

一类线性时变系统的输出反馈控制

张健¹ 辛晓帅¹ 徐红兵¹

摘要 基于线性时不变系统能控能观标准型变换及非线性系统高增益观测器方法, 本文研究了一类线性时变系统的输出反馈控制问题. 通过引入时变的状态变量坐标变换, 分别设计了线性时变系统的状态反馈控制器、状态观测器以及基于状态观测器的输出反馈控制器. 进一步地, 本文分别证明了观测器动态误差是渐近收敛于零的, 而状态反馈控制器以及输出反馈控制器可以保证闭环系统的渐近稳定性.

关键词 线性时变系统, 反馈控制, 观测器, 标准型, 渐近稳定

引用格式 张健, 辛晓帅, 徐红兵. 一类线性时变系统的输出反馈控制. 自动化学报, 2014, 40(2): 373–378

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00373

Output Feedback Control of a Class of Linear Time-varying Systems

ZHANG Jian¹ XIN Xiao-Shuai¹ XU Hong-Bing¹

Abstract In this paper, output feedback control is investigated for a class of linear time-varying systems based on the ideas of controllable and observable canonical forms in the theory of linear time-invariant systems and high-gain observers in the theory of nonlinear systems. The state feedback controller, the state observer and the observer-based output feedback controller are respectively derived for linear time-varying systems by using time-varying transformations of state variables. It is further proved that the observer errors are asymptotically convergent to zero, and the state feedback controller and output feedback controller can demonstrate the asymptotic stability of the closed-loop system.

Key words Linear time-varying systems, feedback control, observer, canonical forms, asymptotic stability

Citation Zhang Jian, Xin Xiao-Shuai, Xu Hong-Bing. Output feedback control of a class of linear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(2): 373–378

线性时不变系统 (Linear time-invariant systems, LTI) 是线性时变系统 (Linear time-varying systems, LTV) 的一个特例. LTV 系统的分析与控制要比 LTI 系统复杂得多. 近年来, 对于 LTV 系统的研究已经取得了许多新的成果^[1–16].

可控性与可观性的判定是 LTV 系统控制理论中的基础性问题. 上世纪 60 年代, Silverman 与 Meadows 作出了奠基性的工作, 提供了 LTV 系统完全可控与完全可观的充分非必要条件, 并已被很多线性系统理论教科书采用. 文献 [1] 延续了该问题的研究, 给出了一个新的基于模理论 (Module theory) 的框架结构. 文献 [2] 提出了一个形式更为简洁、更具有实用价值的非完全可控与非完全可观的充分条件. 文献 [3] 给出了线性时变系统可控性判定的两个必要条件, 通过利用对偶原理, 这些条件可以被推广到可观性的判定中.

在 LTV 系统的控制理论研究中, 反馈控制占有极其重要的地位. 与 LTI 系统类似, 其状态反馈控制、观测器设计都可以归结为时变矩阵的极点配置问题. 然而, 与 LTI 系统不同的是, 对于一般形式的 LTV 系统, 目前尚没有一种系统化的方法解决这一问题. 传统的处理方法主要包括两类: 一类是基于鲁棒控制的方法, 该方法的基本思想是将系数矩阵的时变部分视为系统模型的不确定性, 因而该类方法通常要求时变系数矩阵的变化范围不应过大; 另一类是基于抽象代数理论的多项式方法^[4], 然而该类方法仅仅能够处理一类特殊的 LTV 系统.

稳定性分析也是 LTV 系统研究的一个基础问题, 文献 [5] 利用扰动时间冻结方法 (Perturbed frozen time) 分析了自治 LTV 系统的稳定性问题, 给出了系统稳定的充分条件. 通过在一个时间网格内逐次求解李亚普诺夫方程, 文献 [6] 给出了一种基于数值计算的 LTV 系统渐近稳定性的判断方法. 不同于反馈控制中通常使用的渐近稳定性分析, 文献 [7–8] 基于上世纪 60 年代提出的有限时间稳定性 (Finite-time stability, FTS) 的概念, 通过使用李亚普诺夫稳定性分析方法, 给出了保证 LTV 系统有限时间稳定的状态反馈与输出反馈控制器的设计方法. 文献 [9] 讨论了一类线性时变系统的鲁棒稳定化问题, 并给出了控制器设计方法.

LTV 系统与非线性系统的研究有着密切的联系. 一方面, 一些非线性控制系统的分析方法被引入到 LTV 系统中. 文献 [10] 将相对阶 (Relative degree) 与零动态 (Zero dynamics) 的概念引入到 LTV 系统的分析中, 通过利用线性时变的坐标变换, 推导了 LTV 系统的一个标准型 (Normal form). 在文献 [11] 中, 非线性控制系统中的反演 (Backstepping) 方法被应用于一类 LTV 系统的跟踪控制中. 当 LTV 系统参数完全已知时, 控制器可以保证跟踪误差指数渐近收敛于零, 当 LTV 系统参数部分已知时, 控制器可以保证跟踪误差渐近收敛于零. 另一方面, LTV 系统中的一些方法和结论也被应用于非线性控制理论的研究中. 文献 [12] 综合了近年来这方面的相关研究成果, 提供了一个较为系统翔实的讨论与总结.

此外, 近年来 LTV 系统的其他控制问题也得到了很多关注. 文献 [13] 借鉴重复控制 (Repetitive control) 的思想, 利用系统的输入–输出模型而不是状态空间表达式讨论了轨迹跟踪控制问题. 文献 [14] 研究了一类 LTV 系统的同步问题, 给出了有界输出同步线性控制器存在的充分条件及设计方法. 文献 [15] 研究了 LTV 系统的“装配控制 (Assemble control)”问题, 给出了其可控性判定的充分条件, 设计了“装配控制”律, 并分析了控制器性能. 进一步地, 文献 [16] 将“装配控制”方法应用于差速移动机器人中, 取得了良好的控制效果.

在已有的成果中, 对于基于状态观测器的输出反馈控制器的研究较少. 标准型方法是 LTI 系统分析的经典方法, 本文利用这一思想首先引入两个时变的状态变量坐标变换, 将系统状态空间表达式及观测器误差表达式化为类 LTI 可控标准型与可观标准型形式. 由于所得到的标准型与非线性系统高增益观测器 (High-gain observer)^[17–18] 中的研究对象相似, 因此, 本文利用高增益观测器思想分别设计了状态反馈控制器和状态观测器, 并证明了设计得到的状态反馈控制器可以保证闭环系统渐近稳定, 而状态观测器能够渐近收敛于被控系统状态. 接下来, 基于上述结果, 本文提出了一种基于观测器的输出反馈控制器, 并证明了该输出反馈控制器可以保证闭环系统渐近稳定. 本文的主要结果可以看作是 LTI

收稿日期 2012-10-31 录用日期 2013-03-11
Manuscript received October 31, 2012; accepted March 11, 2013
国家自然科学基金 (61004048), 航空科学基金 (20121080006) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61004048) and Aviation Science Foundation of China (20121080006)
本文责任编辑 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 电子科技大学自动化工程学院 成都 611731
1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731

系统理论中能控能观标准型方法及非线性系统高增益观测器方法在 LTV 系统中的延伸与应用.

1 问题描述与引理

考虑下述时变线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

上式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为 LTV 系统的状态变量, $u(t), y(t) \in \mathbf{R}$ 分别为系统输入和输出, $A(t), B(t), C(t)$ 为相应维数的时变系数矩阵.

在下面的研究中, 本文将对系统 (1) 作如下假设.

假设 1. 系数矩阵 $A(t), B(t), C(t)$ 中的各元素及其一阶导数是有界的.

假设 2. 矩阵 $M_c(t)$ 与 $M_o(t)$ 对于任意 $t \geq 0$ 都是满秩的, 这里

$$M_c(t) = [B(t), A(t)B(t), \dots, A^{n-1}(t)B(t)]$$

$$M_o(t) = \begin{bmatrix} C(t) \\ C(t)A(t) \\ \vdots \\ C(t)A^{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

假设 3. 存在三个正常数 $\sigma_c, \sigma_o, \sigma_{co}$, 使得对于任意 $t \geq 0$, 下述不等式成立:

$$\|\dot{M}_c^{-1}(t)M_c(t)\| \leq \sigma_c \quad (3a)$$

$$\|\dot{M}_o(t)M_o^{-1}(t)\| \leq \sigma_o \quad (3b)$$

$$\|M_c^{-1}(t)M_o^{-1}(t)\| \leq \sigma_{co} \quad (3c)$$

注 1. 当系统 (1) 为 LTI 系统时, 假设 1 和假设 3 自然满足, 假设 2 降低为系统既完全可控又完全可观的充要条件.

本文的研究目标是设计基于状态观测器的输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + B(t)u(t) + \mathbf{L}(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ u(t) = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (4)$$

使得由式 (1) 与式 (4) 构成的闭环系统渐近稳定, 这里, $\mathbf{L}(t)$ 与 $\mathbf{F}(t)$ 分别为待设计的控制器与观测器反馈增益向量.

接下来, 本文证明下面的引理, 它将在下一部分的证明中起到作用.

引理 1. 矩阵 $M_c(t)$ 和 $M_o(t)$ 分别满足下述等式:

$$M_c^{-1}(t)A(t)M_c(t) = A_c + \Lambda_c(t)$$

$$M_c^{-1}(t)B(t) = B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$M_o(t)A(t)M_o^{-1}(t) = A_o + \Lambda_o(t)$$

$$C(t)M_o^{-1}(t) = C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{这里, } A_c = A_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_o(t) = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ \gamma_{1 \times n}^o(t) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_c(t) = \begin{bmatrix} 0_{n \times (n-1)} & \gamma_{n \times 1}^c(t) \end{bmatrix}.$$

证明. 注意到

$$A(t)M_c(t) = M_c(t)A_c + \begin{bmatrix} 0_{n \times (n-1)} & A^n(t)B(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = M_c(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

及

$$M_o(t)A(t) = A_oM_o(t) + \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ C(t)A^n(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} M_o(t) \quad (7)$$

由假设 2, 矩阵 $M_c(t)$ 和 $M_o(t)$ 都是可逆的, 那么式 (6) 两边左乘以 $M_c^{-1}(t)$ 、式 (7) 两边右乘以 $M_o^{-1}(t)$ 即得式 (5), 且有

$$\gamma_{n \times 1}^c(t) = M_c^{-1}(t)A^n(t)B(t)$$

$$\gamma_{1 \times n}^o(t) = C(t)A^n(t)M_o^{-1}(t) \quad (8)$$

□

注 2. 当系统 (1) 为 LTI 系统时, 式 (5) 退化为 LTI 系统的能控标准型与能观标准型变换.

2 主要结果

本节分为三个部分, 分别研究状态反馈控制器、状态观测器以及输出反馈控制器的设计.

2.1 状态反馈控制器设计

当 LTV 系统状态变量已知时, 可以通过状态反馈控制实现系统镇定. 本文所设计的状态反馈控制器如下

$$u(t) = \mathbf{K}_c \Delta_\alpha^{-1} M_c^{-1}(t) \mathbf{x}(t) \quad (9)$$

这里, $\Delta_\alpha = \text{diag}\{\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \dots, \alpha^{-n}\}$, α 为一待设计的参数, $\mathbf{K}_c$ 为满足条件

$$\text{Re}(\lambda_i(A_c + B_c \mathbf{K}_c)) < 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (10)$$

的任一方向量.

注 3. 由引理 1 知, 矩阵 A_c 与 B_c 为 Brunowsky 标准型, 因此满足条件 (10) 的方向量 $\mathbf{K}_c$ 总是存在的.

由 LTV 系统 (1) 与状态反馈控制器 (9) 构成的闭环系统的稳定性性质可以由下述定理描述.

定理 1. 假设矩阵 $M_c(t)$ 满足假设 1~3, 那么总是存在常数 $\alpha_0 \geq 1$, 对于任意 $\alpha > \alpha_0$, 闭环系统是渐近稳定的.

证明. 定义时变的状态变量坐标变换 $\mathbf{z}(t) = \Delta_\alpha^{-1} M_c^{-1}(t) \mathbf{x}(t)$, 那么在 $\mathbf{z}$ 坐标系下, LTV 系统 (1) 可以重新表达为

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \Delta_\alpha^{-1} M_c^{-1}(t) A(t) M_c(t) \Delta_\alpha \mathbf{z}(t) + \Delta_\alpha^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_\alpha \mathbf{z}(t) + \Delta_\alpha^{-1} M_c^{-1}(t) B(t) u(t) \quad (11)$$

将状态反馈控制器 (9) 代入式 (11), 由引理 1 进一步得到:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}(t) = & \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) A(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \\
& \Delta_{\alpha}^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \\
& \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) B(t) \mathbf{K}_c \mathbf{z}(t) = \\
& \Delta_{\alpha}^{-1} A_c \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \Delta_{\alpha}^{-1} B_c \mathbf{K}_c \mathbf{z}(t) + \\
& \Delta_{\alpha}^{-1} \Lambda_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \Delta_{\alpha}^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t)
\end{aligned} \quad (12)$$

进一步注意到 $\Delta_{\alpha}^{-1} A_c \Delta_{\alpha} = \alpha A_c$, $\Delta_{\alpha}^{-1} B_c \mathbf{K}_c = \alpha B_c \mathbf{K}_c$, 因此有:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}}(t) = & \alpha (A_c + B_c \mathbf{K}_c) \mathbf{z}(t) + \Delta_{\alpha}^{-1} \Lambda_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \\
& \Delta_{\alpha}^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t)
\end{aligned} \quad (13)$$

由式 (10) 可以推出存在一个对称正定矩阵 P_1 , 使得下式成立:

$$P_1 (A_c + B_c \mathbf{K}_c) + (A_c + B_c \mathbf{K}_c)^T P_1 = -I_n \quad (14)$$

取李亚普诺夫函数 $V_1(t) = \mathbf{z}^T(t) P_1 \mathbf{z}(t)$, 那么由式 (13) 和式 (14), 得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) = & 2\mathbf{z}^T(t) P_1 \dot{\mathbf{z}}(t) = \\
& -\alpha \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) + 2\mathbf{z}^T(t) P_1 \Delta_{\alpha}^{-1} \Lambda_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \\
& 2\mathbf{z}^T(t) P_1 \Delta_{\alpha}^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t)
\end{aligned} \quad (15)$$

由于

$$\Delta_{\alpha}^{-1} \Lambda_c(t) \Delta_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0_{n \times (n-1)} & \gamma_{n \times 1}^{cf}(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

这里, $\gamma_{n \times 1}^{cf}(t) = \text{diag}\{1/\alpha^{n-1}, 1/\alpha^{n-2}, \dots, 1\} \cdot \gamma_{n \times 1}^c(t)$. 所以存在常数 $\bar{\alpha}_0 \geq 1$ 及 $\rho_c > 0$, 使得当 $\alpha > \bar{\alpha}_0$ 时, $\|\Delta_{\alpha}^{-1} \Lambda_c(t) \Delta_{\alpha}\| \leq \rho_c$. 因此有:

$$\dot{V}_1(t) \leq -(\alpha - 2\lambda_{\max}(P_1)\rho_c - 2\lambda_{\max}(P_1)\sigma_c) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) \quad (17)$$

这里, $\lambda_{\max}(P_1)$ 表示矩阵 P_1 的最大特征值. 选取 $\alpha_0 = \max\{\bar{\alpha}_0, 2\lambda_{\max}(P_1)(\rho_c + \sigma_0)\}$, 那么对于任意 $\alpha > \alpha_0$, 当 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ 时, $\dot{V}_1(t) < 0$ 成立. 所以 $\mathbf{z}(t)$ 是渐近稳定的. 由假设 2, 可以进一步推得 $\mathbf{x}(t)$ 也是渐近稳定的. $\square$

2.2 状态观测器设计

当 LTV 系统状态未知时, 可以通过状态观测器对 LTV 系统状态进行重构. 本文所设计的状态观测器如下:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = & A(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + B(t) u(t) + \\
& M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \mathbf{K}_o (y(t) - \hat{y}(t))
\end{aligned} \quad (18)$$

这里, $\Delta_{\beta} = \text{diag}\{\beta^{-1}, \beta^{-2}, \dots, \beta^{-n}\}$, β 为一待设计的参数, $\mathbf{K}_o$ 为满足条件

$$\text{Re}(\lambda_i(A_o - \mathbf{K}_o C_o)) < 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (19)$$

的任一列向量.

注 4. 由引理 1 知, 矩阵 A_o 与 C_o 为 Brunowsky 标准型, 因此满足条件 (19) 的列向量 $\mathbf{K}_o$ 总是存在的.

在状态观测器研究中, $u(t)$ 可以被认为是已知的. 定义 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, 那么有:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = A(t) \mathbf{e}(t) - M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \mathbf{K}_o C(t) \mathbf{e}(t) \quad (20)$$

下面的定理将表明观测器动态误差 (20) 是渐近稳定的.

定理 2. 如果矩阵 $M_c(t)$ 满足假设 1~3, 那么总是存在常数 $\beta_0 \geq 1$, 对于任意 $\beta > \beta_0$, 观测器误差渐近收敛于 0.

证明. 考虑到状态反馈与观测器设计的对偶性, 取时变的变量变换 $\bar{\mathbf{e}}(t) = \Delta_{\beta} M_o(t) \mathbf{e}(t)$ 及李亚普诺夫函数 $V_2(t) = \bar{\mathbf{e}}^T(t) P_2 \bar{\mathbf{e}}(t)$, 这里 P_2 满足

$$P_2 (A_o - \mathbf{K}_o C_o) + (A_o - \mathbf{K}_o C_o)^T P_2 = -I_n \quad (21)$$

通过与定理 1 类似的推导, 可以得到:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) \leq & -\beta \bar{\mathbf{e}}^T(t) \bar{\mathbf{e}}(t) + 2\lambda_{\max}(P_2) \rho_o \bar{\mathbf{e}}^T(t) \bar{\mathbf{e}}(t) + \\
& 2\lambda_{\max}(P_2) \sigma_o \bar{\mathbf{e}}^T(t) \bar{\mathbf{e}}(t)
\end{aligned} \quad (22)$$

上式中, $\rho_o > 0$ 为一常数, 且满足当 $\beta > \bar{\beta}_0 \geq 1$ 时, $\left\| \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ \gamma_{1 \times n}^{of}(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \rho_o$ 成立, 这里, $\gamma_{1 \times n}^{of}(t) = \gamma_{1 \times n}^o(t) \cdot \text{diag}\{\beta^{-(n-1)}, \beta^{-(n-2)}, \dots, 1\}$.

选取 $\beta_0 = \max\{\bar{\beta}_0, 2\lambda_{\max}(P_2)(\rho_o + \sigma_o)\}$, 那么对于任意 $\beta > \beta_0$, 当 $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$ 时, $\dot{V}_2(t) < 0$ 成立. 所以 $\bar{\mathbf{e}}(t)$ 是渐近稳定的. 由假设 2 可以推得 $\mathbf{e}(t)$ 也是渐近稳定的. $\square$

2.3 输出反馈控制器设计.

当系统状态未知时, 状态反馈控制器 (9) 无法实现. 在以上结果的基础上, 将状态观测器 (18) 重构的状态 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 替换状态反馈控制器 (9) 中的系统状态 $\mathbf{x}(t)$, 得到如下基于状态观测器的输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + B(t) u(t) + \\ \quad M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \mathbf{K}_o (y(t) - \hat{y}(t)) \\ u(t) = \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (23)$$

那么, 该输出反馈控制器将与 LTV 被控系统 (1) 一起构成动态反馈闭环控制系统, 下面的定理给出了该输出反馈控制器的控制性能.

定理 3. 如果矩阵 $M_c(t)$ 与 $M_o(t)$ 满足假设 1~3, 那么对于任意 $\alpha > \alpha_0$ 与 $\beta > \beta_0$, 由输出反馈控制器 (23) 与 LTV 被控对象 (1) 构成的闭环系统是渐近稳定的.

证明. 考虑到 $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{e}(t)$, 那么在 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{e}(t)$ 坐标系下闭环系统可表达为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + B(t) \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) = A(t) \mathbf{e}(t) - M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \mathbf{K}_o C(t) \mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (24)$$

接下来, 引入时变的状态变量坐标变换

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t) = \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) \mathbf{x}(t) \\ \bar{\mathbf{e}}(t) = \Delta_{\beta} M_o(t) \mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (25)$$

在 $\mathbf{z}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{e}}(t)$ 坐标系下, 有:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = & \mathbf{x}(t) - \mathbf{e}(t) = \\
& M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) - M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(t)
\end{aligned} \quad (26)$$

因此, 闭环系统 (24) 可以重新表达为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) A(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) + \\ \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) B(t) \mathbf{K}_c \mathbf{z}(t) + \\ \Delta_{\alpha}^{-1} \dot{M}_c^{-1}(t) M_c(t) \Delta_{\alpha} \mathbf{z}(t) - \\ \alpha B_c \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(t) M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = \Delta_{\beta} M_o(t) A(t) M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(t) - \\ \mathbf{K}_o C(t) M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(t) + \\ \Delta_{\beta} \dot{M}_o(t) M_o^{-1}(t) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(t) \end{cases} \quad (27a)$$

由于式 (27b) 与定理 2 中的观测器动态误差表达式相同, 因此由式 (22) 可以进一步推得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq -(\beta - \beta_0) \bar{\mathbf{e}}^T(t) \bar{\mathbf{e}}(t) \leq \\ &- \frac{(\beta - \beta_0) V_2(t)}{\lambda_{\max}(P_2)} \end{aligned} \quad (28)$$

所以, 当 $t_0 = 0$ 时, 有:

$$\|\bar{\mathbf{e}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{V_2(0)}{\lambda_{\min}(P_2)}} e^{-\mu_2 t} \quad (29)$$

这里, $\mu_2 = \frac{\beta - \beta_0}{2\lambda_{\max}(P_2)}$. 将 $\bar{\mathbf{e}}(t)$ 视为式 (27a) 的输入, 那么由线性时变控制系统解的表达形式可以推出式 (27a) 的解析解为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{z}_0 + \\ &\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \alpha B_c \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(\tau) M_o^{-1}(\tau) \Delta_{\beta}^{-1} \bar{\mathbf{e}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

这里, $\Phi(t, t_0)$ 为式 (27a) 的时变状态转移矩阵.

考虑到式 (27a) 中的自治部分等同于式 (12), 由定理 1, 经过与式 (28) 和 (29) 类似的推导, 当 $t_0 = 0$ 时, 可以得到:

$$\|\Phi(t, 0) \mathbf{z}_0\| \leq \sqrt{\frac{V_1(0)}{\lambda_{\min}(P_1)}} e^{-\mu_1 t} \quad (31)$$

这里, $\mu_1 = \frac{\alpha - \alpha_0}{2\lambda_{\max}(P_1)}$. 由假设 3 知, 存在常数 $B_M = \alpha \sigma_{co} \times \|\alpha B_c \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} \Delta_{\beta}^{-1}\|$, 使得:

$$\|\alpha B_c \mathbf{K}_c \Delta_{\alpha}^{-1} M_c^{-1}(\tau) M_o^{-1}(\tau) \Delta_{\beta}^{-1}\| \leq B_M \quad (32)$$

那么, 由式 (29) ~ (32), 得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t)\| &\leq q_1 e^{-\mu_1 t} + B_M q_1 q_2 e^{-\mu_1 t} \cdot \int_0^t e^{(\mu_1 - \mu_2)\tau} d\tau = \\ &q_1 e^{-\mu_1 t} + \frac{B_M q_1 q_2}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}) \leq \\ &q_3 e^{-\mu_3 t} \end{aligned} \quad (33)$$

这里, $q_1 = \sqrt{\frac{V_1(0)}{\lambda_{\min}(P_1)}}$, $q_2 = \sqrt{\frac{V_2(0)}{\lambda_{\min}(P_2)}}$, $q_3 = q_1 + \frac{q_1 q_2 B_M}{\mu_1 - \mu_2}$, $\mu_3 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$.

由式 (33) 及式 (29), 可知 $\mathbf{z}(t)$ 及 $\bar{\mathbf{e}}(t)$ 是指数收敛的. 那么由假设 2 及式 (25), 可以推出 $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ 及 $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$. 因此, 命题得证. $\square$

注 5. 由定理 3 的证明过程可知, α_0 与 β_0 的选取不先后, 即 α 与 β 可以独立设计, 这表明在本文的方法中, 控制器与状态观测器是可以分别独立设计的.

注 6. 对于输出反馈控制器, 由假设 3 知, 存在 $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, 使得 $\|M_c(t)\| \leq \eta_1$ 及 $\|M_o^{-1}(t)\| \leq \eta_2$ 成立, 那么有:

$$\begin{cases} \|\mathbf{x}(t)\| \leq \eta_1 \|\Delta_{\alpha}\| q_3 e^{-\mu_3 t} \\ \|\mathbf{e}(t)\| \leq \eta_2 \|\Delta_{\beta}^{-1}\| q_2 e^{-\mu_2 t} \end{cases} \quad (34)$$

注 7. 在 LTI 系统的输出反馈控制中, 一个经典的结果是“分离设计原则”, 即状态观测器与反馈控制器可以分别独立设计. 然而, 本文下面所构造的反例表明“分离设计原则”对于 LTV 系统并不总是成立的.

考虑下述 LTV 系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{2t} x_2 + e^{2t} u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + e^{-t} x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (35)$$

构造状态反馈控制器

$$u = x_2 \quad (36)$$

假设系统初始时刻为 $t_0 = 0$, 那么可以求得此时系统的解析解为

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) e^{-t} \\ x_2(t) = -x_1(0) e^{-2t} - (x_1(0) - x_2(0)) e^{-t} \end{cases} \quad (37)$$

因此, 系统状态是指数稳定的. 构造观测器

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + e^{-t} y \quad (38)$$

解得观测器动态误差为

$$e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t) = (x_2(0) - \hat{x}_2(0)) e^{-t} \quad (39)$$

因而观测器动态误差也是指数收敛的.

基于上述状态反馈控制器 (36) 与状态观测器 (38), 如果利用“分离设计原则”, 那么可以得到下述输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + e^t y \\ u = \hat{x}_2 \end{cases} \quad (40)$$

此时, 可以求得由式 (35) 与式 (40) 构成的闭环系统的解析解为

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\hat{x}_2(0) - x_2(0)}{2} e^t + \frac{x_2(0) - \hat{x}_2(0) + 2x_1(0)}{2} e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{\hat{x}_2(0) - x_2(0)}{2} - \frac{x_2(0) - \hat{x}_2(0) + 2x_1(0)}{2} e^{-2t} \end{cases} \quad (41)$$

由此可见, 这时闭环系统的状态 x_1 是发散的. 因而, 在 LTV 系统输出反馈控制器的设计中, “分离设计原则”并不总是成立的. 所以, 在设计 LTV 系统输出反馈控制器时不能简单地使用“分离设计原则”将状态反馈控制器与观测器叠加.

注 8. 在 LTV 系统控制理论的研究中, 关于输出反馈的相关结果极少. 而由注 7 知, 已有的 LTV 系统状态控制器和观测器设计结果并不能完全简单地移植应用于输出控制器的设计中. 在本文的研究中, 控制器与观测器可以相互独立设计, 避免了无法使用“分离设计原则”带来的限制.

3 例子

考虑下述二阶线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1+1.5\cos(2t) & 1-1.5\cos(t)\sin(t) \\ -1-1.5\cos(t)\sin(t) & -1+1.5\sin^2(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (42)$$

由 LTV 系统分析理论可知, 系统 (42) 对应的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ -e^{\frac{t}{2}} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{bmatrix} \quad (43)$$

因此, 当 $u(t) = 0$ 时, 该系统是不稳定的. 接下来, 将使用本文所提方法设计基于观测器的输出反馈控制器, 使得闭环系统渐近稳定.

由系统表达式, 可以求得:

$$M_c^{-1}(t) = \frac{\begin{bmatrix} 1.5\sin^2(t) - 1 & 0.75\sin(2t) - 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{0.75\sin(2t) - 1} \quad (44)$$

及

$$M_o^{-1}(t) = \frac{\begin{bmatrix} 1 - 0.75\sin(2t) & 0 \\ 1.5\cos(2t) - 1 & 1 \end{bmatrix}}{1 - 0.75\sin(2t)} \quad (45)$$

取

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

根据式 (23), 可以得到 LTV 系统 (42) 的输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -1+1.5\cos(2t) & 1-1.5\cos(t)\sin(t) \\ -1-1.5\cos(t)\sin(t) & -1+1.5\sin^2(t) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2\beta(1-0.75\sin(2t)) \\ 2\beta(1.5\cos(2t)-1)+\beta^2 \end{bmatrix} \frac{(y(t)-\hat{y}(t))}{1-0.75\sin(2t)} \\ u(t) = \frac{\begin{bmatrix} 2\alpha(1-1.5\sin^2(t))+\alpha^2 & 2\alpha(1-0.75\sin(2t)) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t)}{0.75\sin(2t)-1} \end{cases} \quad (47)$$

选取 $\alpha = 2, \beta = 2$, 初始值取为 $x_1(0) = 5, x_2(0) = -5, \hat{x}_1(0) = 0, \hat{x}_2(0) = 0$. 由式 (42) 和 (47) 构成的闭环系统的数值仿真结果如图 1~4 所示. 图 1 和图 2 分别为观测器误差 $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ 及 $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ 的动态曲线, 图 3 和图 4 分别为闭环系统状态变量 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的动态曲线. 仿真结果表明, 观测器误差及闭环系统状态均渐近收敛于 0.

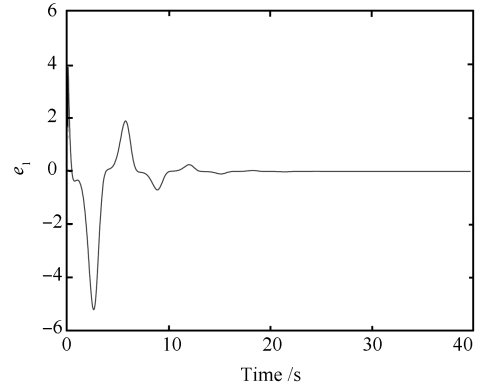


图 1 状态观测器动态误差 $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ 曲线

Fig. 1 The dynamic trajectory of the observer error

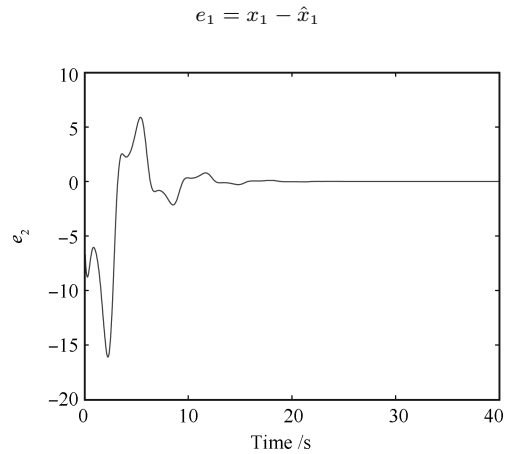


图 2 状态观测器动态误差 $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ 曲线

Fig. 2 The dynamic trajectory of the observer error

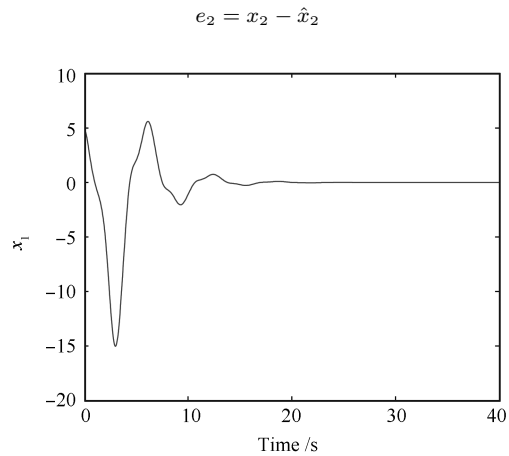


图 3 被控系统状态变量 x_1 动态曲线

Fig. 3 The dynamic trajectory of the state x_1 of the plant

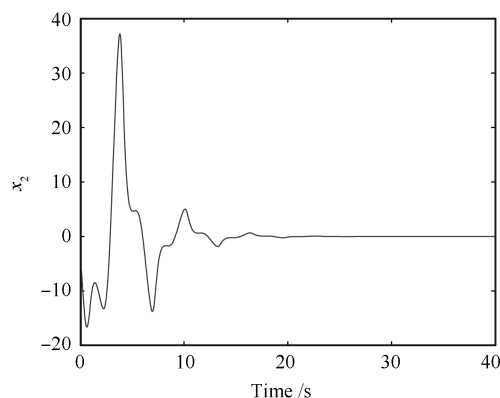


图4 被控系统状态变量 x_2 动态曲线

Fig. 4 The dynamic trajectory of the state x_2 of the plant

4 结论与进一步的工作

本文研究了一类 LTV 系统的输出反馈控制问题, 设计了状态反馈控制器、状态观测器以及基于状态观测器的输出反馈控制器. 本文进一步证明了状态观测器动态误差是渐近稳定的, 而状态反馈控制器和输出反馈控制器可以保证闭环系统状态的渐近稳定性.

本文的研究对象为单输入单输出 LTV 系统, 今后的工作将关注如何将其推广到多输入多输出 LTV 系统中. 此外, 如何降低本文假设条件的限制也是今后研究的重点.

References

- 1 Fliess M. Some basic structural properties of generalized linear systems. *Systems and Control Letters*, 1990, **15**(5): 391–396
- 2 Leiva H, Siegmund S. A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(12): 2229–2232
- 3 Zhang Xue-Feng, Zhang Qing-Ling. On controllability and observability of linear time-varying singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(6): 1249–1253
(张雪峰, 张庆灵. 线性时变广义系统的能控性与能观性问题. 自动化学报, 2009, **35**(6): 1249–1253)
- 4 Marinescu B. Output feedback pole placement for linear time-varying systems with application to the control of nonlinear systems. *Automatica*, 2010, **46**(9): 1524–1530
- 5 Jetto L, Orsini V. Relaxed conditions for the exponential stability of a class of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(7): 1580–1585
- 6 García G, Peres P L D, Tarbouriech S. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 998–1003
- 7 Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems: analysis and controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 1003–1008
- 8 García G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 364–369
- 9 Ji X F, Yang Z B, Sun Y K, Su H Y. Robust stabilization for linear time-varying uncertain periodic descriptor systems. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(9): 1219–1220
- 10 Ilchmann A, Mueller M. Time-varying linear systems: relative degree and normal form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(5): 840–851
- 11 Zhang Y P, Barş F, Ioannou P A. Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(11): 1908–1925
- 12 Tomás-Rodríguez M, Banks S P. *Linear, Time-varying Approximations to Nonlinear Dynamical Systems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010
- 13 Sun Z S, Zhang Z, Tsao T C. Trajectory tracking and disturbance rejection for linear time-varying systems: input/output representation. *Systems and Control Letters*, 2009, **58**(6): 452–460
- 14 Tuna E S. Sufficient conditions on observability Grammian for synchronization in arrays of coupled linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2586–2590
- 15 Li J S. Ensemble control of finite-dimensional time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 345–357
- 16 Becker A, Bretl T. Approximate steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control. *IEEE Transactions on Robotics*, 2012, **28**(3): 580–591
- 17 Busawon K K, Saif M. A state observer for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(11): 2098–2103
- 18 Gauthier J P, Hammouri H, Othman S. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(6): 875–880

张 健 电子科技大学讲师. 主要研究方向为非线性控制理论, 机器人建模与控制. 本文通信作者. E-mail: zhangj@uestc.edu.cn
(ZHANG Jian Lecturer at University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers nonlinear control systems and robot modeling and control. Corresponding author of this paper.)

辛晓帅 电子科技大学讲师. 主要研究方向为控制理论应用, 新能源系统中的控制技术. E-mail: xin Xiaoshuai@uestc.edu.cn
(XIN Xiao-Shuai Lecturer at University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers control theory applications and control techniques for renewable energy systems.)

徐红兵 电子科技大学自动化工程学院教授. 主要研究方向为智能信息处理与控制. E-mail: hbxu@uestc.edu.cn
(XU Hong-Bing Professor at the School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China. His research interest covers intelligent information processing and control.)