第 40 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 40, No. 2
2014 年 2 月 ACTA AUTOMATICA SINICA February, 2014

# 基于椭圆型估计误差界的动态输出反馈鲁棒模型预测控制

平续斌 [1] 丁宝苍 [2]

**摘 要** 研究具有多包不确定型参数和有界噪声系统的动态输出反馈鲁棒模型预测控制 (Output feedback robust model predictive control, OFRMPC) 的综合方法. 前期的研究表明, 估计误差集合 (Estimation error set, EES) 的更新是输出反馈模型预测控制综合方法研究的一个关键技术. 在本文中, 通过利用 S-procedure, 采用新的估计误差集合更新方法. 通过适当地在线更新估计误差集合, 可获得下一采样时刻更紧凑的估计误差集合. 通过数值仿真例子验证了该方法的有效性.

**关键词** 动态输出反馈, 模型预测控制, 不确定系统, 估计误差集合

**引用格式** 平续斌, 丁宝苍. 基于椭圆型估计误差界的动态输出反馈鲁棒模型预测控制, 2014, **40**(2): 219−226

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2014.00219

# Dynamic Output Feedback Robust Model Predictive Control Based on Ellipsoidal Estimation Error Bound

PING Xu-Bin[1] DING Bao-Cang[2]

**Abstract** This paper presents a synthesis approach of dynamic output feedback robust model predictive control (OFRMPC) for systems with both polytopic uncertainty and bounded disturbance. The previous results show that the refreshment of estimation error set (EES) is a key technique for the synthesis approach of output feedback model predictive control (MPC). In this paper, by applying S-procedure, a new method for refreshing EES is employed. By properly refreshing the EES on-line, a more compact EES for the next sampling time can be obtained. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the approach.

**Key words** Dynamic output feedback, model predictive control (MPC), uncertain systems, estimation error set (EES)

**Citation** Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang. Dynamic output feedback robust model predictive control based on ellipsoidal estimation error bound. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 219−226

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 或者滚动时域控制为一种基于优化的控制方法, 其能够处理物理约束和保证稳定性[1]. 但实际过程中, 精确的模型难以获得, 且过程中存在噪声. 因此, 鲁棒 MPC (Robust MPC, RMPC) 更适合应用在实际系统中.

在实际系统中真实状态往往无法准确测量, 因此一般选择输出反馈鲁棒预测控制 (Output feedback RMPC, OFRMPC)[2−15]. 对 OFRMPC, 一个关键问题是如何在鲁棒稳定性、约束处理中考虑状态估计误差的影响. 文献 [3] 采用估计误差不变集对估计误差进行约束. 文献 [4−5] 在离线优化问题中加入多面体形式估计误差约束, 因此在线搜索控制器参数时, 所设计的控制器参数保证了在线实施时估计误差的界不变. 文献 [6] 在离线优化中, 对下一时刻估计误差的界进行适当约束, 获得查找表; 在线根据实时估计误差集合和吸引域搜索控制器参数. 文献 [7−8] 采用多面体估计误差集合, 主优化问题未考虑估计误差约束, 在线辅助优化中对下一时刻的估计误差集合进行更新. 其中, 文献 [8] 改进了文献 [7] 的辅助优化方法, 降低了在线计算量, 且提高了控制性能.

针对采用椭圆型估计误差集合, 文献 [9] 保证真实状态、估计状态和估计误差在同一椭圆内收敛. 文献 [10−11] 在离线优化问题中加入椭圆型估计误差约束, 因此所设计的控制器参数保证了在线实施时估计误差的界不变. 其中, 文献 [11] 在离线计算终端约束集和局部控制器, 以及在线计算摄动项时均

收稿日期 2012-11-19 录用日期 2013-03-11
Manuscript received November 19, 2012; accepted March 11, 2013
国家自然科学基金 (61174095) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174095)
本文责任编委 李少远
Recommended by Associate Editor LI Shao-Yuan
1. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071 2. 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室 电子与信息工程学院自动化系 西安 710049
1. School of Mechano-electronic Engineering, Xidian University, Xi′an 710071 2. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security (MOE KLINNS Lab), Department of Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049

要求满足同一个椭圆型估计误差集合不变性约束(由于该文所采用的模型不同, 其技术细节与其他文献相比有很大的差别). 文献 [12−15] 利用闭环系统的不变性对估计误差集合进行更新, 从而保证优化问题的递归可行性. 其中, 在文献 [14] 的算法 3 和文献 [15] 的第 5 节中, 为提高控制性能且保证优化问题递归可行性, 间接利用多面体估计误差集合, 得到比直接利用闭环系统不变性获得的一步向前椭圆型估计误差集合更紧凑的椭圆型估计误差集合. 具体地, 在文献 [14] 的算法 3 和文献 [15] 的第 5 节中, 在用估计误差方程计算一步向前估计误差集合时, 采用了多面体集合的形式进行递推, 其中还涉及采用椭圆的多面体外包集合、多面体的外包椭圆. 本文采用 S-procedure[16] 方法, 用椭圆型集合进行直接递推获得一步向前估计误差集合, 避免了采用多面体集合的近似误差. 此外, 文献 [14] 采用了 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型描述, 其类似于准参数时变 (Quasi linear parameter varing, quasi-LPV) 系统; 文献 [15] 采用 Hammerstein-Wiener 模型描述非线性系统. 相对而言, 本文研究更具一般性的 LPV (Linear parameter varing) 系统, 同文献 [12−13].

**标注.** 对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 和正定矩阵 $W$, $\|\boldsymbol{x}\|_W^2 := \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}W\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}(i|k)$ 表示在当前时刻 $k$ 对未来 $k+i$ 时刻的 $\boldsymbol{x}$ 的预测值; $I$ 为具有适当维数的单位矩阵; $\mathcal{E}_M := \{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{\xi} \le 1\}$ 表示关于正定对称矩阵 $M$ 的椭圆; $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ 表示以 $\{\cdot\}$ 中的所有元素为顶点组成的凸组合, 即某元素包含于 $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ 表示该元素可由 $\{\cdot\}$ 中的所有元素以凸组合表示, 其中组合系数非负, 且加和为 1; $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ 表示 $\{\cdot\}$ 中矩阵的迹; 矩阵中 “$*$” 表示对称矩阵中其对称项的转置; 优化的最优解用上角标 “$*$” 表示; 为了简便, 对时间依赖的决策变量, 时间项常省略.

## 1 问题描述

考虑如下离散时间不确定 LPV 系统:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= A(k)\boldsymbol{x}(k)+B(k)\boldsymbol{u}(k)+D(k)\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) &= C(k)\boldsymbol{x}(k)+E(k)\boldsymbol{w}(k)\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n_u}$、$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n_x}$、$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{n_y}$ 和 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{n_w}$ 分别表示输入、状态、输出和噪声. 系统噪声是持续有界的, 且满足 $\boldsymbol{w}(k)\in\mathcal{E}_{P_w}$, 即 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)P_w\boldsymbol{w}(k)\le 1$. 输入和输出约束为

$$-\bar{\boldsymbol{u}}\le\boldsymbol{u}(k)\le\bar{\boldsymbol{u}},\ -\bar{\boldsymbol{\psi}}\le\Psi\boldsymbol{y}(k+1)\le\bar{\boldsymbol{\psi}} \tag{2}$$

其中, $\bar{u}_j>0$, $j\in\{1,\cdots,n_u\}$; $\bar{\psi}_j>0$, $j\in\{1,\cdots,q\}$; $\Psi\in\mathbf{R}^{q\times n_y}$. 此外, 假定 $[A(k)|B(k)|C(k)|D(k)|E(k)]\in\Omega$, $\Omega=\mathrm{Co}\{[A_l|B_l|C_l|D_l|E_l]|l\in\{1,\cdots,L\}\}$.

对于上述系统 (1) 和 (2), 动态输出反馈控制器为[12−13]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(i+1|k) &= A_{\mathrm{c}}(k)\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(i|k)+L_{\mathrm{c}}(k)\boldsymbol{y}(i|k)\\ \boldsymbol{u}(i|k) &= F_x(k)\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(i|k)+F_y(k)\boldsymbol{y}(i|k)\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}\in\mathbf{R}^{n_x}$ 为估计状态 (或称为控制器状态); $\{A_{\mathrm{c}}(k),L_{\mathrm{c}}(k)\}$ 为控制器增益矩阵; $\{F_x(k),F_y(k)\}$ 为反馈增益矩阵. 根据式 (3) 和 (1), 获得如下扩展的闭环系统:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(i+1|k) &= \Phi(i,k)\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)+\Gamma(i,k)\boldsymbol{w}(k+i),\\ &\forall i\ge 0,\ \tilde{\boldsymbol{x}}(0|k)=\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\end{aligned} \tag{4}$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},{\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,

$$\Phi(i,k)=\left[\begin{array}{cc}A(\diamondsuit)+B(\diamondsuit)F_yC(\diamondsuit) & B(\diamondsuit)F_x(k)\\ L_{\mathrm{c}}C(\diamondsuit) & A_{\mathrm{c}}(k)\end{array}\right]$$

$$\Gamma(i,k)=\left[\begin{array}{c}B(\diamondsuit)F_yE(\diamondsuit)+D(\diamondsuit)\\ L_{\mathrm{c}}E(\diamondsuit)\end{array}\right],\ \diamondsuit=k+i$$

此外, 令 $Q=M^{-1}$, 其中,

$$M=\left[\begin{array}{cc}M_1 & M_2^{\mathrm{T}}\\ M_2 & M_3\end{array}\right],\ Q=\left[\begin{array}{cc}Q_1 & Q_2^{\mathrm{T}}\\ Q_2 & Q_3\end{array}\right]$$

为数值方便, 令 $M_2=-M_1$[6−8, 12, 14], 因此,

$$Q=\left[\begin{array}{cc}Q_1 & Q_3\\ Q_3 & Q_3\end{array}\right],\ M=\left[\begin{array}{cc}M_1 & -M_1\\ -M_1 & M_3\end{array}\right] \tag{5}$$

定义估计误差为 $\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(k)$, 假定在 $k\ge 0$ 时刻,

$$\boldsymbol{e}(k)\in\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k)} \tag{6}$$

其中, $Q_e(k)$ 在 $k\ge 0$ 时刻已知.

## 2 输出反馈鲁棒预测控制在线方法

### 2.1 主优化问题

根据文献 [13] 中的动态 OFRMPC 在线综合方

法, 在每一时刻 $k$, 考虑如下优化问题:

$$\min_{\alpha,\gamma,\varrho,M_{\rm c},Y,T_1,T_2,T_3,Q_1,Q_3,Z,\Xi} \gamma \tag{7}$$

$$\text{s.t.} \sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\tilde{\Upsilon}_{lj}^{\rm QB}\ge 0 \tag{8}$$

$$\tilde{\Upsilon}_j^u\ge 0,\ Z_{ss}\le\frac{1}{2}\bar{u}_s^2,$$
$$j=1,\cdots,L,\ s=1,\cdots,n_u \tag{9}$$

$$\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\widehat{\Upsilon}_{hlj}^{y}\ge 0$$
$$\Xi_{ss}\le\frac{1}{3}\bar{\psi}_s^2,\ h=1,\cdots,L,\ s=1,\cdots,q \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1-Q_3 & * \\ I & \varrho(k)Q_e^{-1}(k)\end{bmatrix}\ge 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\varrho(k) & * \\ \boldsymbol{x}_{\rm c}(k) & Q_3\end{bmatrix}\ge 0 \tag{12}$$

其中, $\mathscr{Q},\mathscr{R}$ 为对称正定加权矩阵, $Z_{ss}$ ($\Xi_{ss}$) 为 $Z(\Xi)$ 的第 $s$ 个对角元素, $\tilde{\Upsilon}_{lj}^{\rm QB},\tilde{\Upsilon}_j^u,\widehat{\Upsilon}_{hlj}^y$ 分别为此页下端所示. 其中 $\{L_{\rm c},F_y\}$ 预先给定. 式 (8) 为二次有界性条件[17−18]; 式 (9) 和 (10) 为输入和输出约束; 式 (11) 和 (12) 为扩展状态约束, 其同文献 [13] 中引理 1 (通过对文献 [13] 中的式 (11) 两边同除以 $\varrho(k)$, 并且利用 Shur 补引理, 知式 (11) 等价于文献 [13] 中的式 (11)).

每一时刻 $k$, 如果优化问题 (7) ~ (12) 有解, 则 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\in\mathcal{E}_{Q^{-1}}$, 且式 (4) 关于公共 Lyapunov 矩阵 $Q^{-1}$ 二次有界.

**注 1.** 在文献 [12] 中, 通过近似最优凸优化算法求解 $\{A_{\rm c},L_{\rm c},F_x,F_y\}$. 在文献 [13] 中, 为了减少在线计算量, 采取了类似文献 [5] 的方法, 固定 $\{L_{\rm c},F_y\}$. 本文优化问题 (7) ~ (12) 的求解类似文献 [13] 中的优化问题 (20), 离线固定 $\{L_{\rm c},F_y\}$. 在文献 [13] 的优化问题 (20) 的扩展状态约束中, $P_w=I$, $\varrho(k)$ 预先给定, 而本文中 $\varrho(k)$ 为决策变量, $E_0=I$.

$$\tilde{\Upsilon}_{lj}^{\rm QB}=\begin{bmatrix}
(1-\alpha)(T_1^{\rm T}+T_1-Q_1) & * & * & * & * & * & * \\
(1-\alpha)(T_2^{\rm T}+T_3E_0-Q_3) & (1-\alpha)(T_3^{\rm T}+T_3-Q_3) & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & \alpha P_w & * & * & * & * \\
(A_l+B_lF_yC_j)T_1+B_lYE_0 & (A_l+B_lF_yC_j)T_2+B_lY & B_lF_yE_j+D_l & Q_1 & * & * & * \\
L_{\rm c}C_jT_1+M_{\rm c}E_0 & L_{\rm c}C_jT_2+M_{\rm c} & L_{\rm c}E_j & Q_3 & Q_3 & * & * \\
\mathscr{Q}^{\frac{1}{2}}C_jT_1 & \mathscr{Q}^{\frac{1}{2}}C_jT_2 & \mathscr{Q}^{\frac{1}{2}}E_j & 0 & 0 & \gamma I & * \\
\mathscr{R}^{\frac{1}{2}}(F_yC_jT_1+YE_0) & \mathscr{R}^{\frac{1}{2}}(F_yC_jT_2+Y) & \mathscr{R}^{\frac{1}{2}}F_yE_j & 0 & 0 & 0 & \gamma I
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Upsilon}_j^u=\begin{bmatrix}
T_1^{\rm T}+T_1-Q_1 & * & * & * \\
T_2^{\rm T}+T_3E_0-Q_3 & T_3^{\rm T}+T_3-Q_3 & * & * \\
0 & 0 & P_w & * \\
F_yC_jT_1+YE_0 & F_yC_jT_2+Y & F_yE & Z
\end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Upsilon}_{hlj}^y=\begin{bmatrix}
T_1^{\rm T}+T_1-Q_1 & * & * & * & * \\
T_2^{\rm T}+T_3E_0-Q_3 & T_3^{\rm T}+T_3-Q_3 & * & * & * \\
0 & 0 & P_w & * & * \\
0 & 0 & 0 & P_w & * \\
\Psi C_h[(A_l+B_lF_yC_j)T_1+B_lYE_0] & \Psi C_h[(A_l+B_lF_yC_j)T_2+B_lY] & \Psi C_h(B_lF_yE_j+D_l) & \Psi E_h & \Xi
\end{bmatrix}$$

### 2.2 满足递归可行性的算法

在下文中, $k'=k+1$. 当优化问题 (7) ∼ (12) 在 $k=0$ 时可行, 下述的算法 1 能够确保其递归可行性.

**算法 1.** 在线动态 OFRMPC, 保证递归可行性 (见文献 [13]).

选取初始估计状态 $\boldsymbol{x}_{\rm c}(0)$ 和估计误差集合 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(0)}$, 选取固定的 $\{L_{\rm c},F_y\}$. 在每一 $k\geq 0$ 时刻, 算法步骤如下:

1) 求解优化问题 (7) ∼ (12), 获得 $\{\alpha,\gamma,\varrho,M_{\rm c},Y,Q_1,Q_3,Z,\Xi\}(k)$, 令 $A_{\rm c}(k)=M_{\rm c}^{-1}T_3$, $F_x(k)=Y^{-1}T_3$;

2) 实施控制输入 $\boldsymbol{u}(k)=F_x(k)\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)+F_y\boldsymbol{y}(k)$, 计算 $\boldsymbol{x}_{\rm c}(k')=A_{\rm c}(k)\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)+L_{\rm c}\boldsymbol{y}(k)$;

3) 选取矩阵 $Q_e(k')=[Q_1(k)-Q_3(k)][1-\boldsymbol{x}_{\rm c}^{\rm T}(k')Q_3^{-1}(k)\boldsymbol{x}_{\rm c}(k')]$.

## 3 在线更新估计误差集合提高控制性能

### 3.1 新的估计误差集合更新算法

在每一时刻 $k$, 估计状态 $\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)$ 和估计误差集合已知. 在 $k$ 时刻执行算法 1 的步骤 3), 即通过闭环系统不变性得到下一时刻可行的误差集合 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$. 下面的引理 1 根据系统估计误差方程, 计算一步向前估计误差集合, 其考虑到当前时刻之后所有的模型参数和噪声不确定性.

**引理 1.** 对不确定系统 (1), 如果 $\boldsymbol{x}(k)$ 位于某个椭圆, 即,

$$\mathcal{E}(k)=\{\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^{n_x}|(\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k))^{\rm T}Q_e^{-1}(k)\times (\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k))\leq 1, Q_e(k)\geq 0\} \tag{13}$$

则一步向前估计误差集合为

$$\mathcal{E}(k')=\{\boldsymbol{x}(k')\in\mathbf{R}^{n_x}|(\boldsymbol{x}(k')-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k'))^{\rm T}\widehat{Q}_e^{-1}(k')\times (\boldsymbol{x}(k')-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k'))\leq 1, \widehat{Q}_e(k')\geq 0\} \tag{14}$$

其中, $\widehat{Q}_e(k')$ 可通过下述优化问题求解:

$$\min_{\widehat{Q}_e(k')\geq 0,\phi_1\geq 0,\phi_2\geq 0} \quad {\rm tr}(\widehat{Q}_e(k')) \tag{15}$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}\Delta_5' & *\\ \Pi_l & \widehat{Q}_{\boldsymbol{e}}(k')\end{bmatrix}\geq 0,\ l\in\{1,\cdots,L\}, \tag{16}$$

$$\Delta_5'={\rm diag}\{1-\phi_1-\phi_2,\phi_1 I,\phi_2 P_w\},$$
$$\Pi_l=[A_l\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k')+B_l\boldsymbol{u}(k),A_lE_e(k),D_l]$$

$E_e(k)$ 为 $Q_e(k)$ 的 Cholesky 分解, 满足 $Q_e(k)=E_e(k)E_e^{\rm T}(k)$.

**证明.** 在 $k$ 时刻, $\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)$ 和 $Q_e(k)$ 已知, 并且由式 (13) 得

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)+E_e(k)\boldsymbol{z} \tag{17}$$

其中, $\boldsymbol{z}$ 为满足 $||\boldsymbol{z}||\leq 1$ 的变量.

定义 $\boldsymbol{\zeta}=[1,\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}]^{\rm T}\in\mathbf{R}^{n_\zeta}, n_\zeta=1+n_x+n_w$. 由式 (1), (3), (14) 和 (17), 对系统参数的每一顶点, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_l(k')=\ &\boldsymbol{x}(k')-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k')=\\ &A_l\boldsymbol{x}_{\rm c}(k)-\boldsymbol{x}_{\rm c}(k')+B_l\boldsymbol{u}(k)+\\ &A_lE_e(k)\boldsymbol{z}+D_l\boldsymbol{w}(k)=\Pi_l\boldsymbol{\zeta},\ l\in\{1,\cdots,L\}\end{aligned} \tag{18}$$

因此, $\boldsymbol{x}(k')\in\mathcal{E}(k')$ 由下式得到保证:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}{\rm diag}\{1,0,0\}\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}\Pi_l^{\rm T}\widehat{Q}_e^{-1}(k')\Pi_l\boldsymbol{\zeta}\geq 0,\quad l\in\{1,\cdots,L\} \tag{19}$$

约束 $||\boldsymbol{z}||\leq 1$ 和 $\boldsymbol{w}^{\rm T}(k)P_w\boldsymbol{w}(k)\leq 1$ 可分别记为如式 (20) 和 (21) 的形式:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}{\rm diag}\{1,-I,0\}\boldsymbol{\zeta}\geq 0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}{\rm diag}\{1,0,-P_w\}\boldsymbol{\zeta}\geq 0 \tag{21}$$

根据 S-procedure, 式 "(20) − (21) ⇒ (19)" 成立的充分条件为: 存在非负标量 $\phi_1,\phi_2$, 使得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}{\rm diag}\{1,0,0\}\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}\Pi_l^{\rm T}\widehat{Q}_e^{-1}(k')\Pi_l\boldsymbol{\zeta}-\phi_1\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}\times\\ &{\rm diag}\{1,-I,0\}\boldsymbol{\zeta}-\phi_2\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}{\rm diag}\{1,0,-P_w\}\boldsymbol{\zeta}\geq 0,\\ &l\in\{1,\cdots,L\}\end{aligned} \tag{22}$$

对所有的 $\boldsymbol{\zeta}$, 式 (22) 成立的充要条件为

$$\begin{aligned}&{\rm diag}\{1,0,0\}-\Pi_l^{\rm T}\widehat{Q}_e^{-1}(k')\Pi_l-\phi_1{\rm diag}\{1,-I,0\}-\\ &\phi_2{\rm diag}\{1,0,-P_w\}\geq 0,\ l\in\{1,\cdots,L\}\end{aligned} \tag{23}$$

即

$$\begin{aligned}&{\rm diag}\{1-\phi_1-\phi_2,\phi_1 I,\phi_2 P_w\}-\Pi_l^{\rm T}\widehat{Q}_e^{-1}(k')\Pi_l\geq 0,\\ &l\in\{1,\cdots,L\}\end{aligned} \tag{24}$$

根据 Schur 补引理, 知式 (24) 等价于式 (16). □

**注 2.** 本文 $\lambda_l(k)$ 未知, 因此在优化问题 (15) ∼ (16) 计算一步向前估计误差集合时, 考虑到当前所有的模型参数和噪声的不确定性. 在文献 [6−8] 中, 估计误差集合采取多面体形式. 在根据估计误差方程计算一步向前估计误差集合时, 噪声集合采用外包集合近似, 而本文无须采用集合外包近似处理方案.

### 3.2　动态 OFRMPC 总算法

如图 1～3 所示, 在每一时刻 $k$, $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ (虚线所示) 和 $\mathcal{E}(k')$ (实线所示) 满足图中三种关系之一. 结合算法 1 和估计误差集合更新方法, 本文提出如下在线动态 OFRMPC 方法.

**算法 2.** 在线动态 OFRMPC, 采用椭圆型估计误差集合更新.

选取初始估计状态 $\boldsymbol{x}_c(0)$, 初始估计误差集合 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(0)} = \mathcal{E}(0)$, 选取固定的 $\{L_c, F_y\}$. 在每一时刻 $k \ge 0$, 算法步骤如下:

1)～3) 执行算法 1 的步骤 1)～3);

4) 计算 $\widehat{Q}_e(k')$, 如果 $\widehat{Q}_e(k') \le Q_e(k')$, 则更新 $Q_e(k') = \widehat{Q}_e(k')$.

关于算法 2 的递归可行性论证为: 当 $k'$ 时刻选取 $\{Q_1, Q_3, \varrho\}(k') = \{Q_1, Q_3, \varrho\}^*(k)$ 时, 式 (11) 和 (12) 满足, 即

$$Q_e(k') = \varrho(k')[Q_1(k') - Q_3(k')] \tag{25}$$

$$1 - \varrho(k') = \boldsymbol{x}_c(k)^{\mathrm{T}} Q_3^{-1}(k') \boldsymbol{x}_c(k) \tag{26}$$

此外, 当 $Q_e(k') \ge \widehat{Q}_e(k')$ 时, 令 $Q_e(k') = \widehat{Q}_e(k')$, 式 (11) 和 (12) 满足, 即

$$\widehat{Q}_e(k') \le \varrho(k')[Q_1(k') - Q_3(k')] \tag{27}$$

$$1 - \varrho(k') = \boldsymbol{x}_c(k)^{\mathrm{T}} Q_3^{-1}(k') \boldsymbol{x}_c(k) \tag{28}$$

在优化问题 (7)～(12) 中, 只有式 (11) 和 (12) 与扩展状态有关. 因此在 $k'$ 时刻, 如果进一步选取 $\{L_c, F_y\}(k') = \{L_c, F_y\}$, $\{A_c, F_x, \gamma, Z, \Xi\}(k') = \{A_c, F_x, \gamma, Z, \Xi\}^*(k)$, 则得到优化问题 (7)～(12) 在 $k'$ 时刻的可行解, 从而优化问题 (7)～(12) 的递归可行性得到保证.

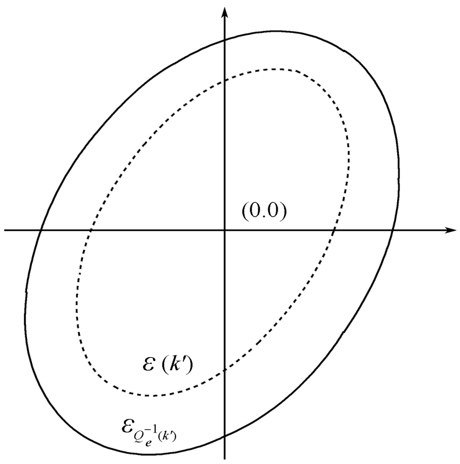


图 1　$\mathcal{E}(k')$ 和 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ 关系 (情形 1)
Fig. 1　The relationship of $\mathcal{E}(k')$ and $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ (Case 1)

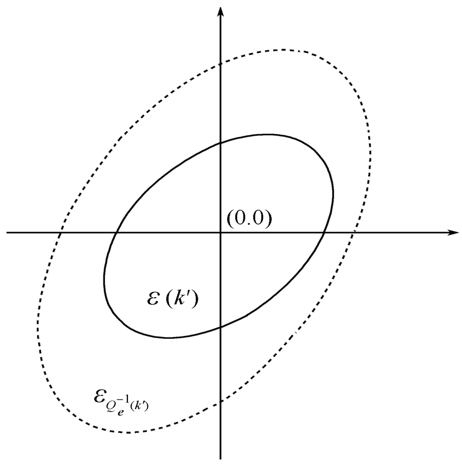


图 2　$\mathcal{E}(k')$ 和 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ 关系 (情形 2)
Fig. 2　The relationship of $\mathcal{E}(k')$ and $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ (Case 2)

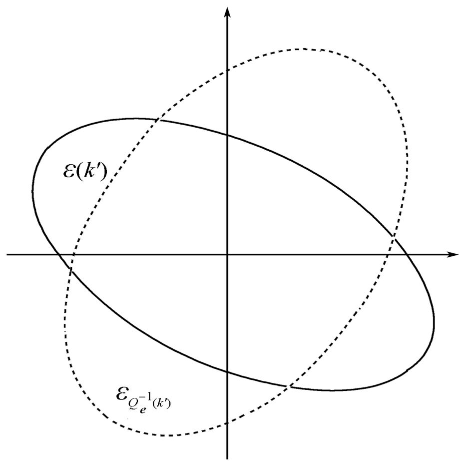


图 3　$\mathcal{E}(k')$ 和 $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ 关系 (情形 3)
Fig. 3　The relationship of $\mathcal{E}(k')$ and $\mathcal{E}_{Q_e^{-1}(k')}$ (Case 3)

**定理 1.** 对系统 (1), 采用算法 2 在线求解控制器参数和更新估计误差集合. 如果算法 2 在 $k = 0$ 可行, 则 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 将收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近, 并且约束 (2) 在所有 $k \ge 0$ 时刻满足.

**证明.** 证明方法同文献 [12] 的定理 1. 尽管控制器综合方法不同于文献 [12], 但稳定性保证采用了同样的思路. 假设在 $k$ 时刻, 求解获得最优解 $\{A_c, F_x, \gamma, Q_1, Q_3, Z, \Xi\}^*(k)$, 其中性能指标为 $\gamma^*(k)$. 在 $k'$ 时刻, 针对优化问题 (7)～(12), 如果 $Q_e(k')$ 选取为式 (25) 或者当 $Q_e(k') \ge \widehat{Q}_e(k')$ 时, 令 $Q_e(k') = \widehat{Q}_e(k')$, 且进一步选取 $\{L_c, F_y\}(k') = \{L_c, F_y\}(k)$, $\{A_c, F_x, \gamma, Z, \Xi\}(k') = \{A_c, F_x, \gamma, Z, \Xi\}^*(k)$, 则得到优化问题 (7)～(12) 在 $k'$ 时刻的可行解. 在 $k'$ 时刻, 优化求解后满足 $\gamma^*(k') \le \gamma(k')$, 因此 $\gamma^*(k') \le \gamma^*(k)$. 考虑所有

$k \geq 0$, $\gamma^*(k)$ 将不随时间 $k$ 增加. 因此, 随着时间的演变, $\gamma^*(k)$ 将收敛到恒定的值.

考虑如下无噪声系统:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm u}(i+1|k) &= \Phi(i,k)\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm u}(i|k),\ \tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm u}(0|k) = \tilde{\boldsymbol{x}}(k)\\ \boldsymbol{u}_{\rm u}(i|k) &= F_x(k)\boldsymbol{x}_{\rm c}(i|k) + F_y(k)y_{\rm u}(i|k)\\ \boldsymbol{y}_{\rm u}(i|k) &= C(k+i)\boldsymbol{x}_{\rm u}(i|k),\ \forall i \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

二次有界性条件 (8) 确保系统 (29) 的渐近收敛性, 因此

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm u}(i|k)\|^2_{Q^{-1}} - \|\tilde{\boldsymbol{x}}_{\rm u}(i+1|k)\|^2_{Q^{-1}} \geq \frac{1}{\gamma^*(k)}\left[\|\boldsymbol{y}_{\rm u}(i|k)\|^2_{\mathscr{Q}} + \|\boldsymbol{u}_{\rm u}(i|k)\|^2_{\mathscr{R}}\right],\ \forall i \geq 0 \tag{30}$$

因此式 (8) 确保当 $i \to 0$ 时, $\boldsymbol{y}_{\rm u}(i|k) \to 0$ 和 $\boldsymbol{u}_{\rm u}(i|k) \to 0$. 通过对式 (30) 从 $i = 0$ 到 $i = \infty$ 求和, 得

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\|\boldsymbol{y}_{\rm u}(i|k)\|^2_{\mathscr{Q}} + \|\boldsymbol{u}_{\rm u}(i|k)\|^2_{\mathscr{R}}\right] = \|\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\|_{Q^*(k)^{-1}} \leq \gamma^*(k)$$

因此当 $\gamma^*(k)$ 收敛到恒定值时意味着 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 将收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近. 输入和输出约束通过式 (9) 和 (10) 满足.

□

## 4 数值算例

考虑如下系统: $A(k) = \begin{bmatrix} 0.385 & 0.33 \\ 0.21+\mu(k) & 0.59 \end{bmatrix}$, $B(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\rm T}$, $C(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D(k) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}^{\rm T}$, $E(k) = 1$, $L = 2$, 其中 $\mu(k)$ 为不确定参数, 并且满足 $|\mu(k)| \leq 0.11$, 输入约束满足 $|\boldsymbol{u}| \leq 2$, 输出约束 $|\boldsymbol{y}| \leq 24$. 对文献 [12] 中 Algorithm 2 (CCC11Alg2)、本文算法 1 (Alg1) 和算法 2 (Alg2) 进行对比, 仿真中选取 $P_w = 25$, $\mathscr{Q} = 4, \mathscr{R} = 1, \boldsymbol{x}_{\rm c}(0) = [12,\ 12]^{\rm T}, \boldsymbol{x}(0) = [14,\ 14]^{\rm T}$, $M_e(0) = {\rm diag}\{0.125, 0.125\}$. 固定 $\alpha = 0.001$, 其对控制性能的影响很小. 对 CCC11Alg2, 选取 $\{N_0, d, d^0, \kappa\} = \{500, 0, 0, 0.98\}$; 对 Alg1 和 Alg2, $\{L_{\rm c} = [0.3890, 0.3890]^{\rm T}, F_y = 0.0299\}$ 固定选取为 CCC11Alg2 在 $k = 0$ 时刻的最优解. 仿真中噪声为 $[-0.2, 0.2]$ 之间的同一有界噪声序列. 闭环系统和估计状态、真实状态以及控制输入信号分别如图 4 ～ 6 所示, 其中图 4 对比了三种算法闭环系统状态轨迹, 图 5 对比了三种算法估计状态和真实状态响应过程, 图 6 中三种算法输入约束总是满足的. 相比于 CCC11Alg2 和 Alg1, 通过适当地在线更新估计误差集合, 采用 Alg2 后控制性能有所提升. 图 7 为三种算法中估计状态和真实状态响应以及估计误差集合的演变过程, 其中椭圆为估计误差集合, 每个椭圆的中心点为当前的估计状态; 虚线为估计状态;

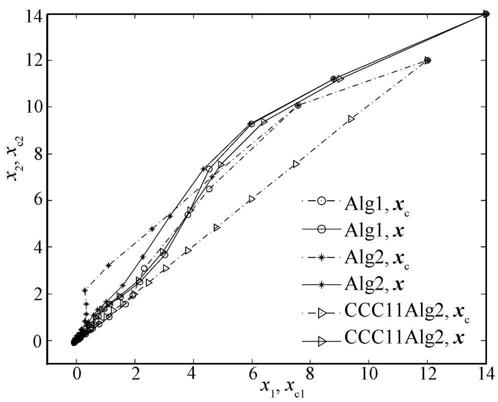


图 4 闭环系统状态轨迹图

Fig. 4 The state trajectories of the closed-loop system

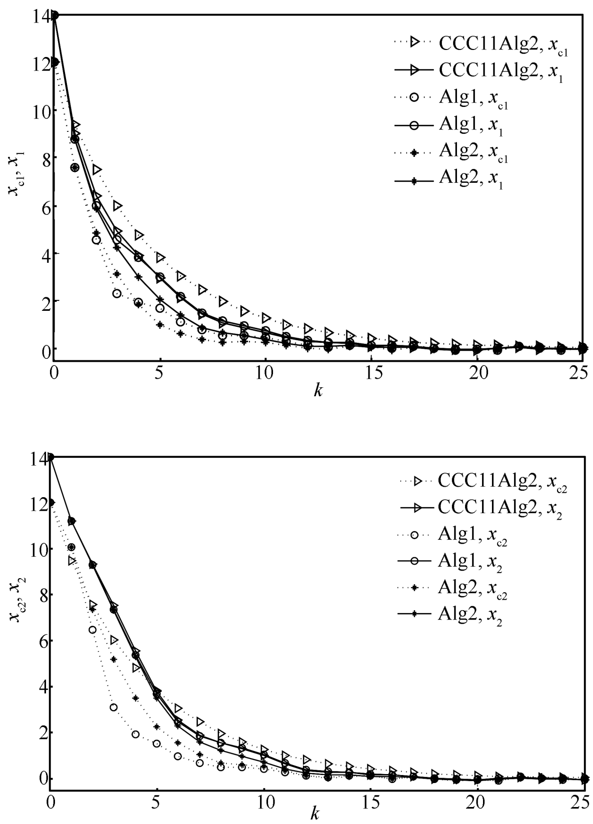


图 5 估计状态和真实状态响应图, 其中 $\boldsymbol{x}_{\rm c} = [x_{\rm c1}, x_{\rm c2}]^{\rm T}$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\rm T}$

Fig. 5 The state responses of the estimated state and true state where $\boldsymbol{x}_{\rm c} = [x_{\rm c1}, x_{\rm c2}]^{\rm T}$ and $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\rm T}$

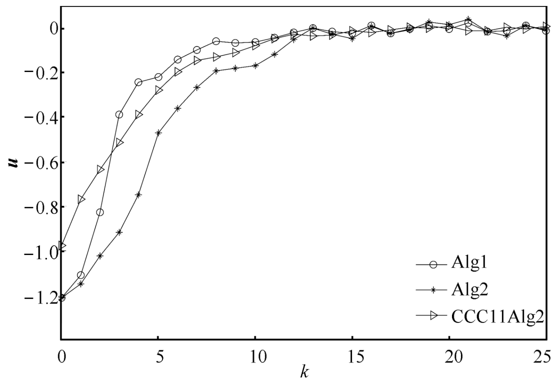


图 6　控制输入信号

Fig. 6　The control input signals

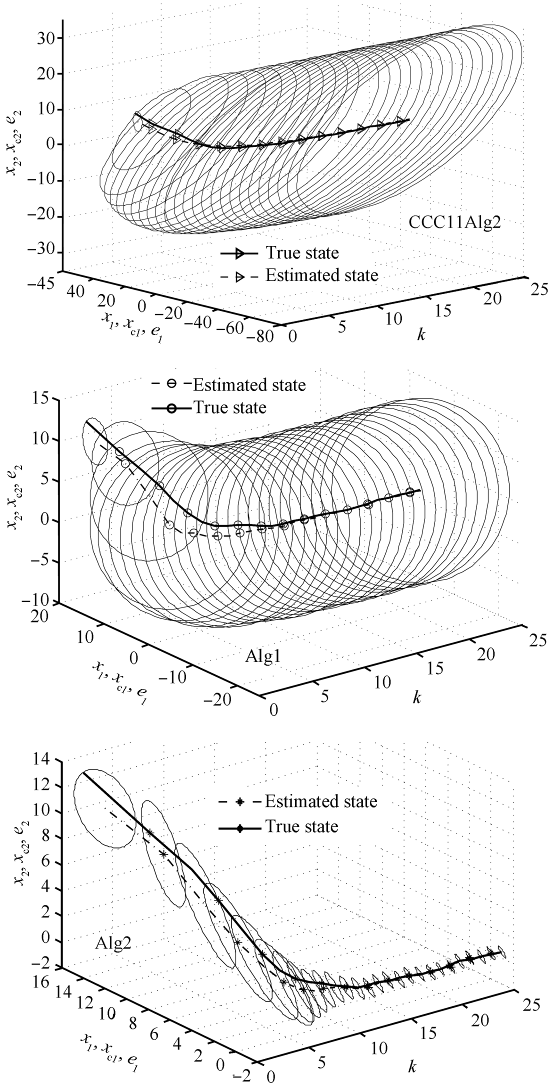


图 7　真实状态和估计状态响应以及相应的估计误差集合演变过程

Fig. 7　The responses of the true state and estimated state with the corresponding evolution of the estimation error set

实线为真实状态. 仿真中采用 Matlab 7.6 LMI 工具箱 (Pentium 4 CPU 2.40 GHz, 1G Memory). 令 $J = \sum_{i=0}^{25}[\mathscr{Q}\boldsymbol{y}(i)^2 + \mathscr{R}\boldsymbol{u}(i)^2]$. 对 CCC11Alg2 (Alg1, Alg2), 获得 $J = 2\,126\,(J = 2\,098, J = 2\,078)$, 仿真时间分别为 72.3 min (28.6 s, 37.5 s).

## 5　结论

本文考虑了存在多包模型参数不确定性和有界噪声的系统的动态 OFRMPC 在线算法. 通过利用 S-procedure, 进行在线优化更新估计误差集合. 该方法可获得下一时刻更紧凑的误差集合, 从而能够减小估计误差的保守性, 并且保证下一时刻优化问题的递归可行性. 该文提出的算法能够保证扩展状态收敛到且维持在 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近.

## References

1 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Scokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789−814

2 Wan Z Y, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(7): 763−774

3 Mayne D Q, Raković S V, Findeisen R, Allgöwer F. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: time varying case. *Automatica*, 2009, **45**(9): 2082−2087

4 Ding B C, Huang B, Xu F W. Dynamic output feedback robust model predictive control. *International Journal of Systems Science*, 2011, **42**(10): 1669−1682

5 Ding B C, Xi Y G, Cychowski M T, O′Mahony T. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control. *Automatica*, 2008, **44**(1): 258−264

6 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang. An off-line approach to dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 790−798
(平续斌, 丁宝苍. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制离线方法. 自动化学报, 2013, **39**(6):790−798)

7 Ding B C. Constrained robust model predictive control via parameter-dependent dynamic output feedback. *Automatica*, 2010, **46**(9): 1517−1523

8 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31−37
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31−37)

9 Ding Bao-Cang, Zou Tao. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 78−83
(丁宝苍, 邹涛. 约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制综合. 自动化学报, 2007, **33**(1): 78−83)

10 Li D W, Xi Y G. Robust model predictive control based on a category of dynamic output feedback. In: Proceedings of 2011 8th Asian Control Conference. Kaohsiung, China, 2011. 994−999

11 Famularo D, Franzé G. Output feedback model predictive control of uncertain norm-bounded linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(8): 838−862

12 Ding B C. Dynamic output feedback MPC for LPV systems via near-optimal solutions. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, China, 2011. 3340−3345

13 Ding B C, Xi Y G, Ping X B. A comparative study on output feedback MPC for constrained LPV systems. In: Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. Hefei, China, 2012. 4189−4194

14 Ding B C. Dynamic output feedback predictive control for nonlinear systems represented by a Takagi-Sugeno model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, **19**(5): 831−843

15 Ding B C, Ping X B. Dynamic output feedback model predictive control for nonlinear systems represented by Hammerstein-Wiener model. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(9): 1773−1784

16 Derinkuyu K, Pinar M C. On the S-procedure and some variants. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2006, **64**(1):55−77

17 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. On estimation error bounds for receding-horizon filters using quadratic boundedness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(8): 1350−1355

18 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. Design of state estimators for uncertain linear systems using quadratic boundedness. *Automatica*, 2006, **42**(3): 497−502

**平续斌** 2008 年和 2013 年分别在华东理工大学和西安交通大学获得硕士、博士学位. 现为西安电子科技大学机电工程学院讲师. 主要研究方向为预测控制及其应用.
E-mail: pingxubin@126.com
(**PING Xu-Bin** Received his master degree from East China University of Science and Technology in 2008 and Ph.D. degree from Xi′an Jiao Tong University in 2013, respectively. He is a lecturer at School of Mechano-electronic Engineering, Xidian University. His research interest covers predictive control and its applications.)

**丁宝苍** 2000 年和 2003 年分别在石油大学 (北京) 和上海交通大学获得硕士、博士学位. 2005 年 9 月到 2006 年 8 月间为加拿大阿尔伯达大学博士后. 2006 年 11 月到 2007 年 8 月间为新加坡南洋理工大学博士后. 现为西安交通大学教授. 主要研究方向为预测控制, 模糊控制及其在过程系统中的应用. 本文通信作者.
E-mail: baocang.ding@gmail.com
(**DING Bao-Cang** Received his master degree from University of Petroleum in China (Beijing) in 2000 and Ph. D. degree from Shanghai Jiao Tong University in 2003, respectively. From September 2005 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow in University of Alberta, Canada. From October 2006 to August 2007, he was a post-doctoral research fellow in Nanyang Technological University, Singapore. He is a professor at Xi′an Jiaotong University. His research interest covers predictive control, fuzzy control and their applications in process industry. Corresponding author of this paper.)