-\alpha$, $\xi_\beta\in(\frac{(1-\beta)\pi}{2},\frac{(2-\beta)\pi}{2})$ 满足 $\xi_\beta\tan(\xi_\beta+\beta\pi/2)=-\beta$.

证明. 对时延多自主体系统 (7) 应用 LapLace 变换, 得到特征方程:

$$\det\left(\begin{pmatrix} s^{\alpha}I_m & \\ & s^{\beta}I_{n-m}\end{pmatrix}+\gamma L\mathrm{e}^{-\tau s}\right)=0 \quad (14)$$

式中, I_m 表示 m 维单位矩阵. 由于系统有一个全局可达节点, 所以 0 是矩阵 L 的一个单一特征值. 由于 $1>\alpha>\beta>0$, 所以特征方程有一个特征根 $s=0$.

当 $s\neq 0$ 时, 令 $F(s)=(I+G(s))$, 其中

$$G(s)=\begin{pmatrix} s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau s}I_m & \\ & s^{-\beta}\mathrm{e}^{-\tau s}I_{n-m}\end{pmatrix}\gamma L \quad (15)$$

下面证明 $F(s)=0$ 的所有零点都具有负实部. 根据广义 Nyquist 判据[36], 如果对于 $s=\mathrm{j}\omega$, $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值的 Nyquist 曲线不包围 $-1+\mathrm{j}0$ 点, 则 $F(s)=0$ 的所有零点都具有负实部. 令 $s=\mathrm{j}\omega$, 可得:

$$G(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\gamma L \quad (16)$$

其中

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{pmatrix} \omega^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\alpha\pi}{2}}I_m & \\ & \omega^{-\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\beta\pi}{2}}I_{n-m}\end{pmatrix} \quad (17)$$

下面应用 Gerschgorin 圆盘定理估计矩阵 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值 $\lambda(G(\mathrm{j}\omega))$, 根据 Gerschgorin 圆盘定理有:

$$\lambda(G(\mathrm{j}\omega))\in\bigcup_{i\in I}G_i \quad (18)$$

其中, 对于 $i=1,\cdots,m$, 有:

$$G_i=\left\{\zeta\in\mathbf{C},\left|\zeta-\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right|\leq \omega^{-\alpha}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\left|\gamma a_{ik}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right|\right\} \quad (19)$$

对于 $i=m+1,\cdots,n$, 有:

$$G_i=\left\{\zeta\in\mathbf{C},\left|\zeta-\omega^{-\beta}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}\right|\leq \omega^{-\beta}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\left|\gamma a_{ik}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}\right|\right\} \quad (20)$$

式中, $l_{ii}=\sum_{k\in N_i}a_{ik}$. 简单整理可得:

$$G_i=\left\{\zeta\in\mathbf{C},\left|\zeta-\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right|\leq \omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\right\},\qquad i=1,\cdots,m \quad (21)$$

和

$$G_i=\left\{\zeta\in\mathbf{C},\left|\zeta-\omega^{-\beta}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\beta\pi}{2}\right)}\right|\leq \omega^{-\beta}\gamma l_{ii}\right\},\qquad i=m+1,\cdots,n \quad (22)$$

对于 $i=1,\cdots,m$, 下面考察圆盘的变化. 当圆盘 G_i 的圆心 $\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega\tau+\alpha\pi/2)}$ 的 Nyquist 曲线变化时, 圆盘也随着变化. 下面证明 $-1+\mathrm{j}0$ 点不在 G_i $(i=1,\cdots,m)$ 圆盘中. 假设 $-a+\mathrm{j}0$ (其中 $a\geq 0$) 为圆盘 G_i 的边缘与负实轴的交点, 满足:

$$\left|-a+\mathrm{j}0-\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}\right|=\omega^{-\alpha}\gamma l l_{ii} \quad (23)$$

令

$$\Delta=|-a+\mathrm{j}0-\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2})}|^2-(\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii})^2=a(a+2\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\cos\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right)) \quad (24)$$

当 $\Delta=0$ 时, 得到:

$$a=0,\ a=-2\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\cos\left(\omega\tau+\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (25)$$

得到圆盘 G_i 的边缘与实轴的交点分别为原点 $0+\mathrm{j}0$ 和实轴上的点 $2\omega^{-\alpha}\gamma l_{ii}\cos(\omega\tau+\alpha\pi/2)+\mathrm{j}0$. 根据引理 3 可知, 对于任意实数 $\alpha\in(0,1)$, 函数 $\theta=-\xi^{-\alpha}\cos(\xi+\alpha\pi/2)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上存在极大值. 也就是存在 $\xi_\alpha\in((1-\alpha)\pi/2,(2-\alpha)\pi/2)$, 使得 a 取得最大值为

$$a_{\max}=2\tau^{\alpha}\gamma l_{ii}\Theta_\alpha \quad (26)$$

其中, $\Theta_\alpha=\xi_\alpha^{1-\alpha}/\sqrt{\xi_\alpha^2+\alpha^2}$, $\xi_\alpha\tan(\xi_\alpha+\alpha\pi/2)=-\alpha$. 根据定理的条件, 有:

$$\tau<\frac{1}{(2\gamma\bar{l}\Theta_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (27)$$

可得

$$a_{\max}\leq 2\tau^{\alpha}\gamma\bar{l}\Theta_\alpha<1 \quad (28)$$

因此, 圆盘边缘与负实轴的交点 $-a+\mathrm{j}0$ 在 $-1+\mathrm{j}0$ 点的右边, 也就是 $-1+\mathrm{j}0$ 点不在圆盘 G_i 中.

同样的推导可得, 对于 $i=m+1,\cdots,n$, 有 $-1+\mathrm{j}0$ 点不在圆盘 G_i 中. 这样矩阵 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值 $\lambda(G(\mathrm{j}\omega))$ 的 Nyquist 曲线不包围 $-1+\mathrm{j}0$ 点. 因此, $F(s)=0$ 的所有零点都具有负实部.

由于系统的稳定点满足 $LX^*=0$, 而且 $\mathrm{rank}(L)=n-1$, 因此, X^* 就是特征值 0 对应的特征向量 $\boldsymbol{X}^*=c[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$, 这里 c 为一个常数. 因此, 有 $\lim_{t\to\infty}x_i(t)=c$, 系统渐近达到一致. □

注 2. 当 $\alpha=1$ 时, 函数 $y=-x^{\alpha}\cos(x+\alpha\pi/2)$ 是一个有界函数, 存在极大值 1, 而且随着 x 增大逐

渐趋于 0. 因此, 在定理 1 中, 如果假设 $1 \geq \alpha > \beta > 0$, 则具有时延的混合阶多自主体系统可渐近达到一致的条件为

$$\tau < \min\left\{\frac{1}{2\gamma\bar{l}}, \frac{1}{(2\gamma\bar{l}\Theta_\beta)^{\frac{1}{\beta}}}\right\} \tag{29}$$

推论 1. 假设有 n 个自主个体组成的多自主体系统, 其有向连接拓扑为对称的, 而且有一个全局可达节点. 则具有时延的分数混合阶多自主体系统 (7) 可渐近达到一致, 如果

$$\tau < \frac{(2-\alpha)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{\frac{1}{\beta}}} \tag{30}$$

其中, ρ_L 表示矩阵 L 的谱半径, 满足 $\rho_L = \max_{i\in I}\{|\lambda_i|\}$, λ_i 为矩阵 L 的特征值.

证明. 根据定理 1 的证明可知系统的特征方程:

$$\det\left(\begin{pmatrix} s^\alpha I_m & \\ & s^\beta I_{n-m}\end{pmatrix} + \gamma L \mathrm{e}^{-\tau s}\right) = 0 \tag{31}$$

由于系统有一个全局可达节点, 所以 0 是矩阵 L 的一个单一特征值. 由于 $\alpha > \beta > 0$, 所以系统的特征方程有一个特征根 $s = 0$.

当 $s \neq 0$ 时, 令 $F(s) = (I+G(s))$, 其中 $G(s) = E(s)\gamma L$, $E(s) = \begin{pmatrix} s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau s} I_m & \\ & s^{-\beta}\mathrm{e}^{-\tau s} I_{n-m}\end{pmatrix}$. 下面证明 $F(s) = 0$ 的所有根都具有负实部. 根据广义 Nyquist 判据[36], 如果对于 $s = \mathrm{j}\omega$, $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值的 Nyquist 曲线不过 $-1+\mathrm{j}0$ 点, 则 $F(s) = 0$ 的所有根都具有负实部. 令 $s = \mathrm{j}\omega$, 可得:

$$G(\mathrm{j}\omega) = E(\mathrm{j}\omega)\gamma L \tag{32}$$

其中

$$E(\mathrm{j}\omega) = \begin{pmatrix} \omega^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\alpha\pi}{2}} I_m & \\ & \omega^{-\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\beta\pi}{2}} I_{n-m}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \tag{33}$$

对于 $i = 1, \cdots, m$, $M_i = (\frac{(2-\alpha)\pi}{2\tau_i})^\alpha$; 对于, $i = m+1, \cdots, n$, $M_i = (\frac{(2-\beta)\pi}{2\tau_i})^\beta$; 记 $M = \mathrm{diag}\{M_i,\ i \in I\}$. 此时矩阵 $ME(\mathrm{j}\omega)$ 为对角矩阵, 而且对角元素的 Nyquist 曲线过 $-1+\mathrm{j}0$ 点. 设 λ 为 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值, 存在特征向量 $\boldsymbol{v}$, 满足 $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, 而且 $G(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. 则有:

$$\lambda = \boldsymbol{v}^{\mathrm{H}} G(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}(ME(\mathrm{j}\omega)M^{-\frac{1}{2}}\gamma L M^{-\frac{1}{2}})\boldsymbol{v} \tag{34}$$

根据引理 2 可得:

$$\begin{aligned}\lambda(G(\mathrm{j}\omega)) &= \lambda(ME(\mathrm{j}\omega)M^{-\frac{1}{2}}\gamma L M^{-\frac{1}{2}}) \in \\ &\rho(\gamma M^{-\frac{1}{2}} L M^{-\frac{1}{2}})\times \\ &Co(0\cup\{ME(\mathrm{j}\omega)\})\end{aligned} \tag{35}$$

其中, $\rho(\cdot)$ 表示矩阵 $\gamma M^{-\frac{1}{2}} L M^{-\frac{1}{2}}$ 的谱半径, $Co(0\cup\{ME(\mathrm{j}\omega)\})$ 表示曲线与原点的凸包. 由于矩阵 $ME(\mathrm{j}\omega)$ 的对角元素过 $-1+\mathrm{j}0$ 点, 所以凸包 $Co(0\cup\{ME(\mathrm{j}\omega)\})$ 的边缘过 $-1+\mathrm{j}0$. 根据前提条件 $\tau < \frac{(2-\alpha)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{1/\beta}}$, 可得:

$$\tau < \frac{(2-\alpha)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{\frac{1}{\beta}}} < \frac{(2-\alpha)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{36}$$

和

$$\tau < \frac{(2-\alpha)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{\frac{1}{\beta}}} < \frac{(2-\beta)\pi}{2(\gamma\rho_L)^{\frac{1}{\beta}}} \tag{37}$$

因此有

$$\rho(\gamma M^{-\frac{1}{2}} L M^{-\frac{1}{2}}) < 1 \tag{38}$$

所以 $\rho(\gamma M^{-\frac{1}{2}} L M^{-\frac{1}{2}})\times Co(0\cup\{ME(\mathrm{j}\omega)\})$ 不包含 $-1+\mathrm{j}0$ 点, 也就是 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的特征值的 Nyquist 曲线不包含 $-1+\mathrm{j}0$ 点. 根据广义 Nyquist 判据可得, $F(s) = 0$ 的根都具有负实部. 因此, 多自主体系统渐近达到一致, 有 $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = c$. □

注 3. 由于整数阶系统是分数阶系统的特殊情况, 因此, 当多自主体系统 (7) 的动力学方程其中一部分为整数阶系统时, 系统变为具有整数阶和分数阶的混合系统.

推论 2. 假设有 n 个自主个体组成的多自主体系统, 其有向连接拓扑为静态对称的, 而且存在一个全局可达节点. 则当 $\alpha = 1$ 时, 具有时延的混合阶 (整数阶、分数阶) 多自主体系统 (7) 可渐近达到一致, 如果

$$\tau < \frac{\pi}{2(\gamma\lambda_{\max})^{\frac{1}{\beta}}} \tag{39}$$

其中, $\lambda_{\max}$ 为矩阵 L 的最大特征值.

注 4. 在推论 2 中, 当 $\alpha = \beta = 1$ 时, 多自主体系统 (7) 就是整数阶系统, 推论 2 的结论为 $\tau\gamma < \frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$, 该结论与 Olfati-Saber 在文献 [8] 得到的时延多个体系统一致性收敛结论一样.

3 实例分析

仿真 1. 假设多自主体系统由 4 个具有分数阶动力学系统描述的个体组成 (如图 1), 个体之间连接权重为 $a_{21} = 0.7$, $a_{42} = 0.8$, $a_{31} = 0.9$, $a_{14} = 1$. 多自主体系统中 Agent 1 和 Agent 2 的动力学方程的分数阶 $\alpha = 0.9$, Agent 3 和 Agent 4 的分数阶为 $\beta = 0.9$, 由系统连接拓扑可得:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

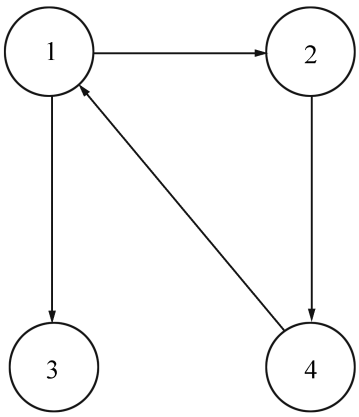


图 1 拓扑结构图

Fig. 1 Topology mode

根据定理 1 的结论我们计算了系统控制增益与网络通信时延上界之间的关系 (图 2), 假设知道了系统的通信时延, 可以根据图 2 设置控制增益, 使得多自主体系统满足运动一致性条件. 或者根据图 2 所示, 已知控制增益的大小时, 可以确定满足系统一致性条件的网络通信时延的临界值. 例如假设系统的控制增益为 $\gamma = 1$, 图 2 中得到对应的通信时延上界为 0.7275 s.

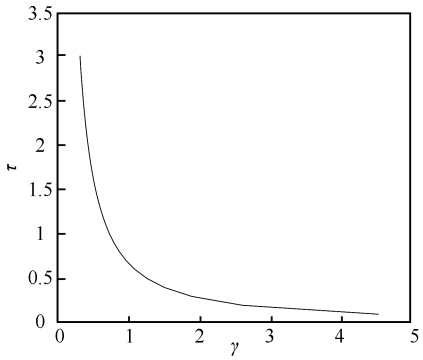


图 2 通信时延上界与控制增益的关系图

Fig. 2 Relationship between control gain and upper bound of communication delays

仿真中假设多自主体系统的网络通信时延为 0.5 s, 应用分数阶微分算子仿真算法可验证混合阶多自主体系统运动状态能够渐近达到一致 (图 3). 假设各自主个体系统的网络时延为 0.8 s, 系统仿真可见此时系统运动状态偏离越来越大 (图 4).

仿真 2. 假设图 1 中多个体系统之间连接拓扑为对称连接, 权重与仿真相同. 有系统连接拓扑可得系统的邻接矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.9 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

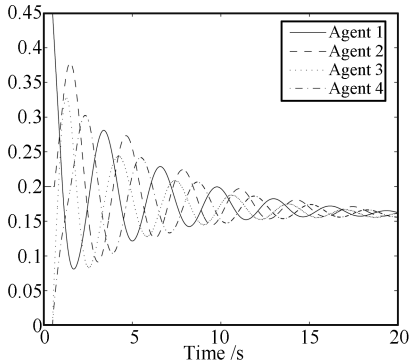


图 3 通信时延为 0.5 s 的多自主体系统的运动状态图

Fig. 3 Movement trajectories of the multi-agent systems with delay 0.5 s

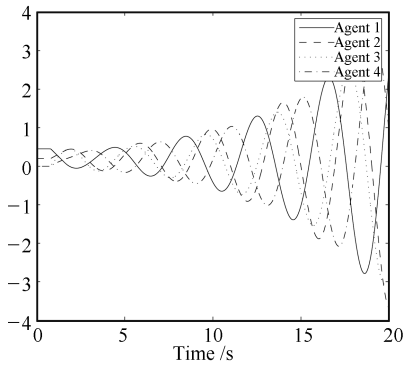


图 4 通信时延为 0.8 s 的多自主体系统的运动状态图

Fig. 4 Movement trajectories of the multi-agent systems with delay 0.8 s

假设混合阶多自主个体系统的分数阶 $\alpha = 1$, $\beta = 0.8$, 系统的控制增益 $\gamma = 1$, 根据推论 2 得到系统的网络通信时延上界为 0.325 s. 取网络时延为 0.3 s, 系统运动的仿真可见多自主体系统状态逐渐达到一致 (图 5).

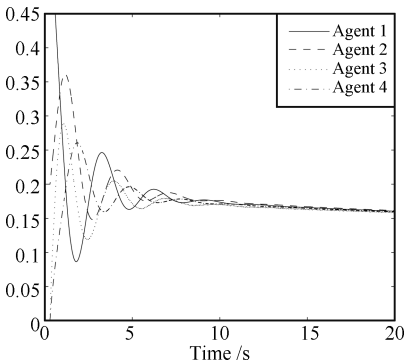


图 5 通信时延为 0.3 s 的多自主体系统的运动状态图

Fig. 5 Movement trajectories of the multi-agent systems with delay 0.3 s

4 结论

本文研究了分数混合阶多自主体系统的一致性.

假设多自主体系统存在个体差异, 采用不同的分数阶动力学描述. 应用频域稳定性理论, 研究了有向网络拓扑下, 时延多自主体系统的运动一致性, 得到了保证系统一致性的控制增益与时延上界之间的关系. 假设其中一个分数阶系统的阶数为 1 时, 得到了整数阶和分数阶混合的多自主体系统的一致性. 假设分数阶系统的阶数都为 1 时, 本文得到的结论与整数阶系统的结论是一致的. 本文的后续工作, 将对在切换拓扑下的混合阶多自主体系统的鲁棒稳定性进行研究.

References

1 Couzin I D, Krause J, James R, Ruxton G D, Franks N R. Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of Theoretical Biology*, 2002, **218**(1): 1−11

2 Parrish J K, Viscido S V, Grünbaum D. Self-organized fish schools: an examination of emergent properties. *Biological Bulletin*, 2002, **202**(3): 296−305

3 Low D J. Following the crowd. *Nature*, 2000, **407**(6803): 465−466

4 Czirók A, Vicsek T. Collective behavior of interacting self-propelled particles. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, **281**(1−4): 17−29

5 Reynolds C W. Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 1987, **21**(4): 25−34

6 Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226−1229

7 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988−1001

8 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520−1533

9 Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control: collective group behavior through local interaction. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, **27**(2): 71−82

10 Li Shi-Hua, Du Hai-Bo, Lin Xiang-Ze. Finite-time consensus algorithm for multi-agent with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1706−1712

11 Lin Peng, Jia Ying-Min. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2154−2158

12 Yu Jun-Yan, Wang Long. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(6): 340−348

13 Xiao Feng, Wang Long, Chen Jie, Gao Yan-Ping. Finite-time formation control for multi-agent systems. *Automatica*, 2009, **45**(11): 2605−2611

14 Chen Fei, Chen Zeng-Qiang, Xiang Lin-Ying, Liu Zhong-Xin, Yuan Zhu-Zhi. Reaching a consensus via pinning control. *Automatica*, 2009, **45**(5): 1215−1220

15 Yang Hong-Yong, Zhang Zhen-Xing, Zhang Si-Ying. Consensus of second-order multi-agent systems with exogenous disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(9): 945−956

16 Hong Yi-Guang, Chen Guan-Rong, Bushnell L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks. *Automatica*, 2008, **44**(3): 846−850

17 Tian Yu-Ping, Liu Cheng-Lin. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(9): 2122−2128

18 Tian Yu-Ping, Liu Cheng-Lin. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations. *Automatica*, 2009, **45**(5): 1374−1353

19 Yang Hong-Yong, Zhu Xun-Lin, Zhang Si-Ying. Consensus of second-order delayed multi-agent systems with leader-following. *European Journal of Control*, 2010, **16**(2): 188−199

20 Su Hou-Sheng, Wang Xiao-Fan, Lin Zong-Li. Flocking of multi-agents with a virtual leader. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 293−307

21 Wang Fei-Yue. Parallel control: a method for data-driven and computational control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 293−302
(王飞跃. 平行控制: 数据驱动的计算控制方法. 自动化学报, 2013, **39**(4): 293−302)

22 Chen Guan-Rong. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312−321
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312−321)

23 Min Hai-Bo, Liu Yuan, Wang Shi-Cheng, Sun Fu-Chun. An overview on coordination control problem of multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(10): 1557−1570
(闵海波, 刘源, 王仕成, 孙富春. 多个体协调控制问题综述. 自动化学报, 2012, **38**(10): 1557−1570)

24 Yan Wei-Sheng, Li Jun-Bing, Wang Yin-Tao. Consensus for damaged multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(11): 1880−1884
(严卫生, 李俊兵, 王银涛. 受损多智能体系统的信息一致性. 自动化学报, 2012, **38**(11): 1880−1884)

25 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego, CA: Academic Press, 1999

26 Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. New Jersey: World Scientific, 2000

27 Ren Wei, Cao Yong-Can. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. London: Springer-Verlag, 2011

28 Cao Yong-Can, Li Yan, Ren Wei, Chen Yang-Quan. Distributed coordination of networked fractional-order systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, **40**(2): 362−370

29 Cao Yong-Can, Ren Wei. Distributed formation control for fractional-order systems: dynamic interaction and absolute/relative damping. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(3−4): 233−240

30 Lee D J, Spong M K. Agreement with non-uniform information delays. In: Proceedings of the American Control Conference. Minneapolis, MN: IEEE, 2006. 756−761

31 Zheng Y, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(16): 1881−1888

32 Zheng Yuanshi, Wang Long. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with and without velocity measurements. *Systems & Control Letters*, 2012, **61**(8): 871−878

33 Liu Cheng-Lin, Liu Fei. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays. *Automatica*, 2011, **47**(9): 2130−2133

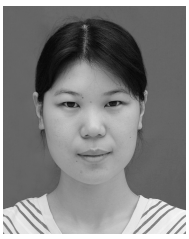
34 Tian Yu-Ping, Zhang Ya. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 2012, **48**(6): 1205−1212

35 Vinnicombe G. On the Stability of End-to-End Congestion Control for the Internet, Technical report CUED/F-INFENG/TR. No. 398, Department of Engineering, University of Cambridge, USA, 2000

36 Desoer C A, Wang Y T. On the generalized Nyquist stability criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, **AC-25**(2): 187−196

杨洪勇 鲁东大学信息与电气工程学院教授. 2005 年于东南大学自动化系获得工学博士学位. 现在于北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院飞行器控制一体化技术国家级重点实验室做博士后研究工作. 主要研究方向为复杂网络, 多智能体编队, 智能控制. 本文通信作者.
E-mail: hyyang@yeah.net
(**YANG Hong-Yang** Professor at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. He received his Ph. D. degree in control theory and control engineering from Southeast University in 2005. He is now working towards her postdoctoral research in the National Key Laboratory on Aircraft Control Technology, Beihang University. His research interest covers complex network, multi-agent systems, and intelligence control. Corresponding author of this paper.)

郭 雷 北京航空航天大学自动化学院教授. 1997 年毕业于东南大学自动化系. 主要研究方向为鲁棒控制, 随机系统, 故障诊断, 滤波器设计, 航空航天领域中的非线性控制.
E-mail: guol@buaa.edu.cn
(**GUO Lei** Professor at the School of Automation, Beihang University. He received his Ph. D. degree in control theory and control engineering from Southeast University (SEU) in 1997. His research interest covers robust control, stochastic systems, fault detection, filter design, and nonlinear control with their applications to aerospace systems.)



张玉玲 鲁东大学信息与电气工程学院副教授. 2007 年于山东大学信息科学与工程学院获工学博士学位. 主要研究方向为认知传感器网络技术, 纠错抗干扰技术, 多天线技术.
E-mail: zhang-yuling@hotmail.com
(**ZHANG Yu-Ling** Associate professor at the School of Information and Electrical Engineering, Ludong University. She received her Ph. D. degree in information science and engineering from Shandong University in 2007. Her research interest covers technology of cognitive sensor networks, anti-interference technology of error correction, and multiple antenna technology.)

姚秀明 讲师. 2010 年于哈尔滨工业大学航天学院获得控制科学与工程博士学位. 自 2010 年 9 月至 2011 年 3 月, 于澳大利亚西悉尼大学计算与数学学院做学术访问. 自 2011 年 5 月起, 于北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院飞行器控制一体化技术国家级重点实验室做博士后研究工作. 主要研究方向为混杂 Markovian 跳跃系统, 鲁棒控制, 滤波及故障检测.
E-mail: xiumingyao@gmail.com
(**YAO Xiu-Ming** Lecturer. She received her Ph. D. degree in control science and control engineering from Harbin Institute of Technology University in 2010. From September 2010 to March 2011, she was a research associate at the School of Computing and Mathematics, University of Western Sydney, Australia. She is now working towards her postdoctoral research in the National Key Laboratory on Aircraft Control Technology, Beihang University. Her research interest covers Markovian jump systems, networked control systems, and robust control.)