大系统控制论与复杂网络 — 探索与思考

席裕庚 [1,2]

摘 要 随着通信技术和网络技术的飞速发展, 在社会、经济乃至日常生活领域中, 出现了越来越多的复杂动态网络. 网络科学作为一门新兴的交叉学科, 对复杂动态网络性能特征、演化进程和控制方法的研究已取得了丰富的成果. 大系统控制论以高维动态大系统的行为分析和控制优化为主要研究内容, 应该能为复杂网络的研究提供有益的借鉴. 本文针对复杂动态网络研究的一些热点问题, 探索了用大系统控制理论和方法解决复杂网络结构分析和控制的可能性, 分析了面临的困难和应对的思路. 针对大规模复杂动态网络的控制和优化, 提出了集网络科学的宏观分析方法、控制科学的定量设计方法和信息科学的智能处理方法于一体的多层递阶结构.

关键词 大系统, 复杂网络, 结构分析, 可控性, 递阶结构

引用格式 席裕庚. 大系统控制论与复杂网络 — 探索与思考. 自动化学报, 2013, **39**(11): 1758−1768

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01758

Large-scale Systems Control and Complex Networks — Exploration and Thinking

XI Yu-Geng[1,2]

Abstract With the rapid development of communication and network technology, more and more complex dynamic networks appear in the fields of social, economic and human′s daily life. Network science as a new interdisciplinary subject has gained great achievements in the research on performance characteristic, evolution process and control method of complex dynamic networks. The control theory and methodology of large scale systems, aiming at the behavior analysis, control and optimization for high dimensional dynamic systems, should be able to provide a helpful reference for the study of complex networks. In this paper, against some hotspot problems in the research of complex dynamic networks, we explore the possibility of using the control theory and methodology of large scale systems to solve the structural analysis and control problems of complex networks, analyze the facing difficulties and the possible coping ways. For control and optimization of large scale complex dynamic networks, a multi-layer hierarchical structure is proposed which integrates the macroscope analysis methods of network science, the quantitative design methods of control science and the intelligent processing methods of information science.

Key words Large scale systems, complex network, structural analysis, controllability, hierarchical structure

Citation Xi Yu-Geng. Large-scale systems control and complex networks — exploration and thinking. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1758−1768

随着计算机、通信和网络技术的飞速发展, 无处不在的互联网、无线通信网把原先相互独立的单元联系起来, 廉价普及的高速计算机、巨型数据库及 GPS 和云计算等手段提供了处理海量数据的能力, 这些都为人们在宏观层面上研究复杂系统的行为提供了技术支持. 近年来, 复杂网络已成为众多学科共同关注的课题.

复杂网络具有大规模、高维度、连接方式非固定或非规则、随机性、非线性、带有不同时间或空间尺度等特征. 它不仅包括各种现实的物理网络, 如电力网、交通网、Internet 网、生物网等, 还包括各种抽象或逻辑的网络, 如金融网、传媒网、人际关系网等. 从而引起了物理、数学、生物、工程、金融、社会等各界的关注, 成为众多学科交叉的新兴领域. 尽管不同的复杂网络具有完全不同的属性和表现, 但网络科学以复杂网络的拓扑结构为共性, 重点研究复杂网络的宏观特征, 建立刻画这些结构的模型, 研究网络拓扑结构如何影响其功能, 研究如何根据拓扑特征改善网络的功能, 从而为分析和设计实际工程和社会中的各种复杂网络提供了支持[1].

在复杂网络的研究中, 除了对于少数可建模的网络, 如多智能体协作、网络同步等问题可以直接采

收稿日期 2013-07-30 录用日期 2013-08-28
Manuscript received July 30, 2013; accepted August 28, 2013
国家自然科学基金 (61203169, 61221003, 71361130012), 上海市教委创新项目 (12ZZ024) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61203169, 61221003, 71361130012) and Innovative Projects of Shanghai Education Commission (12ZZ024)
庆祝《自动化学报》创刊 50 周年专刊约稿
Invited Articles for the Special Issue for the 50th Anniversary of Acta Automatica Sinica
1. 上海交通大学自动化系 上海 200240 2. 系统控制与信息处理教育部重点实验室 (上海交通大学) 上海 200240
1. Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240 2. Key Laboratory of System Control and Information Processing of Ministry of Education (Shanghai Jiao Tong University), Shanghai 200240

用控制论的解析方法研究外, 对于大量超高维、数学模型不清晰的复杂网络, 主要还是通过实证的研究方法, 即观察现象和获取数据、总结规律、提炼模型、进行仿真实验、验证规律并发现新的规律, 进而改造网络. 在这方面已涌现了大量新的、有趣的成果, 构成了当前网络科学的主要内容.

尽管控制论的数学解析方法难以直接应用到复杂网络的这些研究中, 但除了基于数学模型的解析方法外, 经典的大系统控制论针对系统结构的研究也有丰富的积累. 2011 年 Liu 等把系统控制论中的结构可控性及其判据引入到复杂网络的研究中, 在 *Nature* 上发表了论文 "Controllability of complex networks"[2], 引起了人们极大的关注, 论文作者指出: "网络科学工具与控制理论的结合将有助于精确和解析地探索复杂网络可控性的许多问题".

关于复杂网络与系统理论、控制理论的关系, 已有不少学者提出了很深刻的见解, 例如最近文献 [3] 从复杂网络的科学和工程背景出发, 提出了在复杂动态网络背景下控制理论面临的问题与挑战. 本文则从系统和控制科学的背景出发, 用大系统控制论的成熟方法和方法论思想来思考复杂网络研究中的一些热点问题, 目的是探索这些经典方法在复杂网络中的可用性, 分析存在的问题, 探索其能否为复杂网络的相关研究提供帮助, 能否通过视角转换提出一些新的问题. 由于作者研究领域所限, 论文所做的探索是在经典控制论框架内针对复杂网络的一些问题进行的, 所得到的结果并未与复杂网络相关领域的丰富研究成果进行关联和比较, 对此希望能得到从事复杂网络研究的同行们的指教。

1 复杂网络的结构分解

复杂网络是由众多子网络复合组成的, 通过结构分解有助于理解和分析网络的宏观结构特征及网络中各部分的相互关系. 目前, 对复杂网络的分解常采用社团分解方法, 其基本思路是根据网络节点关联紧密程度把整个网络分解为若干社团, 在社团内部节点的相互连接比较紧密, 而各社团之间只通过少量边相连. 例如文献 [4] 通过反复寻找网络中具有最大介数 (Betweenness) 的边, 将其从网络中删除, 最终实现社团分解. 关于社团分解的更多算法和研究可见文献 [1, 5] 等.

在经典的大系统控制论中, 大系统的结构分解早已有了成熟的算法[6]. 其典型做法是: 通过系统的可达矩阵找出所有相互可达的节点群 (称为 "强连接" 和 "回路"), 把节点群集结成广义节点, 组成一个集结的结构矩阵, 再将其调整为对角块阵, 每一对角块内为上 (下) 三角块阵, 这样就可把大系统分解为由多个独立节点群组成、每个节点群由只有单向关联、相互之间不连成回路的子节点群所组成的有序结构, 根据这一结构很容易看出在大系统中, 哪些节点群是源, 各节点群受到哪些节点群的影响, 而它自身又会影响哪些节点群. 相比于社团分解, 这种分解方法更注重于从动态因果性的角度来观察和分析大系统的结构, 所得到的结果也能清晰地反映出大系统中各单元的地位及相互的因果链.

1.1 分析与尝试

在知道复杂网络拓扑结构的前提下, 把经典大系统的结构分析方法用来对复杂网络进行分解, 在原理上是可行的, 而且计算量也可以接受, 例如对于一个有 1 000 个节点的网络, 整个分解过程只需运行 15 秒左右. 但是, 通过对 1 000 个节点网络的随机仿真, 我们发现对于关联密集的复杂网络, 采用上述方法找到的节点群往往含有大量节点, 特别当网络关联元素达到 1% 以上时, 所有 1 000 个节点组成了一个可达节点群, 这时, 采用经典分解方法得到的节点群仍然是一个复杂子网络, 节点间相互可达, 已无法再对其进行空间划分. 这表明经典的基于可达矩阵找出可达节点群的分解方法不能照搬到关联紧密的复杂网络中.

出现上述现象的原因在于: 经典分解方法中采用的可达矩阵是一种 "最终" 可达矩阵, 若系统的邻接矩阵为 A, 则可达矩阵为

$$R = (A \cup I)^N$$

其中, N 为系统中的节点数, 而通过 $R \cap R^{\mathrm{T}}$ 找出的可达节点群中, 节点间相互可达是指由任一节点最终可达另一节点, 并不在意中间要经过多少节点, 这样, 当系统关联密集时, 大量节点就可以经过这样或那样的途径最终达到其他节点, 从而构成了一个大节点群. 为了解决这一问题, 我们考虑用有限步可达的概念代替 "最终" 可达, 定义 k 步可达矩阵

$$R_k = (A \cup I)^k$$

矩阵 R_k 中的 "×" 元素表示对应行节点至多经过 k 步就可影响 (可达) 列节点, 通过 $R_k \cap R_k^{\mathrm{T}}$ 找出最大维数且互不覆盖的满 "×" 行列, 可以得到类似于经典可达节点群的 k 步可达群, 其内部任意两个节点均能在 k 步之内影响 (到达) 对方. 从动态因果性的角度不难理解, 原来的可达节点群只反映了节点之间是否 "互通", 而 k 步可达群则是系统中 "互通" 关系最密切 (密切程度由 k 刻画) 的那些群组, 例如像在人际关系网中的 "亲密小团体". 随着 k 的取值由小到大, 可以看出网络中联系最密切的节点群如何逐步扩大其影响的动态演化过程。

经典的可达节点群相互之间不连成回路, 通过 $R \cap R^{\mathrm{T}}$ 可以完全分离, 因此很容易找出. 但如果同

样通过 $R_k \cap R_k^{\mathrm{T}}$ 来寻找 k 步可达群却会出现新的问题, 由于不是考虑所有的可达关系, k 步可达群之间仍然可能存在耦合, 如图 1 所示的关联密切网络, 其邻接矩阵和 $R_2 \cap R_2^{\mathrm{T}}$ 分别为

$$A = \begin{bmatrix} & \times & & & \times & & & \times & & \\ & & \times & & & & & \times & & \\ & & & \times & \times & & & & & \\ \times & & & & & \times & & & & \\ & \times & & \times & & & & & & \\ & & & & & & & \times & \times & \\ & & \times & & & & & & & \times \\ & & & \times & & & \times & & \times & \\ \times & & & & & & & & & \\ & & & & & \times & & \times & \times & \end{bmatrix}$$

$$R_2 \cap R_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \times & & & \times & \times & \times & & & \times & \times & \\ & \times & & \times & \times & \times & & & & \times & \\ \times & \times & \times & & & \times & & & & & \\ \times & \times & & & \times & \times & \times & & \times & & \\ \times & \times & \times & & \times & \times & & & & & \\ & & & & \times & & \times & \times & \times & & \\ & & & & & & \times & \times & \times & & \times \\ \times & & & & \times & & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & & & & & & \times & \times & \\ & & & & & & & \times & \times & & \times \end{bmatrix}$$

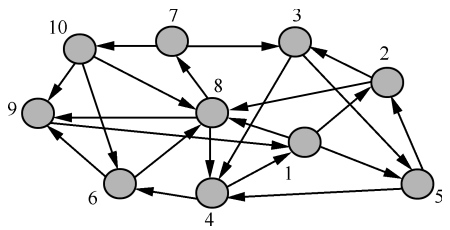


图 1 10 个节点组成的网络

Fig. 1 A network composed of 10 nodes

由 $R_2 \cap R_2^{\mathrm{T}}$ 可找出所有的 2 步可达节点群:

$$\{2,9\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{1,4,8\}\ \{1,8,9\}$$
$$\{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{4,6,8\}, \{6,7,8\}, \{7,8,10\}$$

可以看出, 这些节点群之间存在着多重耦合.

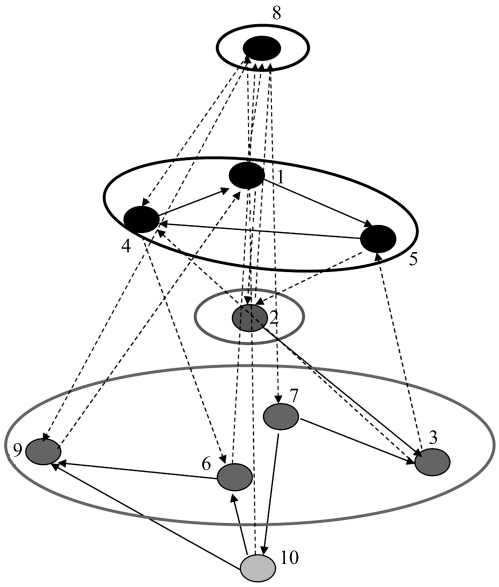
经典大系统结构分析在找出可达节点群后, 就把相互独立的节点群集结为广义节点进行空间分解, 但采用 k 步可达方法后, 所找出的 k 步可达节点群之间通常存在交集, 不能按原方法进一步做下去, 必须另辟蹊径. 为此, 我们通过 k 步可达节点群分析每个节点在网络中的活跃度或关联密切度, 这可由各节点在不同 k 步可达节点群中出现的次数 d 来表示, 对于上例, 可得到表 1 所示的结果.

表 1 各节点在 2 步可达群中出现的次数

Table 1 Number of each node appearing in the 2-step reachable groups

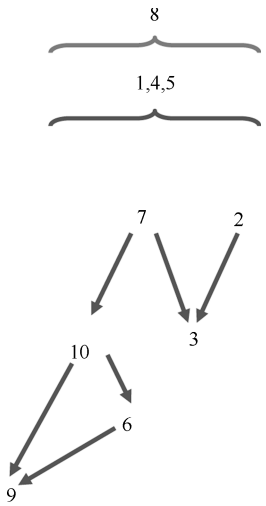
节点编号	8	1, 4, 5	2	3, 6, 7, 9	10
出现次数 d	5	4	3	2	1

因此, 网络的各节点虽然在几何空间上不能分解为动态因果关系清晰的块结构, 但可以得到以节点在网络中的活跃度为依据分层的层析结构, 见图 2 (a). 在图中如果从上到下逐步去除那些关联密切度相对高的节点, 剩余节点的拓扑结构会大大简化, 变得很容易按经典方法进行空间分解, 见图 2 (b).



(a) 层析图

(a) Layered-analysis



(b) 结构简化

(b) Structure simplification

图 2 网络的层析结构

Fig. 2 The layered-analysis structure of a network

1.2 理解与思考

通过把 k 步可达概念和方法应用于复杂网络结构分析的初步尝试, 我们可以得到以下的有用信息: 1) 网络中存在哪些抱团紧密的节点群; 2) 各节点在这些节点群中是否活跃, 哪些是造成网络关联复杂的核心节点; 3) 如何按节点在节点群关联中的活跃度对网络进行分层. 这些信息对复杂网络的结构分

析是十分有意义的.

1) k 步可达节点群在复杂网络的结构分析中有明确的物理意义.

k 步可达节点群可反映出那些互联程度紧密 (或直接) 的节点群, 根据所得到的层析结构可找到发挥核心作用的节点, 例如在关系网中, 小的 k 步可达节点群对应着关系密切成员组成的小团体, 通过层析可看出哪些成员是网络中的核心成员, 还可看出从网络中去除哪些成员后, 可使剩余成员的关系变得相对简单. 在许多实际复杂网络中, 这些概念都能找到合理的物理解释.

2) 以 k 步可达节点群识别节点活跃度，是对以 "度" 刻画节点活跃度的推广.

不难看出, $k = N$ 时的可达节点群即为经典的可达节点群, 反映了节点间关联的最终结果, 而 $k = 1$ 且网络为无向 (或理解为双向) 时, 各节点出现在与其邻居节点所组成的 1 步可达节点群中, 其活跃度 d 就是其连边数, 即网络科学中的 "度", 反映了节点间关联的直接来源. k 步可达节点群介于两者之间, 通过调整 k 的大小, 可反映出在一定步数后节点间的后续关联. 因此, 与网络科学中的 "度" 相比, 这里的推广更注重于从节点对其他节点的因果性 (有向图)、长远性 ($k > 1$) 影响来评价其重要性, 其包含的内涵比直接的 "度" 更为丰富.

3) 根据节点的活跃度对复杂网络进行层析，是对复杂网络结构分析的补充.

复杂网络结构不仅可以利用完全可达概念进行标准化空间分解, 即在物理空间的 "分块", 而且还可利用 k 步可达节点群识别节点活跃度, 进而按关联密切度进行层次分解, 即在逻辑空间的 "分层", 并在此基础上简化底层的空间拓扑结构. 这样一种 "分块" 加 "分层" 的多维分析方法可反映出复杂网络节点间相互作用的因果性和强弱度, 比采用单一分解方法提供了更全面的信息, 特别是对关联密度较高的网络, 这种层析方法可能对理解其结构更为合理.

1.3 问题与难点

以上的探索只是对小规模网络进行的, 但所得到的信息对网络结构分析具有一般意义. 在应用于大规模复杂网络时, 需要解决什么新问题和难点问题, 我们提出以下几方面的问题供参考:

1) 找出 k 步可达节点群需要有效的算法

在复杂网络中利用 k 步可达方法找出抱团紧密的 k 步可达节点群需要实施以下步骤:

a) 由邻接矩阵计算 k 步可达矩阵 R_k;

b) 计算 $R_k \cap R_k^{\mathrm{T}}$;

c) 由 $R_k \cap R_k^{\mathrm{T}}$ 找出所有 k 步可达节点群.

其中, 由 $R_k \cap R_k^{\mathrm{T}}$ 找出所有 k 步可达节点群具有很高的计算复杂度. 目前我们采用的类穷举算法对 30 个节点的计算时间约为 20 秒, 而对 40 个节点则达 950 秒, 很难适用于高维复杂网络. 如果我们的目的是要找出网络中抱团紧密的节点群, 就必须研究高效的或近似的算法以降低计算成本.

2) 依据什么准则确定节点的活跃度

通过 k 步可达节点群观察各节点是多少个 "小团体" 中的公共成员, 以此确定各节点的活跃度, 其物理意义相当明确 (如考虑人际关系网或组织网), 因此可以作为确定节点活跃度的一种合理准则. 与现有以 "度" 确定节点活跃度的准则相比, 它更能反映出节点间的因果关系及其后续影响. 但是在两种准则下判断节点活跃度的结果有多少差异, 或者更一般地, 根据不同的 k 所得到的节点活跃度有什么差异, 如何体现出其结果比用 "度" 准则得到的结果更合理、更长远，目前尚不清楚. 此外, 由于寻找 k 步可达节点群的计算成本很大, 是否还有基于 k 步可达概念的更直接简单的准则, 既能比 "度" 考虑得更长远, 又能避免寻找 k 步可达节点群的复杂计算, 也可以进一步研究.

3) k 步可达节点群的步数选择

利用 k 步可达节点群可以看出网络中哪些节点构成了 "亲密" 的团体, 各节点在不同的团体中表现是否活跃. k 的引入固然增加了分析节点间关联影响的自由度, 可以把传统的完全可达分析与 "度" 分析作为两种极端情况包括在内, 但同时也产生了分析问题的不确定性, k 取得过小, 难以看出节点的后续影响, k 取得过大, 又淡化了节点影响的差异. 如何确定选择 k 的准则, 使相应的 k 步可达节点群能恰到好处地兼顾这两方面的要求, 还需要做进一步的探索.

4) 复杂网络总体结构的描述

对于复杂网络的总体结构, 可以设想采用 "层、块相嵌" 的复合模式进行分析, 例如在其顶层通过空间分解方法得到节点群间的因果链结构 (即分块结构), 然后对各节点群用 k 步可达方法进行层析, 一方面把所得到的上层核心节点作为顶层分解中该分块的代表, 另一方面在去除核心节点后对剩余节点继续进行空间分解, 得到节点群内的底层因果链结构. 这样, 就可以把复杂网络分解为全局和局部两层因果链网络, 而各节点群在全局网络中的核心节点与在局部网络中的其他节点又构成密切的上下层连接关系. 对于这样一种复杂网络的分析结构, 还需要建立规范的问题描述, 探讨系统的实施算法, 并研究其对分析复杂网络的意义.

2 复杂网络的结构可控性和牵制控制方案

牵制控制是复杂网络研究中的一个重要课题, 其基本思想是通过有选择地对网络中的少部分节点施加控制而使整个网络具有期望的行为[7], 这在许多工程网络中都具有重要的意义. 牵制控制研究的基本问题, 一是可行性问题, 即如何对部分节点施加线性反馈而使整个动态网络稳定在期望的同步状态, 二是有效性问题, 即如何选择控制节点使达到控制目标所花的代价最小, 后者通常基于网络的拓扑特性进行研究, 因此与结构可控性研究紧密相关. 复杂网络的牵制控制已涌现了大量研究成果, 特别是近年来人们借助经典控制论的成果研究复杂网络的结构可控性[2], 把这一研究推到了新的高度, 使人们认识到利用控制论可以更加精确和解析地探索复杂网络的可控性.

在经典控制论中, 结构可控性的研究已发展得相当成熟, 自从 Lin 在 1974 年提出结构可控性的概念和判据以来[8], 关于结构可控性的图论判据和代数判据不断丰富完善. 大量文献在研究结构可控性时借助于成熟的图论工具, 但由于代数方法在判断结构可控的过程中常可得到丰富的辅助信息, 对确定有效的牵制控制方案颇有帮助, 所以以下简要回顾结构可控性及相关问题的代数方法.

考虑结构化系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中 x, u 分别为状态量与控制量, A, B 为用 "0" 和 "×" 表达的结构矩阵. 上式表达的是状态量、控制量相互之间的因果连接关系, 不但可以描述结构化的线性系统, 也可以描述非线性系统在不同工作点的线性化表达. 所谓该系统结构可控, 是指存在与 A 和 B 对应的数值矩阵 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$, 使系统 $(\bar{A}\ \bar{B})$ 在常规意义上是可控的. 因此, 结构可控是实现系统控制的必要条件.

文献 [8] 及以后的文献 [9−10] 等均给出了系统结构可控的代数判据, 即同时满足以下两个条件:

1) 该系统是输入可达的, 即 R_{ux} 无全零列;

2) $\mathrm{gr}[A\ \ B] = n$.

其中, gr 表示结构矩阵的一般秩, n 为系统的维数. 条件 1) 表示控制作用可影响到系统的所有状态; 条件 2) 表示控制有足够的自由度改变系统的状态. 这些条件的判断都有成熟的算法, 可参见文献 [11−12].

在系统结构可控的情况下, 经典控制论还给出了确定最少控制作用但保证系统结构可控的方法, 称为 "确定可行的控制方案"[10]. 其关键是去除控制矩阵中的冗余列, 使上述两个条件仍然成立, 文献 [12] 给出了一个通过标记方法去除冗余列的算法. 这些方法已经在过程控制领域成功地用来选择有效而经济的控制方案, 相应的报道可见文献 [10].

上述内容已形成了大系统结构可控性判断及可行控制方案选择的系统完整的算法, 它们与复杂网络结构可控性与牵制控制研究的问题有很高的一致性, 从而为这些问题的求解提供了解析的途径.

2.1 分析与尝试

虽然大系统的结构可控性研究及可行控制方案选择已有系统、解析的方法, 但以往的研究和应用案例维数并不高, 这些解析方法对维数巨大的复杂网络能否适用, 其计算复杂度能否接受, 是首先需要检验的. 为此, 我们对维数分别为 10、100、1 000 的结构方阵 A 和 B, 考虑其中的 "×" 元素分别占总数 5 % 和 10 % 两种情况, 在每一种情况下对 "×" 元素在矩阵中的分布随机产生 200 组例子用来进行统计. 通过在普通笔记本电脑上进行仿真, 判断输入可达性和计算一般秩所花费的平均时间如表 2 所示.

从上述统计结果可以看出, 判断系统结构可控性的两个代数条件所需的计算时间是可以接受的, 即使对于有 1 000 个节点的复杂网络, 所需的计算时间也在几十秒数量级. 两个条件中, 主要的计算量是系统一般秩的计算.

为了研究确定可行控制方案的算法是否适用于复杂网络, 我们考虑系统的结构描述 (A, B), A 矩阵为随机产生的具有 10 % 关联元素 "×" 的结构矩阵, B 为与 A 具有相同维数的单位矩阵, 采用文献 [12] 给出的标记法来得到冗余控制列的信息, 分别对维数为 10, 20, 50, 100, 200, 300 几种情况进行仿真, 对于每一种情况分别选取了一定数量的例子进行计算和统计, 得到的计算时间如表 3 所示.

表 2 判断输入可达性和计算一般秩所需平均时间统计

Table 2 Statistics of average time for judging input reachability and calculating generic rank

A、B 矩阵维数	10	10	100	100	1 000	1 000
× 元素比例	5 %	10 %	5 %	10 %	5 %	10 %
输入可达判断 (秒)	0.000089	0.000086	0.01277	0.01169	6.052	5.812
一般秩计算 (秒)	0.00086	0.001286	0.1302	0.1739	29.096	29.927

表 3　确定冗余控制列信息所需计算时间统计

Table 3　Statistics of computation time for determining the redundant control columns

A、B 矩阵维数	10	20	50	100	200	300
平均时间 (秒)	0.00231	0.02477	3.57732	139.87	6 237.75	49 531.13
例子个数	200	200	200	50	5	3

由表 3 可以看到, 确定冗余控制列的计算时间随着系统维数的增高急剧增长, 对于 100 个节点大致需要花费 1～3 分钟, 而对于 300 个节点则需要花费十几个小时, 对于更高维数的系统, 因为所需要的时间过长, 已难以统计.

上述计算中取 B 为单位阵, 即假定对所有节点均可施加控制作用, 如果限制只对网络中部分节点可施加控制作用, 以此减少 B 矩阵的列数, 是否能降低计算量呢? 通过对 100 个节点和 200 个节点的复杂网络在具有不同比例的控制列数时进行随机仿真, 得到的结论是; 控制列的减少不能使总计算量有数量级的降低, 即使把 B 矩阵的列数减少为全部列数的 10 %, 也只能使计算时间减少一半左右.

我们还以图 3 所示的随机生成的复杂网络为例, 对判断结构可控性及选择可行控制方案的已有算法进行验证. 该网络包含 100 个节点, 537 条有向边, 在该网络中随机选取 25 个节点作为可施加控制的节点 (图中黑色和灰色的点), 希望通过在这 25 个节点中找到合适的可行控制方案, 达到控制整个网络状态的目的.

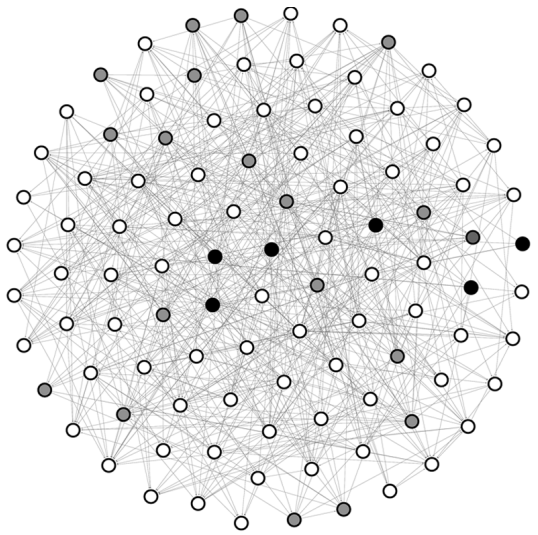


图 3　有 100 个节点的网络可行控制方案的选取

Fig. 3　Selection of feasible control schemes for a network with 100 nodes

对网络节点编号后可以得到 100×100 维状态结构矩阵 A 和 100×25 维控制结构矩阵 B, 不难验证 (A, B) 满足结构可控的充要条件. 在此情况下, 可以进一步探讨如何设计可行的控制方案. 首先采用文献 [12] 的标准标记方法判断冗余列, 可以得到 4 314 条去除冗余列的信息, 去除那些冗余列为状态列的无效信息后, 得到 324 条关于控制列冗余的有效信息, 这些信息进一步归并为 61 个条件, 经整理得到的结论是: 在 25 个可选节点中至少需要对 15 个节点施加控制才能保证系统结构可控, 其中节点 (1, 3, 4, 10, 20, 21) 必须施加控制 (图 3 中的黑色节点); 其余 19 个节点 (图 3 中的灰色节点) 中至少控制 9 个, 并且满足一系列形式为 "节点 (×, ×, ⋯, ×) 中至少需控制 × 个" 的条件. 虽然整个计算时间只用了 20.27 秒, 是可以接受的, 但经过验证发现两个问题: 1) 由文献 [12] 算法给出的判断冗余列的条件不完备, 在逐行回溯时所采用的单一路径可能造成某些必要条件的丢失, 虽然从算法角度不难修补这一不足, 但会大大增加回溯的计算量和计算时间; 2) 即使我们修补了文献 [12] 算法得到了可消除冗余列的充分必要条件, 这些数量众多的条件堆积在一起, 非常类似于用一系列不等式来表达变量可行域的情况, 对于解决实际问题并不能提供物理上直观的理解. 这表明用经典方法虽然可以在原理上得到全部可行控制的方案, 但其计算量大, 得到的结果对复杂网络的控制缺乏实际的意义.

为了解决上述问题, 我们对文献 [12] 给出的标记法提出了一种修改算法, 其主要思想是在标记过程中分块判断冗余列, 由于分块保证了相应行不降秩, 整体的行满秩可得到保证, 所得到的结果是结构可控的充分条件, 同时由于避免了全局回溯造成的计算量急剧上升, 修改算法的计算效率得到了很大提高. 但由于算法在分块中忽略了块之间的联系, 丢失了关于去除冗余列的更宽松的部分信息, 结果有一定的保守性.

采用修改算法经整理后得到的可行控制方案为:

1) 节点 (1, 3, 4, 10, 20, 21, 25) 必须控制;

2) 节点 (2, 13)、(6, 7)、(8, 23)、(14, 19)、(16, 22) 各自至少控制 1 个;

3) 节点 (9, 11, 15, 17) 中至少控制 3 个;

4) 节点 (5, 12, 18, 22) 可不加控制.

与采用标准标记法得到的不完备结果相比, 最少需要控制的节点数仍为 15 个, 但其中必须施加控

制的节点由 6 个变为 7 个 (增加了节点 25), 对其余节点的选择也增加了若干限制, 但恰恰是这些限制使结论的物理直观性更加明确. 可以验证, 符合这些条件的控制方案必定满足结构可控, 但反之不然, 例如选择对 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21) 这 15 个节点进行控制也是结构可控的, 但不满足修改算法得到的条件 1) 中 (25) 必须控制、2) 中 (14, 19) 至少需要控制 1 个和 3) 中 (9, 11, 15, 17) 中至少需要控制 3 个的要求. 这表明修改算法得到的只是可行控制方案中的一部分, 有一定的保守性. 但值得注意的是, 修改算法判断冗余列的计算时间仅为 0.251 秒, 大大提高了算法在实践中的可行性.

2.2 理解与思考

就问题的物理意义和数学描述而言, 复杂网络结构可控性和牵制控制的拓扑研究与经典控制论中动态系统结构可控性和可行控制方案的研究在本质上是一致的. 对于结构可控性的相关研究在 30 年多前就已取得了丰富的成果, 判断结构可控性和确定结构可控最小配置方案的一系列理论和算法为解析研究复杂网络的结构可控性和牵制控制问题提供了坚实的科学基础.

1) 在原理上研究结构可控性和可行控制方案已有完整的基本解析算法.

在经典控制论中关于结构可控性的判断和可行控制方案的选择已形成了一个比较完整的代数算法链, 它们包括:

a) 算法 1: 判断 $[A\ \ B]$ 输入可达的算法;

b) 算法 2: 判断 $[A\ \ B]$ 一般秩的算法;

c) 算法 3: 判断 $[A\ \ B]$ 行满秩时去除哪些控制列仍保持行满秩的算法;

d) 算法 4: 给出满足指定条件的具体控制列的算法.

其中, 算法 3 在通过冗余列判断得到一系列形为 "在第 ×、×、× 列中有 × 列是冗余的" 的信息基础上, 还需根据 "状态列不能去除" 的原则, 进一步整理归并为 "第 ×、×、× 控制列中可去除 × 个" 的信息. 算法 4 则继续把这些信息转化为 "0-1" 不等式, 例如 "第 1、3、6 控制列中有 1 列是冗余的" 可转化为 "$u_1 + u_3 + u_6 \geq 2$", 其中 u_i 只能取值 0 或 1, 分别表示不加和加上对应的控制, 所有转化后得到的 0-1 不等式组成了问题的可行解域, 而需满足的指定条件可作为目标函数, 从而可通过标准的 0-1 规划算法求出可施加控制列的具体解.

2) 在原理上可利用以上基本算法研究复杂网络的牵制控制问题.

对于复杂网络而言, 其结构可控性的研究只需应用上面的算法 1 和算法 2 即可判断, 所以这里只讨论牵制控制的有效性问题. 我们把问题归结为以下几类:

a) 分析类问题: 对于一个复杂网络, 知道对哪些节点可施加控制, 判断是否能实现牵制控制.

对于这类问题，可直接应用结构可控性条件即算法 1 和算法 2 进行判断。

b) 综合类问题 1: 对于一个复杂网络, 知道可施加控制的节点范围, 如果这些节点可以实现牵制控制, 找出满足一定条件（例如最少节点）的牵制控制方案; 如果这些节点不能实现牵制控制, 增加哪些输入节点可实现牵制控制.

对于这些节点可实现牵制控制的情况, 由于此时 $[A\ \ B]$ 必行满秩, 可以用算法 3 和算法 4 分别研究删除 B 的哪些多余列仍能保证 $[A\ \ B]$ 行满秩, 并求出满足给定条件的实现牵制控制的节点选择方案, 最后用算法 1 挑选出同时满足输入可达性的那些方案.

对于这些节点不能实现牵制控制的情况, $[A\ \ B]$ 不满足结构可控条件, 这时有两种可能:

i) 如果 $[A\ \ B]$ 行满秩, 但输入可达条件不满足, 只需考虑增加哪些输入列到 B 中可使输入可达, 适当组织程序应用算法 1 便可解决;

ii) 如果 $[A\ \ B]$ 行不满秩, 则需考虑增加哪些输入列到 B 中可使 $[A\ \ B]$ 行满秩, 通过适当组织程序并应用算法 3 和算法 4 找到相应的方案, 最后用算法 1 挑选出同时满足输入可达性那些方案.

c) 综合类问题 2: 对于一个复杂网络, 找出所有可能的牵制控制方案.

对于这类问题, 可首先令 B 为单位阵 (即在所有节点上均可加控制), 这时网络的结构可控性可以得到保证. 为了得到所有的牵制控制方案, 利用算法 3 和算法 4 先得到在 $[A\ \ B]$ 阵中删去哪些列可保持其行满秩, 然后根据这些删去条件构造一个 0-1 规划问题求出全部可能的输入方案, 并用算法 1 挑选出所有同时满足输入可达性的方案.

从以上的分析可以看出, 对于复杂网络的结构可控性和牵制控制, 尽管根据问题的不同提法需要组织相应的执行程序, 但其核心算法都是算法 1～4. 经典控制论中关于结构可控性和确定可行控制方案的一系列成果已经从原理上提供了解析判断复杂网络的结构可控性和确定牵制控制方案的方法.

2.3 问题与难点

虽然复杂网络的结构可控性和牵制控制问题有了解析求解的途径, 但经过初步探索, 这些算法在应用于大规模复杂网络时, 特别在处理综合类问题时, 仍存在着计算复杂性的瓶颈, 而且在针对问题设计算法方面也还有很大的探索空间.

1) 对大规模复杂网络难以得到完全解, 需要研究高效的近似算法

在上面所列的四个基本算法中, 判断输入可达的算法 (算法 1) 具有最小的计算复杂度, 完全可以应用于大规模复杂网络, 计算一般秩的算法 (算法 2) 的计算复杂度也相对较小, 至少在用于具有 1 000 个节点的网络时几十秒的计算时间也可以接受. 但是寻找冗余控制列的完全算法 (算法 3) 和求解全部可行解的算法 (算法 4) 在本质上都属于穷举算法, 不适用于节点数目巨大的复杂网络. 算法 3 在对每一行进行标记时, 都需对以前的各行进行回溯, 用于具有 300 个节点的网络时计算时间就达到十几个小时, 节点数继续增加时其计算量将急剧增长. 算法 4 是一个 0-1 规划问题, 找出一个可行解并不困难, 但是如果要找出所有的可行解, 则是一个耗时的搜索过程, 当网络规模扩大时, 由冗余控制列条件转化成的 0-1 规划约束数大大增加, 使算法 4 的求解复杂度大为增加. 由于算法 3 和算法 4 的计算复杂性都是本质性的, 因此对于大规模复杂网络, 有必要放弃求解的完全性, 探索如上面所述的找出部分冗余控制列的高效近似算法.

2) 针对问题设计合理利用已有信息的有效算法

作为代数算法, 其优点是在计算过程中能得到较多的有用信息, 例如当判断出 $[A\ \ B]$ 矩阵行不满秩时, 我们同时也知道了导致行降秩的原因, 因此可以探索如何利用这一信息来增补控制列以满足行满秩的有效算法, 而不必盲目地通过穷举的凑试来选择控制列. 又如, 在牵制控制的综合类问题中, 我们首先关注一般秩条件, 即在删除某些控制作用后 $[A\ \ B]$ 是否行满秩, 然后再检验所得方案是否输入可达, 实际上, 我们可以先用很少的计算时间给出输入可达的条件, 并将其加入到保证 $[A\ \ B]$ 行满秩的控制列删除条件中进行归并, 得到所需要的结果. 对于复杂网络的相关问题, 基本算法 1～4 提供了问题求解的核心算法, 而如何根据问题组织有效的程序, 对于提高问题求解的效率也是十分重要的.

3) 探索更高效的问题求解结构

当复杂网络的节点数目巨大时, 依靠算法本身已经很难解决计算复杂性问题, 这时是否可以从求解问题的结构上来考虑一些可行的方法. 经典大系统控制论中用集结、递阶、分散等方式降低问题规模和降低求解复杂性的方法论思想为探索高效的求解结构提供了空间. 例如, 对于文献 [12] 判断冗余列算法的不完备性, 我们的修改算法就是把整个网络划分为若干子网络, 把整体判断用分块判断来近似, 这样既保证了结果的正确性, 又使计算复杂度大幅度降低, 如果要想多花一些代价得到更完全的条件, 则可根据这些子网络间的关联关系, 进行有限的回溯. 经典控制论对这些问题的已有研究都着眼于算法的完备和条件的充要, 而如何面对实际需要快速地得到充分条件, 在原有算法基础上还有很大的探索空间.

4) 对偶研究复杂网络中的信息监测问题

在经典控制论中, 可控性与可观性存在着对偶关系, 与大系统结构可控性和确定可行控制方案相对应, 大系统结构可观性和确定可行的传感器配置方案有着与之完全对偶的判断条件和求解方法. 所谓可行传感器配置方案是指对大系统中哪些状态点配置传感器, 可以得到系统中所有状态的信息, 这方面已有不少相关研究工作, 如 Commault 等利用结构可观性研究用于故障诊断与隔离的传感器配置问题[13]. 在复杂网络中, 信息监测是指如何选择网络中的少部分节点进行监测可以了解整个网络 (或部分关键部位) 的动态, 这在许多复杂网络中都具有明确的现实意义, 其研究也受到相当的关注[14]. 信息监测问题的关键是: a) 结构可观性, 即对网络中部分节点进行监测后能否得到网络中全部节点或部分关键节点的信息; b) 有效性, 即如何选择监测点使达到目标所花的代价最小, 以上对结构可控性和牵制控制的探索完全可以对偶地用来处理这一问题.

3 大系统控制论对研究复杂网络的参考意义

3.1 经典结构分析方法的参考意义

以上分别应用大系统控制论中成熟的结构分析方法和结构可控性研究成果, 对复杂网络的结构分解和牵制控制问题进行了初步探索. 与网络科学常用的研究方法不同, 这里我们立足于从动态因果性和解析求解的思路开展研究, 所得到的结果也许可为复杂网络研究中解决相关问题提供一些新的思路和解析的手段. 通过初步探索, 我们提出以下一些看法:

1) 经典结构分析方法可为具有因果性复杂网络的结构分析提供参考

经典控制论中针对系统结构的研究成果是十分丰富的, 且有较坚实的控制理论基础和数学实现算法. 经典控制论用有向的因果关系描述系统结构, 这对在复杂网络中解决同样具有因果性的结构分析问题, 如研究节点对其他节点的因果影响链、研究系统结构中控制作用的施加等, 都有较好的参考意义. 但有些关联原因不明的复杂网络, 其拓扑结构只能用无向的关联关系而不能用有向的因果关系来描述, 对此就难以应用经典因果方法分析其结构. 所以, 对于现代复杂网络, 经典结构分析方法所能处理的网络和所能解决的问题只是其中特定的部分.

2) 经典结构分析的解析方法有助于深入理解复

杂网络结构的内在关系

对于复杂网络中一些具有因果性的结构问题, 在经典结构分析中可以找到相对应的理论和算法成果, 与网络科学中以实验手段来寻求结果相比, 这些理论和算法提供的解析手段具有更强的科学性, 更能深入到系统的本质来发现规律, 提供科学的分析方法. 对于这类问题, 以控制论的解析方法得到结果, 结合以网络科学的实验方法进行验证, 可以对复杂网络相关问题的研究提供从现象到本质的完整认识, 有助于推动复杂网络的研究. 此外, 由于解析方法提供了关于网络内部关系更丰富的信息, 有可能对复杂网络的结构分析提出新的思路, 如何把经典结构分析方法结合到复杂网络中一些现有的研究中, 为这些研究提供新的视角和解析的手段, 是具有广阔的探索空间的.

3) 解决经典结构分析方法的计算瓶颈是其可用于复杂网络研究的关键

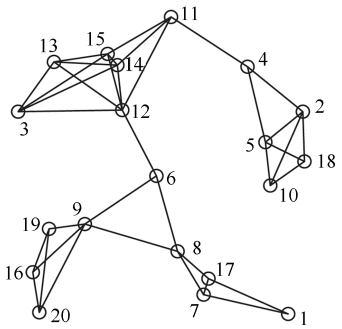
在用经典结构分析方法解决复杂网络的相关问题时, 虽然已经有了完备的理论和系统的算法, 问题在原理上已得到完美解决, 但当网络节点数目巨大时, 算法在实际上的可行性会遇到困难, 如上面寻找 k 步可达节点群的算法、寻找冗余列的算法、寻找 0-1 不等式组全部可行解的算法等都遇到了维数灾的瓶颈, 不能真正用来解决复杂网络的问题. 这些瓶颈是算法本身造成的, 不可能从本质上改变. 解决这一困难的办法是: a) 直接从算法出发研究其改进或近似, 降低计算复杂度; b) 从问题出发, 根据复杂网络的实际情况合理修改要求, 压缩解空间. 例如对于实际复杂网络, 求出其全部牵制控制方案只是一种立足于学术研究的提法, 在实际中更有意义的是选择有限的节点考虑最少成本的牵制控制, 由此可提高经典结构分析方法在复杂网络中的实际可行性.

3.2 经典大系统方法论的参考意义

除了上面重点研究的结构分析问题外, 复杂网络在本质上是高维大系统, 其控制与优化不可避免会遇到高维性带来的分析和计算的困难. 经典大系统控制论虽然是以现代控制理论为基本载体的, 但其为解决高维性难点所发展出来的一系列思想, 如集结、递阶分解、分散、分布式等, 具有方法论的意义, 对于定性或定量地研究复杂工程网络的控制、优化等问题也有一定的借鉴作用. 下面简单介绍如何利用特定的递阶结构化解复杂网络控制和优化复杂性的一些探索.

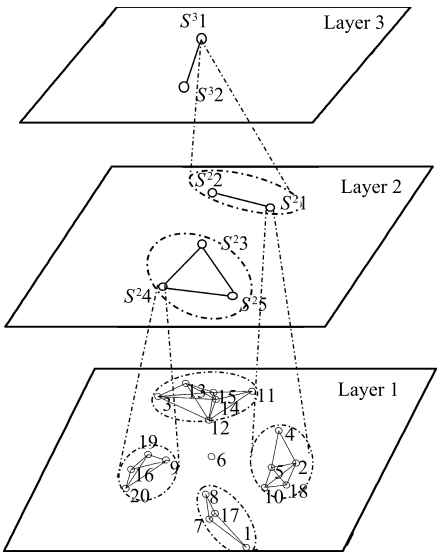
1) 多智能体一致性的递阶分解算法

在多智能体协作的一致性研究中, 当智能体个数很多时, 系统收敛需要较长的时间. 为了降低因智能体数量多造成的协调困难, 提高收敛速度, 文献 [15−16] 把大系统控制论中的递阶结构引入一致性问题的研究. 通过把智能体分解为若干群组, 每个群组内部先行协作, 并推出其代表构成上一层的多智能体协作问题, 如此构成多层次的协作, 只要对群组的分解使收敛速度满足一定条件, 通过这种分层协作的实现方式可以加快协作过程的收敛速度. 图 4 (a) 给出了一个 20 个智能体的拓扑结构, 采用文献 [16] 给出的具体分析和算法, 可以得到图 4 (b) 所示的递阶分解结构, 群体的一致性过程将通过从底层到顶层的一致性过程逐步实现.



(a) 整体拓扑结构

(a) Global topological structure



(b) 分层递阶分解

(b) Multi-layer hierarchical decomposition

图 4 20 个智能体的拓扑分解

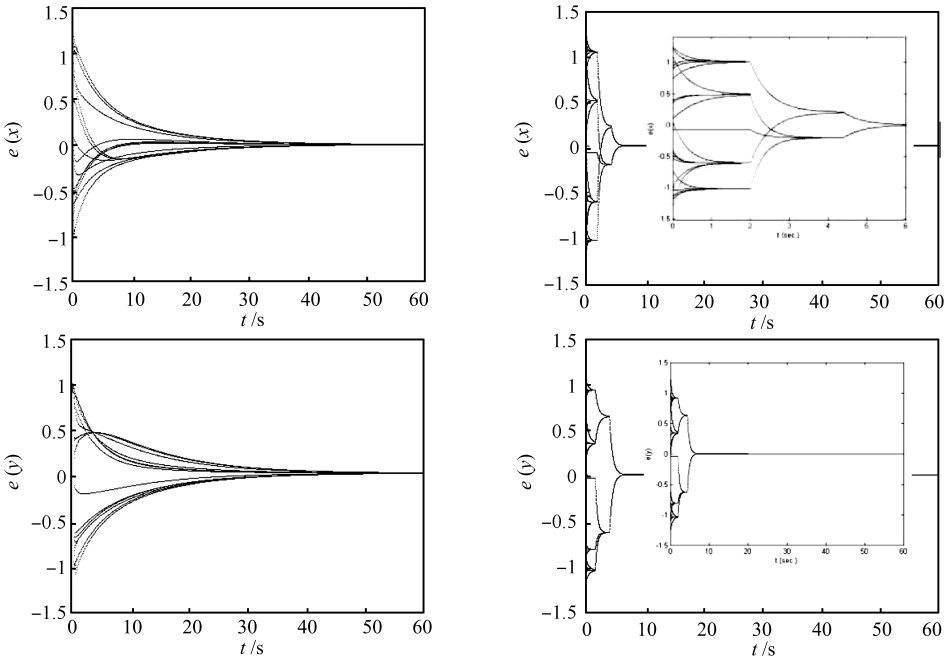
Fig. 4 Topological decomposition of 20 agents

采用递阶结构后, 每一层一致性的收敛过程大大加快, 从原来整体运行时需要的 50 秒左右下降到 6 秒左右. 图 5 给出了采用整体方案和递阶方案时各智能体随时间的收敛过程, 其中图 5 (a) 是整体一致性的结果, 图 5 (b) 是采用递阶方法的结果及其局部放大图, 上下则分别表示 x 和 y 坐标.

2) 复杂工程网络的控制与优化

对于大规模复杂工程网络, 如复杂工业生产过程、城市交通路网等, 在对其进行控制与优化时, 刻画其动态行为的数学模型是不可少的, 但如果只依靠单一的数学模型, 整个网络的控制与优化需要极大的计算量. 为此, 可以借鉴大系统控制论中的多层递阶控制方案, 采用图 6 所示的系统优化、区域控制和底层信息处理的分层递阶结构, 来化解复杂网络计算和决策的复杂性.

我们称上述结构为 "系统–控制–信息 (System-control-information, SCI)" 分层结构, 其中各层面采用不同模型来解决不同的问题, 但各层之间的问题有关联性. 一般而言, 在系统层面, 采用网络科学的宏观方法, 通过优化各区域间的 "流", 保持各区域工作在期望的 "势"; 在控制层面, 把上层所优化得到的 "流" 作为边界约束, 应用控制论的模型和优化控制方法, 得到区域内的控制量; 在信息层面, 通过实时检测实际的 "流" 并与上层所给的参考数据进行比较, 对上层给出的控制信号进行数据驱动的实时修正并付诸实施. 文献 [17] 结合城市交通路网优化研究了这类结构上两层的具体实现, 在系统层, 以通过对大量路网数据统计得到的刻画各区域路网流通情况的宏观基础图 (Macroscopic fundamental diagram, MFD) 为依据, 优化区域路网之间的流量, 使每一区域网络内的车辆数尽可能接近 MFD 中对应流通率最高时的整体车辆数, 从而使各区域路网内的流通率达到最优, 解决区域交通



(a) 采用整体方案
(a) With global scheme

(b) 采用递阶方案
(b) With hierarchical scheme

图 5　多智能体的收敛过程

Fig. 5　The convergence procedure of multi-agents

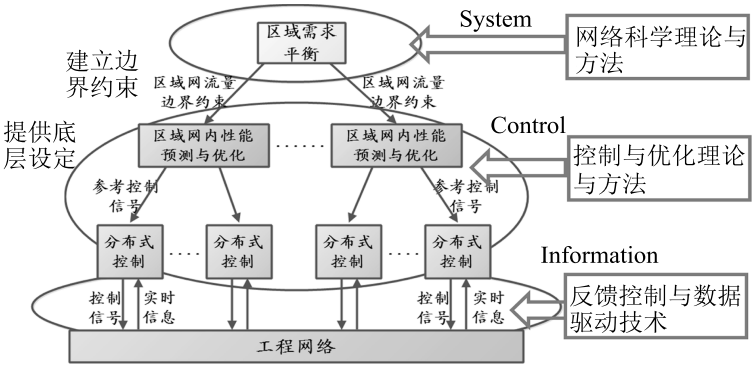


图 6　复杂工程网络控制与优化的 SCI 结构

Fig. 6　SCI structure for control and optimization of complex engineering networks

流的平衡问题; 在控制层, 以上层给出的流量作为区域路网外部流量约束 (边界约束), 在交通流动力学方程和交通信号约束下, 优化交通控制信号使车辆总行驶时间最少, 解决每一区域路网内的优化控制问题. 文中用路网仿真案例比较了递阶控制、集中控制和分区分散控制这三种方案的效果, 结果表明, 递阶方案在常用性能指标 (总耗费时间 TTS、总延迟时间 TDS) 方面与集中控制方案十分接近, 但由于递阶方案在上层根据各区域网络的宏观特性合理地分配车辆密度, 相比集中控制可大大提高网络流通率 (网络平均流 NMF). 这一案例说明采用多层结构可以用网络科学的宏观优化补充单纯的基于数学模型的优化控制的不足, 实现两者的优势互补.

上述例子对大系统递阶分解的方法论思想用于复杂网络控制与优化做了一些初步探索, 表明经典大系统控制论不仅可为复杂网络的结构分析提供解析手段, 而且对复杂网络的优化与控制也可提供方法论的参考.

4 结束语

复杂网络是当前众多学科关注的热点领域, 其研究内容和研究方法呈现出极为丰富的多样性, 吸引着相关学科的大量研究者. 本文用大系统控制论中的一些经典方法和方法论思想, 探索了复杂网络结构分析和控制优化的若干问题, 所提出的思考和提供的试验数据都只是初步的、不成熟的, 是否能用于复杂网络的相关问题还有待进一步研究和检验. 但我们认为, 控制科学作为一门具有方法论特征、在动态系统建模、控制、优化方面具有丰富理论成果和实践积累的学科, 可以更深度地切入这一领域的研究, 特别在复杂网络动态分析与演化、控制与优化方面发挥优势, 推动这一领域研究的进展. 同时, 复杂网络的特点和实际需求带来的各种挑战, 也将为控制科学的发展开辟新的空间.

致谢

王明鈞、袁冬旸同学为本文的探索提供了初步试验程序和数据, 王希晨同学在程序检验与修改方面做了大量工作, 陈关荣、汪小帆教授对本文初稿提出了宝贵意见, 谨在此一并表示感谢.

References

1 Wang Xiao-Fan, Li Xiang, Chen Guan-Rong. *Network Science: An Introduction*. Beijing: Higher Education Press, 2012
(汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论. 北京: 高等教育出版社, 2012)

2 Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L. Controllability of complex networks. *Nature*, 2011, **473**(7346): 167−173

3 Chen Guan-Rong. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312−321
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312−321)

4 Newman M E J. Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Physical Review E*, 2004, **69**(6): 066133

5 Yang Bo, Liu Jie, Liu Da-You. A random network ensemble model based generalized network community mining algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(5): 812−822
(杨博, 刘杰, 刘大有. 基于随机网络集成模型的广义网络社区挖掘算法. 自动化学报, 2012, **38**(5): 812−822)

6 Wang Zhong-Tuo. *Systems Engineering*. Beijing: National Defence Industrial Press, 1980
(王众託. 系统工程学. 北京: 国防工业出版社, 1980)

7 Su H S, Wang X F. *Pinning Control of Complex Networked Systems*. Berlin: Springer, 2013

8 Lin C T. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(3): 201−208

9 Glover K, Silverman L M. Characterization of structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(4): 534−537

10 Morari M, Stephanopoulos G. Studies in the synthesis of control structures for chemical processes: Part II: Structural aspects and the synthesis of alternative feasible control schemes. *AIChE Journal*, 1980, **26**(2): 232−246

11 Xi Yu-Geng. *Introduction to the Methodologies of Large Scale Dynamic Systems*. Beijing: National Defence Industrial Press, 1988
(席裕庚. 动态大系统方法导论. 北京: 国防工业出版社, 1988)

12 Johnston R D, Barton G W, Brisk M L. Determination of the generic rank of structural matrices. *International Journal of Control*, 1984, **40**(2): 257−264

13 Commault C, Dion J M, Agha S Y. Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation. *Automatica*, 2008, **44**(8): 2074−2080

14 Liu Y Y, Slotine J J, Barabási A L. Observability of complex systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2013, **110**(7): 2460−2465

15 Epstein M, Lynch K M, Johansson K H, Murray R M. Using hierarchical decomposition to speed up average consensus. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 612−618

16 Li X L, Xi Y G. Hierarchically decomposing multi-agent system to accelerate group consensus. In: Proceedings of the 8th Asian Control Conference. Kaohsiung: IEEE, 2011. 347−352

17 Ling T Y, Lin S, Xi Y G. Multi-level model-based control for large scale urban traffic networks. In: Proceedings of the 13th IFAC Symposium on Large Scale Complex Systems: Theory and Applications. Shanghai, China: IFAC, 2013. 484−489

席裕庚 上海交通大学自动化系教授. 主要研究方向为预测控制理论与应用, 大系统理论与应用.
E-mail: ygxi@sjtu.edu.cn
(**XI Yu-Geng** Professor in the Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University. His research interest covers theory and applications of predictive control and large scale systems.)