

基于采样控制的一类本质非线性系统的全局镇定

都海波^{1,2} 李世华² 钱春江³ 何怡刚¹

摘要 针对一类含不确定参数的本质非线性系统, 基于非光滑控制技术, 提出了一种基于采样控制的全局非光滑镇定方案. 首先, 基于加幂积分技术和递归设计方法, 提出了一类采样状态反馈控制器构造性设计方法. 然后, 通过合理地构造 Lyapunov 泛函, 严格地证明了存在一个最大采样周期可以保证闭环系统的全局渐近稳定性. 由于控制器是离散形式的, 所以在实际中易于用计算机来实现. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词 全局镇定, 本质非线性系统, 非光滑控制, 采样控制

引用格式 都海波, 李世华, 钱春江, 何怡刚. 基于采样控制的一类本质非线性系统的全局镇定. 自动化学报, 2014, 40(2): 379–384

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00379

Global Stabilization of a Class of Inherently Nonlinear Systems under Sampled-data Control

DU Hai-Bo^{1,2} LI Shi-Hua² QIAN Chun-Jiang³
HE Yi-Gang¹

Abstract For a class of inherently nonlinear systems with uncertain parameters, the global stabilization problem via sampled-data control is investigated in this paper. First of all, based on the technique of adding a power integrator and a recursive argument, a class of sampled-data state feedback controllers are proposed. Then under the proposed controller, by using a suitable Lyapunov functional, it is shown that there is a maximum allowable sampling period which can guarantee the global asymptotical stability of the closed-loop system. Since the proposed controller is discrete-time, it can be easily implemented by computers. Finally, an example is given to verify the efficiency of the proposed method.

Key words Global stabilization, inherently nonlinear systems, non-smooth control, sampled-data control

Citation Du Hai-Bo, Li Shi-Hua, Qian Chun-Jiang, He Yi-Gang. Global stabilization of a class of inherently nonlinear systems under sampled-data control. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(2): 379–384

收稿日期 2012-06-18 录用日期 2012-10-25

Manuscript received June 18, 2012; accepted October 25, 2012
国家自然科学基金 (61074013, 61304007), 国家杰出青年科学基金 (50925727), 教育部博士点基金项目 (20130111120007), 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2012HGBZ0205, 2012HGQC0002), 中国博士后科学基金 (2012 M521217), 安徽省自然科学基金 (1308085QF106) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074013, 61304007), National Natural Science Funds of China for Distinguished Young Scholar (50925727), Ph. D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (20130111120007), Fundamental Research Funds for the Central Universities (2012HGBZ02 05, 2012HGQC0002), China Postdoctoral Science Foundation (2012 M521217), and Natural Science Foundation of Anhui Province (1308 085QF106)

本文责任编辑 刘允刚

Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang

1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009, 中国 2. 东南大学自动

考虑下面一类含不确定参数的非线性系统^[1-4] 的采样反馈镇定问题, 即非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= d_1(t)x_2(t)^{p_1} \\ \dot{x}_2(t) &= d_2(t)x_3(t)^{p_2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= d_{n-1}(t)x_n(t)^{p_{n-1}} \\ \dot{x}_n(t) &= d_n(t)u(t)\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $u(t) \in \mathbf{R}$ 是系统控制输入, $d_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, 是时变的未知参数. 对于 $i = 1, \dots, n-1$, 幂 $p_i \geq 1$ 为正奇数. 本文的主要控制目标是设计一个基于采样控制的状态反馈控制器来全局镇定系统 (1), 即控制律是离散形式的, 并且通过零阶保持来实现:

$$u(t) = u(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad t_k = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

其中, 时刻 t_k 和 t_{k+1} 是相应的采样时刻点, T 是采样周期.

研究上述非线性系统 (1) 的控制问题既有实用价值又有理论意义. 首先, 从应用方面来说, 很多实际系统可以由非线性系统 (1) 来近似, 如文献 [5–6] 中所提到的一类欠驱动机械系统. 从理论上来说, 由于非线性系统 (1) 可能具有局部线性化不可控模态, 如文献 [5] 中研究的非线性系统的标称部分系统:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3^3, \quad \dot{x}_3 = u \quad (3)$$

存在线性化不可控模态, 所以能使该类系统渐近稳定的全局甚至局部的光滑控制律都不存在. 因此, 这类系统的控制问题受到了不少学者的关注. 为解决此类系统的控制问题, 在文献 [6] 中, 提出了推广的反步设计方法, 即加幂积分技术, 系统地构造了一类非光滑控制器可以解决这类系统的状态反馈镇定问题. 文献 [1–3] 讨论了该类系统在不同情况下的有限时间控制器设计方案. 当系统线性化不可观时, 为解决输出反馈控制问题, 文献 [7] 设计了平面二维系统的非光滑输出反馈镇定器. 针对高维非线性系统, 文献 [8–9] 分别设计了相应的非光滑观测器、非光滑输出反馈控制器和有限时间输出反馈控制器.

综上分析, 对于非线性系统 (1) 的控制问题, 目前都集中在设计连续时间形式的控制器上. 但在实际中, 越来越多的系统都是基于数字计算机来控制的^[10]. 通常情况下, 对于连续时间线性系统而言, 基于现有的离散时间线性系统的稳定性分析和综合结果, 设计离散时间形式的控制器相对容易. 然而对于形如式 (1) 的本质非线性系统, 如何设计离散形式的控制器来镇定该系统却并不简单. 对于一般的连续时间非线性系统, 设计采样反馈控制器通常有两种方法: 一种是首先通过离散化 (如欧拉离散) 得到离散时间模型, 然后设计相应的离散时间控制器. 然而, 采用这种方法, 对于非线性系统而言, 一般不可避免地存在离散化误差, 所以结果通常是半全

化学院 南京 210096, 中国 3. 美国德克萨斯大学圣安东尼奥分校电子与计算机工程系 圣安东尼奥 78249, 美国

1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China 2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China 3. Department of Electrical and Computer Engineering, the University of Texas at San Antonio, San Antonio 78249, USA

局的或者实用稳定的^[11]. 此外, 对于本文所考虑的本质非线性系统 (1), 基于离散化模型来设计离散时间控制器同样十分困难. 如采用欧拉离散化方法得到系统 (3) 的近似离散时间模型为

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + Tx_2(k) \\x_2(k+1) &= x_2(k) + Tx_3^3(k) \\x_3(k+1) &= x_3(k) + Tu(k)\end{aligned}\quad (4)$$

其中, T 为采样周期. 显然, 由于离散时间系统 (4) 线性化存在不可控模态, 如何处理这种离散时间系统的镇定问题, 同样十分困难.

另外一种设计采样控制器的方法是直接离散化连续时间形式控制器. 这种方法的关键是证明存在一个最大的采样周期来保证闭环系统在离散化控制器作用下仍然是全局渐近稳定的. 针对此问题, 文献 [12–13] 基于该方法讨论了采样状态反馈控制的一般性理论结果, 文献 [14–17] 基于这种方法考虑了非线性系统的采样输出反馈镇定问题, 但这些文献中都要求连续时间形式控制器必须是光滑的, 所以并不适用于本文所考虑的一类本质非线性系统.

本文主要考虑基于采样控制来解决一类本质非线性系统 (1) 的全局渐近镇定问题. 为解决该类系统的反馈镇定问题, 首先, 基于加幂积分技术和递归设计方法, 设计一个采样状态反馈控制器; 然后, 利用 Lyapunov 泛函, 证明了存在一个最大采样周期可以保证闭环系统的全局渐近稳定性. 本文的主要创新点在于证明了对于一类线性化不可控本质非线性系统, 不仅可以设计连续时间形式非光滑镇定器, 还可以构造基于采样控制的非光滑镇定器. 由于采样控制器是离散形式的, 所以在实际中更易于用计算机来实现.

1 预备知识及相关引理

本文主要目的是设计采样反馈控制器来镇定一类带不确定性的本质非线性系统 (1), 且不确定项满足下面的假设条件.

假设 1. 对于任意的 $i = 1, \dots, n$, 存在正的常数 $\underline{d}_i, \bar{d}_i$ 使得 $\underline{d}_i \leq d_i(t) \leq \bar{d}_i$.

注 1. 在实际中, 由于系统受外部环境、系统建模误差等的影响, 会造成系统参数发生时变现象, 因此本文中考虑了系统参数时变的情形. 其次, 尽管这些变化的参数并不能精确测量, 但是在很多情况下, 这些参数的变化范围往往可以估计出来. 因此, 给出了上述的假设.

假设 2. 对于采样的数据, 不存在滞后, 即采样得到的数据可以马上利用.

此外, 本文还需要用到下面的定义和引理. 首先给出标量函数的齐次性定义.

定义 1^[18]. 令 $V(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续函数. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma > 0$ 和扩张 $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^n$, 其中, $r_i > 0, i = 1, \dots, n$, 使得 $V(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^\sigma V(x), \forall x \in \mathbf{R}^n$, 则称 $V(x)$ 关于 $(r_1, \dots, r_n)$ 具有齐次度 σ .

接下来给出相关引理.

引理 1^[6]. 若 $0 < p = p_1/p_2 \leq 1$, 其中 p_1 和 p_2 为正的奇数, 则下面的不等式成立: $|x^p - y^p| \leq 2^{1-p}|x - y|^p$.

引理 2^[6]. 若 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, \gamma, c, d$ 为正实数, 则下面的不等式成立: $|x|^c|y|^d \leq \frac{c}{c+d}\gamma|x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-c/d}|y|^{c+d}$.

引理 3 (Cauchy-Schwartz不等式). 假设函数 $f(\cdot)$ 和

函数 $g(\cdot)$ 为两个定义在区间 $[a, b]$ 上的实函数, 其中 $a \leq b$, 那么, $\int_a^b f(s)g(s)ds \leq \sqrt{\int_a^b f(s)^2 ds} \sqrt{\int_a^b g(s)^2 ds}$.

引理 4^[19]. 假设标量函数 $V(x_1, \dots, x_n) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于扩张 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 的齐次度为 τ 的齐次函数, 则有下列的关系成立: 给定一个正定的函数 $H(x_1, \dots, x_n) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 如果该函数关于扩张 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 的齐次度为 τ , 那么存在一个正的常数 $c > 0$, 使得 $V(x) \leq cH(x)$.

2 主要结果

本节将给出本文的主要结果, 即设计一类基于采样控制的反馈控制器来全局镇定非线性系统 (1). 为简便起见, 本文中在不引起混淆的情况下, $x(t)$ 简记为 x . 对于该系统, 基于文献 [6] 中的加幂分技术, 有下面的引理成立.

引理 5. 考虑满足假设 1 的系统 (1) 并定义虚拟控制器:

$$\begin{aligned}u^*(x) &= -b_n \xi_n(x) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} \\ \xi_n(x) &= x_n^{p_1 \cdots p_{n-1}} + b_{n-1} x_{n-1}^{p_1 \cdots p_{n-2}} + \cdots + b_2 x_2^{p_1} + b_1 x_1\end{aligned}\quad (5)$$

存在一个正定的 Lyapunov 函数 $W(x)$ 以及合适的正增益 b_i 's, 使得以下关系式成立:

$$\begin{aligned}\dot{W}(x) &\leq -\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + \frac{3}{2}\xi_n^2\right) + \\ &\quad d_n \xi_n^{\frac{2-1}{p_1 \cdots p_{n-1}}} (u - u^*)\end{aligned}\quad (6)$$

证明. 该虚拟控制器的构造过程主要基于递归的设计方法, 此处仅给出前两步的构造过程.

步骤 1. 取正定的 Lyapunov 函数:

$$V_1(x_1) = \int_0^{x_1} (s - 0)ds = \frac{1}{2}x_1^2$$

则沿着系统 (1), 函数 V_1 的导数为

$$\dot{V}_1(x_1) = d_1 x_1 x_2^{*p_1} + d_1 x_1 (x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}) \quad (7)$$

其中, x_2^* 是一个虚拟控制律. 令 $\xi_1 = x_1$ 并设计虚拟控制器 $x_2^{*p_1} = -\beta_1 \xi_1$, 其中 $\beta_1 \geq n/\underline{d}_1$, 则有:

$$\dot{V}_1(x_1) \leq -n\xi_1^2 + d_1 \xi_1 (x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}) \quad (8)$$

步骤 2. 构造正定的 Lyapunov 函数:

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + \int_{x_2^*}^{x_2} (s^{p_1} - x_2^{*p_1})^{2-\frac{1}{p_1}} ds$$

并令 $\xi_2 = x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}$, 那么沿着系统 (1), 函数 $V_2(x_1, x_2)$ 的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_1, x_2) &\leq -n\xi_1^2 + d_1 \xi_1 \xi_2 + d_2 \xi_2^{2-\frac{1}{p_1}} x_3^{p_2} + \\ &\quad \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 d_1 x_2^{p_1} \int_{x_2^*}^{x_2} (s^{p_1} - x_2^{*p_1})^{1-\frac{1}{p_1}} ds\end{aligned}\quad (9)$$

根据引理 1 和引理 2, 有如下估计成立:

$$d_1 \xi_1 \xi_2 \leq \bar{d}_1 |\xi_1 \xi_2| \leq \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 + \bar{d}_1^2 \xi_2^2 \right) \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned}
 & \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 d_1 x_2^{p_1} \int_{x_2^*}^{x_2} (s^{p_1} - x_2^{*p_1})^{1-\frac{1}{p_1}} ds \leq \\
 & \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 \bar{d}_1 |x_2^{p_1}| |\xi_2|^{1-\frac{1}{p_1}} |x_2 - x_2^*| = \\
 & \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 \bar{d}_1 |x_2^{*p_1} + (x_2^{p_1} - x_2^{*p_1})| |\xi_2|^{1-\frac{1}{p_1}} \times \\
 & \left| (x_2^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} - (x_2^{*p_1})^{\frac{1}{p_1}} \right| \leq \\
 & \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 \bar{d}_1 2^{1-\frac{1}{p_1}} (\beta_1 |\xi_1| + |\xi_2|) |\xi_2|^{1-\frac{1}{p_1}} |\xi_2|^{\frac{1}{p_1}} = \\
 & \left(2 - \frac{1}{p_1}\right) \beta_1 \bar{d}_1 2^{1-\frac{1}{p_1}} (\beta_1 |\xi_1| + |\xi_2|) |\xi_2| \leq \\
 & \frac{1}{2} \xi_1^2 + \hat{c}_1(\beta_1) \xi_2^2 \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中, $\hat{c}_1(\beta_1) > 0$ 是一个关于 β_1 的函数. 将式 (10) 和式 (11) 代入式 (9), 可得:

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) \leq -(n-1)\xi_1^2 + \hat{c}_1(\beta_1)\xi_2^2 + d_2\xi_2^{2-\frac{1}{p_1}}x_3^{p_2}$$

选取 $\beta_2 \geq [(\hat{c}_1(\beta_1) + n - 1)/d_2]^{p_1}$, 那么在虚拟控制器 $x_3^{*p_1 p_2} = -\beta_2 \xi_2$ 作用下, 有:

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) \leq -(n-1)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + d_2\xi_2^{2-\frac{1}{p_1}}(x_3^{p_2} - x_3^{*p_2})$$

类似于前述的步骤 1 和步骤 2, 可以设计虚拟控制器

$$u^*(x) = -b_n \xi_n(x) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} \quad (12)$$

使得下面关系式成立:

$$\begin{aligned}
 \dot{W}(x) & \leq -\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + \frac{3}{2}\xi_n^2\right) + \\
 & d_n \xi_n^{\frac{2-1}{p_1 \cdots p_{n-1}}} (u - u^*) \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 x_1^* & = 0, \quad \xi_1 = x_1 - x_1^*, \\
 x_2^{*p_1} & = -\beta_1 \xi_1, \quad \xi_2 = x_2^{p_1} - x_2^{*p_1}, \\
 & \vdots \\
 x_n^{*p_1 \cdots p_{n-1}} & = -\beta_{n-1} \xi_{n-1}, \quad \xi_n = x_n^{p_1 \cdots p_{n-1}} - x_n^{*p_1 \cdots p_{n-1}},
 \end{aligned}$$

以及 $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, b_n$ 为正的常数,

$$W(x) = \sum_{j=1}^n \int_{x_j^*}^{x_j} (s^{p_1 \cdots p_{j-1}} - x_j^{*p_1 \cdots p_{j-1}})^{2-\frac{1}{p_1 \cdots p_{j-1}}} ds$$

令 $b_{n-1} = \beta_{n-1}$, $b_{n-2} = \beta_{n-1}\beta_{n-2}$, $\dots$, $b_1 = \beta_{n-1} \cdots \beta_1$, 可以完成引理的证明. $\square$

对于一般的非线性系统, 设计离散控制器通常有两种方法. 第一种方法是: 首先得到原系统的离散时间模型, 然后再设计相应的离散控制器; 第二种方法是: 先设计连续时间形

式的控制器, 然后再离散化连续时间形式的控制器, 从而得到离散控制器. 由于本文所考虑的系统 (1) 是一类本质非线性系统, 该系统的离散时间模型同样是高度非线性的, 如何设计离散控制器十分困难, 因此, 本文将采用第二种方法. 基于引理 5, 下面可以设计一类采样反馈控制器来全局镇定系统 (1).

定理 1. 对于满足假设 1 和假设 2 的系统 (1), 存在合适的采样周期 T , 使得该系统可以被下面的采样状态反馈控制器全局镇定:

$$u(t) = -b_n \xi_n(x(t_k)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (14)$$

证明. 为完成定理的证明, 考虑任意两个相邻采样时刻点的系统状态. 不失一般性, 下面考虑 t_k 和 t_{k+1} 时刻的系统状态. 首先, 在控制器 (14) 作用下来估计式 (6). 根据引理 1, 可知对于 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 有:

$$\begin{aligned}
 |u - u^*| & = b_n |\xi_n(x(t_k)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} - \xi_n(x(t)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}| \leq \\
 & b_n 2^{1-\frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}} |\xi_n(x(t_k)) - \xi_n(x(t))| \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}
 \end{aligned}$$

基于该不等式, 由引理 2, 可得:

$$\begin{aligned}
 d_n \xi_n^{\frac{2-1}{p_1 \cdots p_{n-1}}} (u - u^*) & \leq \\
 & \frac{1}{2} \xi_n^2 + \gamma_1 |\xi_n(x(t_k)) - \xi_n(x(t))|^2 \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中, γ_1 为一个正的常数. 下面再来估计 $|\xi_n(x(t_k)) - \xi_n(x(t))|^2$. 根据引理 3, 可得:

$$\begin{aligned}
 |\xi_n(x(t_k)) - \xi_n(x(t))|^2 & = \left| \int_{t_k}^t \dot{\xi}_n(x(\mu)) d\mu \right|^2 \leq \\
 & (t - t_k) \int_{t_k}^t |\dot{\xi}_n(x(\mu))|^2 d\mu \quad (16)
 \end{aligned}$$

根据式 (6), (15) 和 (16), 可得:

$$\begin{aligned}
 \dot{W}(x) & \leq -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + \xi_n^2) + \\
 & \gamma_1 (t - t_k) \int_{t_k}^t |\dot{\xi}_n(x(\mu))|^2 d\mu, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (17)
 \end{aligned}$$

根据 ξ_n 的定义, 即 $\xi_n(x) = x_n^{p_1 \cdots p_{n-1}} + b_{n-1} x_{n-1}^{p_1 \cdots p_{n-2}} + \cdots + b_2 x_2^{p_1} + b_1 x_1$, 可知对于任意的 $\mu \in [t_k, t]$, 有:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_n(x(\mu)) & = -(p_1 \cdots p_{n-1}) x_n(\mu)^{p_1 \cdots p_{n-1}-1} \times \\
 & d_n b_n \xi_n(x(t_k)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} + \cdots + \\
 & b_2 p_1 x_2(\mu)^{p_1-1} d_2 x_3(\mu)^{p_2} + b_1 d_1 x_2(\mu)^{p_1} \quad (18)
 \end{aligned}$$

根据引理 2, 可得:

$$\begin{aligned}
 x_n(\mu)^{p_1 \cdots p_{n-1}-1} \xi_n(x(t_k)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} & = \\
 x_n(\mu)^{p_1 \cdots p_{n-1}(1-\frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}})} \xi_n(x(t_k)) \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} & \leq \\
 \left(1 - \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}\right) |x_n(\mu)|^{p_1 \cdots p_{n-1}} + \\
 \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} |\xi_n(x(t_k))| \quad (19)
 \end{aligned}$$

基于式 (18), 并通过与式 (19) 类似的不等式证明可以得到:

$$\begin{aligned} |\dot{\xi}_n(x(\mu))| &\leq \left(1 - \frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}}\right) |x_n(\mu)|^{p_1 \cdots p_{n-1}} + \\ &\frac{1}{p_1 \cdots p_{n-1}} |\xi_n(x(t_k))| + \cdots + b_2 p_1 |x_2(\mu)|^{p_1(1-\frac{1}{p_1})} \times \\ &\bar{d}_2 |x_3(\mu)|^{p_1 p_2 \cdot \frac{1}{p_1}} + b_1 d_1 x_2(\mu)^{p_1} \leq \\ &\gamma_2 (|x_1(\mu)| + |x_2(\mu)|^{p_1} + |x_3(\mu)|^{p_1 p_2} + \cdots + \\ &|x_n(\mu)|^{p_1 \cdots p_{n-1}} + |\xi_n(x(t_k))|) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, γ_2 为一个正的常数. 根据式 (18) 和式 (20), 可知存在一个常数 $\gamma_3 \geq 0$, 使得:

$$\begin{aligned} (t - t_k) \int_{t_k}^t |\dot{\xi}_n(x(\mu))|^2 d\mu &\leq \\ (t - t_k) \int_{t_k}^t \gamma_3 (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu + \\ (t - t_k)^2 \gamma_3 \xi_n(x(t_k))^2 \end{aligned} \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (17), 并注意到 $t - t_k \leq T$, 则有:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x) &\leq -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 + \xi_n^2) + \\ T \gamma_1 \gamma_3 \int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu + \\ T^2 \gamma_1 \gamma_3 \xi_n(x(t_k))^2 \end{aligned} \quad (22)$$

构造一个 Lyapunov 泛函如下:

$$\begin{aligned} W_2(t) &= \gamma_1 \gamma_3 \times \\ &\int_{t-T}^t \int_{\rho}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu d\rho \end{aligned} \quad (23)$$

对其求导, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 &= \gamma_1 \gamma_3 \times \\ &\int_{t-T}^t \frac{d \left[\int_{\rho}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu \right]}{dt} d\rho + \\ &\gamma_1 \gamma_3 \int_t^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu - \\ &\gamma_1 \gamma_3 \int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu = \\ &T \gamma_1 \gamma_3 (x_1(t)^2 + \cdots + x_n(t)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) - \\ &\gamma_1 \gamma_3 \int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu \end{aligned} \quad (24)$$

综上, 取 Lyapunov 函数 $V = W + W_2$ 作为最终的 Lyapunov 函数. 根据式 (22) 和式 (24), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) + T \gamma_1 \gamma_3 (x_1^2 + \cdots + x_n^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) - \\ &(1 - T) \gamma_1 \gamma_3 \int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu + \\ &T^2 \gamma_1 \gamma_3 \xi_n(x(t_k))^2 \end{aligned} \quad (25)$$

定义齐次扩张

$$r_1 = 1, \quad r_i = \frac{1}{p_1 \cdots p_{i-1}}, \quad i = 2, \cdots, n \quad (26)$$

根据齐次性的定义即定义 1, 可知函数 $H_1(x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$ 和 $H_2(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^{2p_1 \cdots p_{n-1}}$ 都是关于扩张 $(r_1, \cdots, r_n)$ 的齐次度为 2. 因此, 根据引理 4, 存在一个常数 $\gamma_4 \geq 0$, 使得:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^{2p_1 \cdots p_{n-1}} \leq \gamma_4 (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) \quad (27)$$

将不等式 (27) 代入式 (25), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(1 - T \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4) (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) - (1 - T) \gamma_1 \gamma_3 \times \\ &\int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu + \\ &T^2 \gamma_1 \gamma_3 \xi_n(x(t_k))^2 \end{aligned} \quad (28)$$

此外, 根据齐次性的定义可知, 正定函数 $W(x)$ 关于扩张 $(r_1, \cdots, r_n)$ 的齐次度是 2. 因此, 根据引理 4 可知, 存在常数 $\gamma_5 > 0$ 和 $\gamma_6 > 0$, 使得:

$$\gamma_5 (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) \leq W(x) \leq \gamma_6 (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2) \quad (29)$$

同时, 注意到

$$W_2 \leq \gamma_1 \gamma_3 T \int_{t-T}^t (x_1(\mu)^2 + \cdots + x_n(\mu)^{2p_1 \cdots p_{n-1}}) d\mu \quad (30)$$

将以上两个不等式 (29) 和 (30) 代入式 (28), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(1 - T \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4) \frac{1}{\gamma_6} W - (1 - T) \frac{1}{T} W_2 + \\ &T^2 \gamma_1 \gamma_3 \frac{1}{\gamma_5} W(x(t_k)) \end{aligned} \quad (31)$$

很明显, 存在适当的采样周期 T , 使得:

$$\begin{aligned} (1 - T \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4) \frac{1}{\gamma_6} &\geq \hat{\rho} \\ (1 - T) \frac{1}{T} &\geq \hat{\rho} \\ T^2 \gamma_1 \gamma_3 \frac{1}{\gamma_5} &\leq \frac{\hat{\rho}}{2} \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $0 < \hat{\rho} < 1/\gamma_6$ 为一个常数. 因此

$$\dot{V}(t) \leq -\hat{\rho} V(t) + \frac{\hat{\rho}}{2} V(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (33)$$

此外, 注意到状态 $x(t)$ 是连续的, 从而函数 $W(t)$ 也是连续的. 由于函数 $W_2(t)$ 是一个积分函数, 所以该函数也是一个连续的函数. 因此, 函数 $V(t)$ 是一个连续的函数. 令 $\chi(t) = V(t)/V(t_k)$, 通过计算可得:

$$\dot{\chi}(t) \leq -\hat{\rho}\chi(t) + \frac{\hat{\rho}}{2}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (34)$$

注意到 $\chi(t_k) = 1$, 根据式 (34), 可得:

$$\chi(t_{k+1}) \leq e^{-\hat{\rho}T} + \left(1 - e^{-\hat{\rho}T}\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\hat{\rho}T} = \rho < 1 \quad (35)$$

从而导致

$$V(t_{k+1}) \leq \rho V(t_k)$$

注意到该关系对任意 k 都成立. 因此, 当 k 趋向于无穷大时, $V(t_k)$ 将会收敛到 0. 也就是说系统 (1) 在采样控制器 (14) 作用下是全局渐近稳定的. $\square$

注 2. 从定理 1 的证明过程可知, 为了选取采样周期 T , 必须根据式 (32) 来确定. 很明显, 为确定这个参数, 需要首先选取一个正数 $\hat{\rho}$ 满足 $0 < \hat{\rho} < 1/\gamma_6$. 尽管本文并没有给出具体的 γ_6 表达式, 但是对于具体的系统而言, 根据每一步所用的不等式, 可以给出具体的表达式. 此外, 由于每一步都采用了不等式进行缩放, 导致了所选取的参数具有一定的保守性. 因此在实际应用中, 可以采用“试凑法”来选取合适的采样周期以获得满意的控制效果.

注 3. 对于系统 (1), 采样控制器的设计步骤为: 1) 基于加幂积分技术, 设计连续时间形式的控制器 (5); 2) 设计离散时间形式的控制器 (14), 并根据式 (32) 来选择适当的采样周期.

注 4. 尽管定理 1 中的采样控制器设计采用的是直接离散化连续时间形式控制器的方法, 但并不是所有系统的连续时间形式控制器离散化都能保证闭环系统的全局渐近稳定性. 如针对简单的一阶系统: $\dot{x}(t) = u$, 在三种连续时间形式控制器:

$$u = -x(t), \quad u = -x(t)^{\frac{1}{3}}, \quad u(t) = -x(t)^3$$

作用下, 闭环系统都是渐近稳定的, 其中在第二种控制器作用下还是有限时间收敛的^[20]. 然而, 在相应的采样控制器作用下, 闭环系统的稳定性却不同. 通过选取合适的采样周期, 在第一种采样控制器, 即 $u = -x(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ 作用下, 闭环系统是全局渐近稳定的; 在第二种采样控制器, 即 $u = -x(t_k)^{1/3}, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ 作用下, 闭环系统是全局实用稳定的; 在第三种采样控制器, 即 $u = -x(t_k)^3, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ 作用下, 闭环系统是半全局渐近稳定的, 其中后面两种情形的具体稳定性分析见文献 [21]. 同样地, 对于本文所考虑的高维非线性系统, 可以设计不同类型的连续时间形式控制器^[22], 如有限时间稳定的控制器, 但相应的离散化采样控制器却不能都保证闭环系统的全局有限时间稳定性甚至渐近稳定性. 本文给出了一种可以保证闭环系统全局渐近稳定的采样控制器.

3 数值仿真

例 1. 针对文献 [5–6] 中一类机械系统的简化近似模型:

$$\dot{x}_1 = d_1(t)x_2, \quad \dot{x}_2 = d_2(t)x_3, \quad \dot{x}_3 = d_3(t)u \quad (36)$$

考虑基于采样控制的全局镇定问题. 与文献 [5–6] 中不同的是, 此处还考虑了参数不确定性, 且时变参数满足 $1 \leq d_i(t) \leq 1.5, i = 1, 2, 3$. 根据定理 1, 存在下面的采样状态反馈控制器来全局镇定该非线性系统:

$$u(t) = u(t_k) = -3 \left(x_3^3(t_k) + \frac{3}{2}(x_2(t_k) + \frac{1}{2}x_1(t_k)) \right)^{\frac{1}{3}} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (37)$$

仿真中, 时变参数选为 $d_1 = 1, d_2 = 1.2, d_3 = 1.25 + 0.25 \times \sin(t)$, 采样周期选为 $T = 0.1$ 秒, 系统的初始值为 $x(0) = [2, -3.5, 0.8]^T$. 图 1 和图 2 分别为系统 (36) 在采样状态反馈控制器 (37) 作用下的响应曲线.

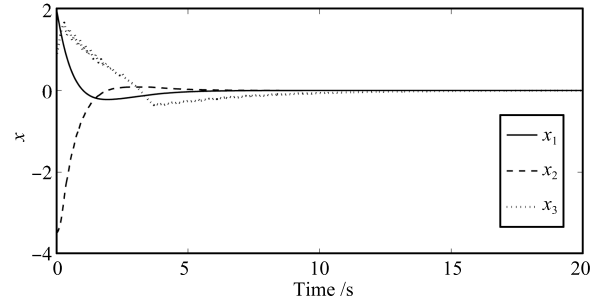


图 1 系统的状态响应曲线

Fig. 1 State response curves of the system

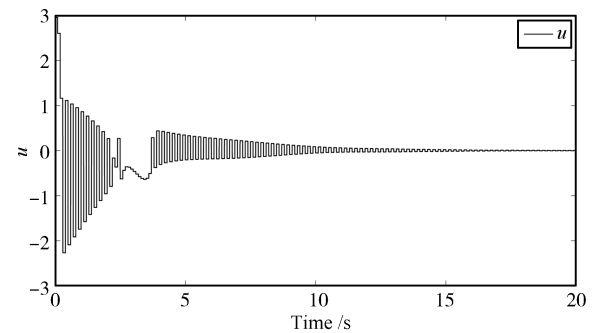


图 2 控制器 (37) 的响应曲线

Fig. 2 Response curve of controller (37)

4 结论

本文主要研究了一类含不确定参数的本质非线性系统的采样反馈镇定问题. 由于系统的线性化存在不能控模态, 使得现有的光滑采样反馈控制结果都无法适用. 本文基于加幂积分技术和递归设计思想, 通过合理地构造 Lyapunov 泛函, 系统地构造了一类非光滑采样状态反馈控制器, 解决了一类非线性系统的采样反馈镇定问题. 此外, 本文考虑的仅是基于采样控制的状态反馈镇定, 下一步的方向是考虑基于采样控制的输出反馈镇定问题.

References

- 1 Hong Y G. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems and Control Letters*, 2002, **46**(4): 231–236
- 2 Li Shi-Hua, Ding Shi-Hong, Tian Yu-Ping. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 101–104
(李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法. *自动化学报*, 2007, **33**(1): 101–104)

- 3 Ding Shi-Hong, Li Shi-Hua. Global finite-time stabilization of nonlinear integrator systems subject to input saturation. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(10): 1222–1231
(丁世宏, 李世华. 输入饱和下的非线性积分系统的全局有限时间镇定. 自动化学报, 2011, **37**(10): 1222–1231)
 - 4 Ding S H, Qian C J, Li S H, Li Q. Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(3): 271–294
 - 5 Rui C L, Reyhanguolu M, Kolmanovsky I, Cho S, McClamroch N H. Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical system. In: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, California: IEEE, 1997. 3998–4003
 - 6 Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061–1079
 - 7 Qian C J, Lin W. Nonsmooth output feedback stabilization of a class of genuinely nonlinear systems in the plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(10): 1824–1829
 - 8 Qian C J, Lin W. Recursive observer design, homogeneous approximation, and nonsmooth output feedback stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(9): 1457–1471
 - 9 Li J, Qian C J, Ding S H. Global finite-time stabilisation by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems. *International Journal of Control*, 2010, **83**(11): 2241–2252
 - 10 Åström K J, Wittenmark B. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design (3rd Edition)*. NJ: Prentice Hall, 1997
 - 11 Nešić D, Teel A R, Kokotović P V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems and Control Letters*, 1999, **38**(4–5): 259–270
 - 12 Nešić D, Teel A R, Carnevale D. Explicit computation of the sampling period in emulation of controllers for nonlinear sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(3): 619–624
 - 13 Karafyllis I, Kravaris C. Global stability results for systems under sampled-data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19**(10): 1105–1128
 - 14 Dabroom A M, Khalil H K. Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(11): 1712–1725
 - 15 Khalil H K. Performance recovery under output feedback sampled-data stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2173–2184
 - 16 Zhang Jian, Xu Hong-Bing, Zhang Hong-Bin. Observer-based sampled-data control for a class of continuous nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(12): 1780–1787
(张健, 徐红兵, 张洪斌. 基于观测器的一类连续非线性系统的采样控制. 自动化学报, 2010, **36**(12): 1780–1787)
 - 17 Qian C, Du H. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems via linear sampled-data control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2934–2939
 - 18 Hermes H. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential Equations, Stability and Control, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Dekker: New York, 1991, 249–260
 - 19 Bacciotti A, Roiser L. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer, 2005
 - 20 Ding Shi-Hong, Li Shi-Hua. A survey for finite-time control problems. *Control and Decision*, 2011, **26**(2): 161–169
(丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述. 控制与决策, 2011, **26**(2): 161–169)
 - 21 Yu X H, Xu J X, Hong Y G, Yu S H. Analysis of a class of discrete-time systems with power rule. *Automatica*, 2007, **43**(3): 562–566
 - 22 Polendo J, Qian C J. An expanded method to robustly stabilize uncertain nonlinear systems. *Communications in Information and Systems*, 2008, **8**(1): 55–70
- 都海波 博士, 合肥工业大学电气与自动化工程学院讲师. 主要研究方向为非线性系统控制和多智能体系统协调控制. 本文通信作者.
E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn
(DU Hai-Bo Ph.D., lecturer at the School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology. His research interest covers nonlinear system control and multi-agent systems cooperative control. Corresponding author of this paper.)
- 李世华 博士, 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为非线性系统控制, 交流伺服控制和飞控系统. E-mail: lsh@seu.edu.cn
(LI Shi-Hua Ph.D., professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear system control, AC servo control, and flight control system.)
- 钱春江 博士, 美国德克萨斯大学圣安东尼奥分校电子与计算机工程系教授. 主要研究方向为非线性系统控制.
E-mail: chunjiang.qian@utsa.edu
(QIAN Chun-Jiang Ph.D., professor in the Department of Electrical and Computer Engineering, the University of Texas at San Antonio, USA. His main research interest is nonlinear system control.)
- 何怡刚 博士, 合肥工业大学电气与自动化工程学院教授. 主要研究方向为电路理论及其应用. E-mail: hyghnu@yahoo.com.cn
(HE Yi-Gang Ph.D., professor at the School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology. His research interest covers circuit theory and its applications.)