大气阻力摄动下平均轨道根数在轨实时确定方法

孙兆伟 [1]　仲惟超 [1]　张世杰 [1]　张 健 [1]

摘 要 为了满足卫星长期自主运行的任务需求, 本文同时考虑了大气阻力摄动和非球形摄动带谐项两种摄动对卫星平均轨道根数的影响, 提出了采用滤波算法在轨实时估计平均轨道根数的方法. 基于指数大气密度模型推导了大气阻力摄动下平均轨道根数的变化率, 分析了非球形带谐项摄动势函数对平均轨道根数的影响并推导了该影响下平均轨道根数变化率的通用计算方法, 由此建立了滤波状态方程以及以瞬时轨道根数为观测量的量测方程并分析了测量噪声特性; 为减小计算量以便于在轨实现, 提出采用基于球形单边 Sigma 采样的平方根 UKF (Unscented Kalman filter) 滤波来估计平均轨道根数. 数值仿真结果表明, 该算法有效、精度较高且鲁棒性好, 能够满足卫星长期自主在轨实时计算平均轨道根数的要求.

关键词 平均轨道根数, 大气阻力摄动, 带谐项摄动, UKF 滤波, 蒙特卡洛

引用格式 孙兆伟, 仲惟超, 张世杰, 张健. 大气阻力摄动下平均轨道根数在轨实时确定方法. 自动化学报, 2013, **39**(10): 1722−1728

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01722

Onboard Real-time Estimation of Mean Orbital Elements with Atmospheric Drag

SUN Zhao-Wei[1]　ZHONG Wei-Chao[1]　ZHANG Shi-Jie[1]　ZHANG Jian[1]

Abstract To solve the problem of mean orbital elements calculation for long-term autonomous missions, a filter estimation method is used to estimate the mean orbital elements with the effects of atmospheric drag and the gravitational potential of zonal harmonics. The effects of atmospheric drag are analyzed by virtue of analytical orbital mechanics with the spherical exponential model of atmospheric density. The general formulas are derived for the rates of change of mean orbital elements perturbed by gravitational potential zonal harmonics. The state equations and measurement equations are established to treat the mean orbital elements as state variables and the osculating orbital elements as measurements. The distribution of the measurement noise is analyzed. In this estimator, the spherical simplex sigma-point selection and the square root form of unscented Kalman filter (UKF) are fused for less computational cost and better numerical stability on-board. Numerical simulations are performed to demonstrate the viability of the proposed method. Comparison with another approach shows that the proposed one can estimate mean orbital elements on-board for a real-time and long-term mission and can offer a higher accuracy.

Key words Mean orbital elements, atmospheric drag, zonal harmonics, unscented Kalman filter (UKF), Monte Carlo

Citation Sun Zhao-Wei, Zhong Wei-Chao, Zhang Shi-Jie, Zhang Jian. Onboard real-time estimation of mean orbital elements with atmospheric drag. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(10): 1722−1728

在卫星长期任务规划以及轨道的修正、保持和机动等任务中, 平均轨道根数作为描述卫星长期运动规律的变量, 是任务设计的关键参数[1−2]. 因此, 精确计算平均轨道根数是实现各种轨道任务的重要基础. 尤其对于近几年兴起的卫星自主飞行任务[3], 更要求卫星通过星载设备自主进行平均轨道根数的在轨实时计算, 进而为自主任务规划提供依据[4−5].

对于平均轨道根数的计算, 传统方法是基于大量的地面观测数据, 利用最小二乘法或扩展卡尔曼滤波迭代计算该观测弧段初始时刻的平均轨道根数[6]. 可见这种方式只适合离线的轨道分析, 缺乏实时性和自主性. 为此有学者基于 Brouwer 和 Lyddane 理论提出了根据当前测量数据实时计算平均根数的直接解析方法[7], 但该方法精度不高. 此外, 除了地球非球形摄动, 大气阻力摄动对平均轨道根数的影响也是主要研究内容之一. 在已有文献中, 通常采用指数大气模型[8]. 由于大气的复杂属性, 指数大气模型与真实大气模型偏差较大. 此时, 仍采用解析法计算平均轨道根数, 对计算精度影响较大.

鉴于现有方法的不足, 本文考虑大气阻力摄动和地球非球形摄动的影响, 以小偏心率低轨卫星为研究对象, 将轨道理论中的解析方法与现代滤波理论相结合, 基于 UKF (Unscented Kalman filter) 滤波算法提出一种既满足自主性和实时性, 又具有较强的鲁棒性的平均轨道根数确定方法. 为了使算法

收稿日期 2012-11-08　录用日期 2013-04-25
Manuscript received November 8, 2012; accepted April 25, 2013
国家自然科学基金 (61021002) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61021002)
本文责任编委 李东旭
Recommended by Associate Editor LI Dong-XU
1. 哈尔滨工业大学卫星技术研究所 哈尔滨 150080
1. Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080

满足长期运行的要求, 本文研究的平均轨道根数同时包含长期项和长周期项.

1　大气阻力摄动对平均轨道根数的影响

对于低轨卫星, 大气阻力摄动是主要的摄动因素之一. 本文主要研究轨道高度在 550 km ~ 700 km 范围内的小偏心率低轨卫星. 卫星在轨运行时, 单位质量上受到的大气阻力为[5]

$$\boldsymbol{F}_{\rm drag}=-\frac{1}{2}\frac{SC_{\rm D}}{m}\rho\left(\boldsymbol{v}_{\rm sat}-\boldsymbol{v}_{\rm atm}\right)\left\|\boldsymbol{v}_{\rm sat}-\boldsymbol{v}_{\rm atm}\right\| \tag{1}$$

式中, S 为在垂直卫星速度方向上的横截面积, $C_{\rm D}$ 为阻力系数, m 为卫星质量, ρ 为大气密度, $\boldsymbol{v}_{\rm sat}$ 为卫星速度矢量, $\boldsymbol{v}_{\rm atm}$ 为大气速度矢量. 这里假设大气运动速度与地球自转速度相同, 即 $\boldsymbol{v}_{\rm atm}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega_{\rm e}\end{bmatrix}^{\rm T}\times\boldsymbol{r}$, 其中, $\omega_{\rm e}$ 为地球自转角速度, $\boldsymbol{r}$ 为卫星位置矢量.

将大气阻力分解成速度方向分量 $F_{\rm T}$、轨道面内垂直速度矢量指向外的分量 $F_{\rm N}$ 以及轨道面法向分量 $F_{\rm W}$, 则有:

$$\begin{cases}F_{\rm T}=-\dfrac{1}{2}K_1n^2a^2\rho\dfrac{1+2e\cos f+e^2}{1-e^2}\\ F_{\rm N}=0\\ F_{\rm W}=-\dfrac{1}{2}K_2na\rho r\cos u\sin i\sqrt{\dfrac{1+2e\cos f+e^2}{1-e^2}}\end{cases} \tag{2}$$

式中, n 为卫星平均角速度, f 为真近点角, u 为纬度幅角. $K_1=\left(C_{\rm D}S_1/m\right)Q$, $K_2=\left(C_{\rm D}S_2/m\right)\omega_{\rm e}\sqrt{Q}$, $Q=\left(1-r_{\rm p}\omega_{\rm e}\cos i/v_{\rm p}\right)^2$, S_1 和 S_2 分别为垂直切向和轨道面法向的横截面积, $r_{\rm p}$ 为近地点地心距, $v_{\rm p}$ 为近地点卫星速率.

令大气阻力引起的平均轨道根数变化为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm drag}=\begin{bmatrix}\dot a_{\rm drag} & \dot e_{\rm drag} & \dot i_{\rm drag} & \dot\Omega_{\rm drag} & \dot\omega_{\rm drag} & \dot M_{\rm drag}\end{bmatrix}^{\rm T} \tag{3}$$

因为大气阻力摄动为非保守力摄动, 因此, 采用 Gauss 型摄动方程研究轨道根数的变化率[6]. 将式 (2) 代入 Gauss 型摄动运动方程可得:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm drag}=\begin{bmatrix}-\frac{K_1na^2\rho}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{3}{2}}\\ -\frac{K_1na\rho}{\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\cos f+e\right)\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ -\frac{K_2a\rho\sin i}{4(1+e\cos f)^2}\left(1+\cos 2u\right)\left(1-e^2\right)\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ -\frac{K_2a\rho\sin 2u}{4(1+e\cos f)^2}\left(1-e^2\right)\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ -\frac{K_1na\rho\sin f}{e\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{1}{2}}-\cos i\cdot\dot\Omega_{\rm drag}\\ -\frac{K_1na\rho\sin f}{e(1+e\cos f)}\left(1+e\cos f+e^2\right)\left(1+2e\cos f+e^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix} \tag{4}$$

对于球对称且标高为常数的指数大气模型, 大气密度 ρ 可以表示为

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{r_0-r}{H}\right) \tag{5}$$

式中, H 为标高, r 为地心距, ρ_0 为地心距 r_0 处的大气密度.

对于小偏心率卫星, 因其轨道高度变化范围不大, 所以指数大气模型能够计算出较准确的大气密度. 若取 r_0 为近地点处的地心距, 并将大气密度展开成级数形式, 有:

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{-ae}{H}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{ae\cos E}{H} \tag{6}$$

根据平均值理论, 可知摄动运动方程在一个轨道周期内平均值可定义为[9]

$$\bar{\boldsymbol{F}}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{F}{\rm d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}{\rm d}M \tag{7}$$

式中, T 为卫星的轨道周期, M 为平近点角. 则大气摄动的短周期部分为 $\boldsymbol{F}_{\rm s}=\boldsymbol{F}-\bar{\boldsymbol{F}}$.

将偏近点角 E 和真近点角 f 与平近点角 M 的转化公式[6] 以及式 (4) 和式 (6) 代入式 (7), 可得到由大气阻力摄动引起的平均轨道根数的变化率 (见式 (8)).

式 (8) 中, $I_j\,(j=0,\cdots,4)$ 为 Bessel 函数. 大气标高可由如下公式计算[5]:

$$H=61.85+5.9483895\left(\exp\left(\frac{h-500}{99.5}\ln 2\right)-1\right)$$

式中, h 为轨道高度. 该公式对轨道高度满足 $480\,{\rm km}\le h<900\,{\rm km}$ 的低轨卫星有效.

2　带谐项摄动对平均轨道根数的影响

由于田谐项只影响卫星的短周期运动, 这里仅考虑摄动势函数的带谐项, 可表示为

$$R_{\rm zonal}=-\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{r_{\rm e}}{r}\right)^nP_n\left(\sin\varphi\right) \tag{9}$$

式中, $r_{\rm e}$ 为地球半径, φ 为地心纬度并满足 $\sin\varphi=\sin i\sin\left(\omega+f\right)$, P_n 是 Legendre 多项式. 可见, 带谐项是真近点角的函数, 故将式 (7) 改写为

$$\bar{\boldsymbol{F}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2{\rm d}f \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm drag}=\left[\begin{array}{c}-K_1\rho_0 na^2\left(I_0+2eI_1+\dfrac{3}{4}e^2\left(I_0+I_2\right)+\dfrac{1}{4}e^3\left(3I_1+I_3\right)+\mathcal{O}\left(e^4\right)\right)\exp\left(\dfrac{-ae}{H}\right)\\ -K_1\rho_0 na\left(I_1+\dfrac{e}{2}\left(I_0+I_2\right)-\dfrac{e^2}{8}\left(5I_1+I_3\right)-\dfrac{e^3}{16}\left(5I_0+4I_2-I_4\right)+\mathcal{O}\left(e^4\right)\right)\exp\left(\dfrac{-ae}{H}\right)\\ -\dfrac{1}{4}K_2\rho_0 a\sin i\left(I_0-2eI_1+\left(I_2-2eI_1\right)\cos2\omega+\mathcal{O}\left(e^2\right)\right)\exp\left(\dfrac{-ae}{H}\right)\\ -\dfrac{1}{4}K_2\rho_0 a\left(I_2-2eI_1+\mathcal{O}\left(e^2\right)\right)\exp\left(\dfrac{-ae}{H}\right)\\ -\cos i\cdot\dot{\Omega}_{\rm drag}\\ \dfrac{3}{4}K_1\rho_0 n^2 a\left(I_0+2eI_1+\dfrac{3}{4}e^2\left(I_0+I_2\right)+\dfrac{1}{4}e^3\left(3I_1+I_3\right)+\mathcal{O}\left(e^4\right)\right)\left(t-t_0\right)\exp\left(\dfrac{-ae}{H}\right)\end{array}\right]\tag{8}$$

与处理大气阻力摄动的方法类似, 将式 (9) 展开成有关真近点角的级数形式并代入式 (10), 以提取出摄动势函数的长期部分 $R_{\rm c}$ 和长周期部分 $R_{\rm l}$, 分别如式 (11) 和式 (12) 所示.

$$\begin{aligned}R_{\rm c}=&-\frac{\mu}{a}\sum_{n\ge2_{+2}}\left(\frac{r_{\rm e}}{a}\right)^nJ_nK_{n+1}\left(e\right)\\&\sum_{q=0}^{\frac{n}{2}}\left(-1\right)^{\frac{1}{2}\left(n+2q\right)}2^{-\left(n+2q\right)}\times\\&{\rm C}_n^{\frac{n}{2}-q}{\rm C}_{n+2q}^n{\rm C}_q^{2q}(\sin i)^{2q}\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}R_{\rm l}=&-\frac{\mu}{a}\sum_{n\ge3}\left(\frac{r_{\rm e}}{a}\right)^nJ_n\sum_{p=0}^{\frac{1}{2}\left(n-2+\delta_1\right)}K_{n+1}^p\left(e\right)\\&\left[\left(1-\delta_1\right)\cos\left(n-2p\right)\omega+\delta_1\sin\left(n-2p\right)\omega\right]\times\\&\Big[\sum_{q=0}^{p}\left(-1\right)^{\frac{1}{2}\left(n+2q-\delta_1\right)}2^{-\left(2n-2p+2q-1\right)}\times\\&{\rm C}_n^{p-q}{\rm C}_{2n-2p+2q}^n{\rm C}_{n-2p+2q}^q(\sin i)^{n-2p+2q}\Big]\end{aligned}\tag{12}$$

式中, $K_{n+1}(e)=(1-e^2)^{-(n-\frac{1}{2})}\sum_{l=0_{+2}}^{n-1-\delta_2}{\rm C}_{n-1}^l\cdot{\rm C}_l^{\frac{l}{2}}(\frac{e}{2})^l$, $K_{n+1}^p(e)=\delta_3(1-e^2)^{\frac{1}{2}-n}\sum_{l=(n-2p)_{+2}}^{n-2}{\rm C}_{n-1}^l\cdot{\rm C}_l^{\frac{l-n+2p}{2}}\frac{e^l}{2^l}$, ${\rm C}_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $\delta_1=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]$, $\delta_2=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$, $\delta_3=\begin{cases}0, & p=0\\1, & p\neq0\end{cases}$.

由文献 [6] 可知, 由于非球形摄动势函数是非线性的, 故其短周期部分对平均轨道根数也有影响, 其量级与 J_4 项量级相同, 因此不能忽略. 而大气阻力摄动短周期部分 $\boldsymbol{F}_{\rm s}$ 对平均轨道根数的影响在量级上远小于其平均值部分 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 的影响, 故本文不对其分析. 非球形摄动势函数短周期部分的长期和长周期作用可以表示为

$$\begin{aligned}\langle R_{\rm s}\rangle=&\frac{3J_2^2r_e^4\mu}{128\eta^7a^5}\left[\cos^4 i\left(5\eta^2+36\eta+35\right)-\right.\\&\cos^2 i\left(18\eta^2-24\eta-10\right)+5\eta^2-4\eta-5+\\&\left.e^2\left(30\cos^4 i-32\cos^2 i+2\right)\cos2\omega\right]\end{aligned}\tag{13}$$

式中, $\eta=\sqrt{1-e^2}$.

带谐项摄动为保守力摄动, 因此将式 (11) ∼ 式 (13) 表示的摄动势函数代入拉格朗日型摄动运动方程[6], 可以直接得到在带谐项摄动作用下平均轨道根数的变化率, 记为 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm zonal}$. 由于篇幅限制, a 的具体表达式不再展开. 其中, 半长轴、偏心率和轨道倾角的长期项变化率为 0. 结合式 (8) 可知, 半长轴、偏心率和轨道倾角只在大气阻力摄动影响下存在长期衰减.

3 球形单边平方根 UKF 滤波

UKF 滤波是针对非线性系统设计的滤波方法, 具有较高的精度和较好的鲁棒性[10−11]. 本文采用球形单边 Sigma 点技术[12], 在不降低精度的前提下, 大幅减少计算量以满足在轨实时计算的要求. 此外, 采用平方根形式的 UKF 可以在保证滤波数值稳定性的同时, 进一步降低计算量[13].

3.1 状态方程和量测方程

结合第 1 节和第 2 节中内容, 以平均轨道根数作为状态变量 $\boldsymbol{x}$, 以瞬时轨道根数作为直接观测量 $\boldsymbol{y}$, 可建立状态方程和量测方程.

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(t_k\right)=\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm zonal}\left(\boldsymbol{x},t_k\right)+\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\rm drag}\left(\boldsymbol{x},t_k\right)+\boldsymbol{w}\left(t_k\right)\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}\left(t_k\right)=&\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}\right)=\\&\boldsymbol{x}\left(t_k\right)+\boldsymbol{\sigma}_{\rm s\_zonal}\left(\boldsymbol{x},t_k\right)+\boldsymbol{\sigma}_{\rm s\_drag}\left(\boldsymbol{x},t_k\right)+\boldsymbol{v}\left(t_k\right)\end{aligned}\tag{15}$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_{\rm s\_zonal}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{\rm s\_drag}$ 分别为非球形摄动和大气阻力摄动影响下的轨道根数短周期项, 其详细推导过

程可参见文献 [14−15]. $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为系统状态噪声和量测噪声, 其中 $\boldsymbol{w}$ 是服从于 $\mathrm{N}(0,Q)$ 的高斯噪声, Q 为协方差矩阵.

由于瞬时轨道根数是无法直接测量获得的, 而是根据测量的位置和速度信息计算得到的, 因此需要对瞬时轨道根数的误差分布进行分析. 此外, 卫星的位置和速度转换到卫星瞬时轨道根数是非线性的, 很难采用解析方法来研究轨道根数的误差. 为此本文采用蒙特卡罗仿真来研究瞬时轨道根数的误差分布. 假设位置和速度的测量误差分别为 5 m (1σ, 三轴) 和 0.002 m/s (1σ, 三轴), 卫星的初始瞬时轨道根数如表 1 所示.

表 1　初始瞬时轨道根数

Table 1　Initial osculating elements

瞬时轨道根数	数值
半长轴 a (km)	7 000
偏心率 e	0.01
轨道倾角 i (°)	55
升交点赤径 Ω (°)	10
近心点角距 ω (°)	10
平近点角 M (°)	10

通过 10 000 次蒙特卡罗法仿真, 可以得到瞬时轨道根数的误差方差和误差分布情况, 分别如表 2 和图 1 所示.

表 2　瞬时轨道根数误差方差

Table 2　Covariance of measurement

瞬时轨道根数误差方差	数值
半长轴 a (m^2)	38.0
偏心率 e	2.28×10^{-13}
轨道倾角 i (deg^2)	1.03×10^{-13}
升交点赤径 Ω (deg^2)	1.36×10^{-13}
近心点角距 ω (deg^2)	2.59×10^{-9}
平近点角 M (deg^2)	2.60×10^{-9}

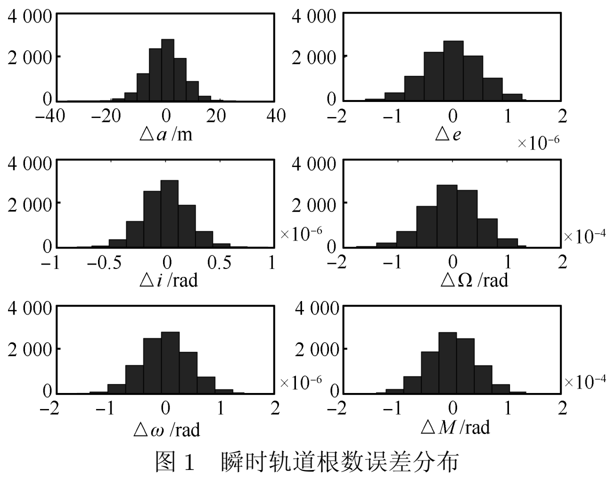


图 1　瞬时轨道根数误差分布

Fig. 1　Distribution of osculating elements errors

由分析可知, 瞬时轨道根数误差均值近似为零且满足正态分布, 即测量噪声为服从 $\mathrm{N}(0,R)$ 的高斯噪声, R 为协方差矩阵, 可由表 2 给出.

3.2　球形单边 Sigma 点采样方法

球形单边 Sigma 点的确定过程是一个迭代过程, 步骤如下:

1) 选取 $0\le W_0\le 1$;

2) 计算 $i\ne 0$ 时, Sigma 点的权值:

$$W_i=\frac{1-W_0}{n+1}\tag{16}$$

3) 迭代的初始向量为 $Z_0^1=[0]$, $Z_1^1=\left[-\frac{1}{\sqrt{2W_1}}\right]$, $Z_2^1=\left[\frac{1}{\sqrt{2W_1}}\right]$;

4) 当向量维数大于 1 维时, 迭代公式为

$$\boldsymbol{Z}_i^j=\begin{cases}\begin{bmatrix}Z_0^{j-1}\\0\end{bmatrix}, & i=0\\ \begin{bmatrix}Z_i^{j-1}\\ \frac{-1}{\sqrt{j(j+1)W_1}}\end{bmatrix}, & i=1,\cdots,j\\ \begin{bmatrix}0_{j-1}\\ \frac{j}{\sqrt{j(j+1)W_1}}\end{bmatrix}, & i=j+1\end{cases}\tag{17}$$

3.3　滤波流程

对于由式 (16) 表示的状态方程和量测方程, 滤波算法步骤如下:

1) 计算 Sigma 点

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1|i}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+S_{\boldsymbol{x}_{k-1}}\boldsymbol{Z}_i,\quad i=0,\cdots,n+1\tag{18}$$

式中, $S_{\boldsymbol{x}_k}$ 为状态方差的平方根, 其初值为

$$S_{x_0}=\mathrm{chol}\left(\mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0\right]\left[\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0\right]^{\mathrm{T}}\right)$$

其中, $\mathrm{chol}(\cdot)$ 表示 Cholesky 分解.

2) UKF 时间更新

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-=\sum_{i=0}^{n+1}w_i^m\boldsymbol{\chi}_{k|i}\tag{19}$$

$$S_{\boldsymbol{x}_k}^-=\mathrm{qr}\left(\left[\sqrt{W_1^c}\left(\boldsymbol{\chi}_{k|1:n+1}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-\right),\sqrt{Q}\right]\right)\tag{20}$$

$$S_{\boldsymbol{x}_k}^-=\mathrm{cholupdate}\left(S_{\boldsymbol{x}_k}^-,\boldsymbol{\chi}_{k|0}-\hat{\boldsymbol{x}}_0,W_0\right)\tag{21}$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k|i}^*=\hat{\boldsymbol{x}}_k^-+S_{\boldsymbol{x}_k}^-\boldsymbol{Z}_i\tag{22}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{k|i}=\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{\chi}_{k|i}^*\right)\tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_k^-=\sum_{i=0}^{n+1}W_i\boldsymbol{\gamma}_{k|i}\tag{24}$$

式中, qr(·) 和 cholupdate(·) 分别表示 QR 分解和 Cholesky 一阶更新, $\boldsymbol{\chi}_{k|i}$ 为状态变量 Sigma 点集的一步预测值. 本文采用对状态方程进行数值积分的方法计算 $\boldsymbol{\chi}_{k|i}$, 可以很好地平衡计算量和计算精度[16], 同时避免了状态方程离散化产生的离散化误差.

3) UKF 量测更新

$$S_{\boldsymbol{y}_k} = \mathrm{qr}\left(\left[\sqrt{W_1}\left(\boldsymbol{\gamma}_{k|1:n+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-\right), \sqrt{R}\right]\right) \tag{25}$$

$$S_{\boldsymbol{y}_k} = \mathrm{cholupdate}\left(S_{\boldsymbol{y}_k}, \boldsymbol{\gamma}_{k|0} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-, W_0\right) \tag{26}$$

$$P_{\boldsymbol{xy}_k} = \sum_{i=0}^{n+1} W_i \left[\boldsymbol{\chi}_{k|i} - \hat{\boldsymbol{x}}_k^-\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_{k|i} - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-\right]^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

$$K_k = \frac{\frac{P_{\boldsymbol{xy}_k}}{S_{\boldsymbol{y}_k}^{\mathrm{T}}}}{S_{\boldsymbol{y}_k}} \tag{28}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + K_k\left(\boldsymbol{y}_k - \hat{\boldsymbol{y}}_k^-\right) \tag{29}$$

$$U = K_k S_{\boldsymbol{y}_k} \tag{30}$$

$$S_{\boldsymbol{x}_k} = \mathrm{cholupdate}\left(S_{\boldsymbol{x}_k}^-, U, -1\right) \tag{31}$$

式中, $\boldsymbol{y}_k$ 为 t_k 时刻的瞬时轨道根数, $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 为平均轨道根数的估计值.

4 仿真验证

卫星初始时刻的瞬时轨道根数如表 1 所示. 考虑非球形摄动带谐项阶数为 $n = 8$, 且采用指数大气模型. 卫星质量为 6 kg, 阻力系数 $C_D = 2.2$, 横截面积 $S = 0.2474$. 此外, 考虑日月引力摄动、光压摄动和潮汐摄动等摄动因素生成测量轨道数据.

设初始平均轨道根数的估计值如表 3 所示.

表 3 初始拟平均轨道根数估计值

Table 3 Initial mean orbital elements

平均轨道根数	数值
半长轴 a (km)	6 995
偏心率 e	0.0094
轨道倾角 i (°)	54.7
升交点赤径 Ω (°)	9.6
近心点角距 ω (°)	8.4
平近点角 M (°)	15.5

初始误差矩阵为

$$P_0 = \mathrm{diag}\left\{\left[\delta_{P_a}^2, \quad \delta_{P_e}^2, \quad \delta_{P_i}^2, \quad \delta_{P_\Omega}^2, \quad \delta_{P_\omega}^2, \quad \delta_{P_M}^2\right]\right\}$$

式中, δ_P^2 为状态变量初始估计误差方差, 且

$$\begin{cases} \delta_{P_a}^2 = 1\,000\,\mathrm{m}^2, & \delta_{P_e}^2 = 0.00001 \\ \delta_{P_i}^2 = 0.02\,\mathrm{deg}^2, & \delta_{P_\Omega}^2 = 0.045\,\mathrm{deg}^2 \\ \delta_{P_\omega}^2 = 0.3\,\mathrm{deg}^2, & \delta_{P_M}^2 = 0.3\,\mathrm{deg}^2 \end{cases}$$

系统过程噪声矩阵为

$$Q_0 = \mathrm{diag}\left\{\left[\delta_{Q_a}^2, \quad \delta_{Q_e}^2, \quad \delta_{Q_i}^2, \quad \delta_{Q_\Omega}^2, \quad \delta_{Q_\omega}^2, \quad \delta_{Q_M}^2\right]\right\}$$

式中, δ_Q^2 为系统状态变量过程噪声方差, 且

$$\begin{cases} \delta_{Q_a}^2 = 1\times10^{-8}\ \mathrm{m}^2 \quad, & \delta_{Q_e}^2 = 1\times10^{-16} \\ \delta_{Q_i}^2 = 1\times10^{-16}\,\mathrm{deg}^2, & \delta_{Q_\Omega}^2 = 1\times10^{-18}\,\mathrm{deg}^2 \\ \delta_{Q_\omega}^2 = 1\times10^{-15}\,\mathrm{deg}^2, & \delta_{Q_M}^2 = 1\times10^{-14}\,\mathrm{deg}^2 \end{cases}$$

量测噪声方差阵为

$$R = \mathrm{diag}\left\{\left[\delta_{R_a}^2, \quad \delta_{R_e}^2, \quad \delta_{R_i}^2, \quad \delta_{R_\Omega}^2, \quad \delta_{R_\omega}^2, \quad \delta_{R_M}^2\right]\right\}$$

式中, δ_R^2 为量测噪声方差, 其具体取值见表 2.

根据表 1 的卫星轨道参数进行分析, 其长周期项周期大约为 5 个月. 为说明算法的长期有效性, 选取仿真时间为 6 个月 (180 天), 采样周期为 60 秒. 仿真结果如图 2～图 4 所示, 给出了半长轴、偏心率和轨道倾角的计算结果.

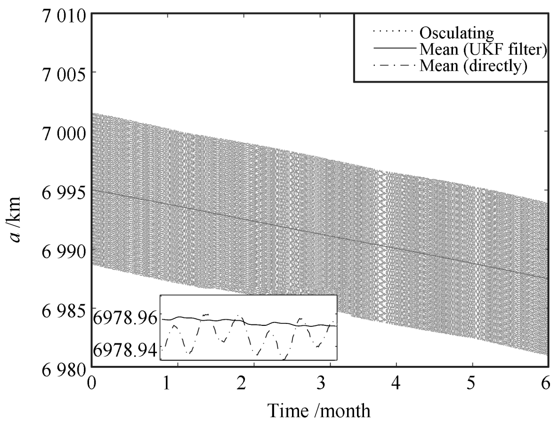


图 2 半长轴

Fig. 2 Semimagjor axis

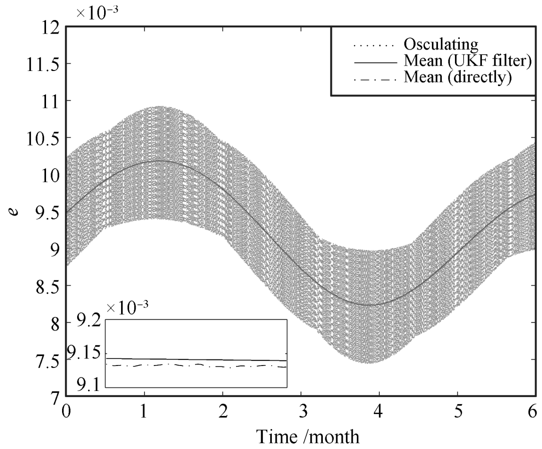


图 3　偏心率

Fig. 3　Eccentricity

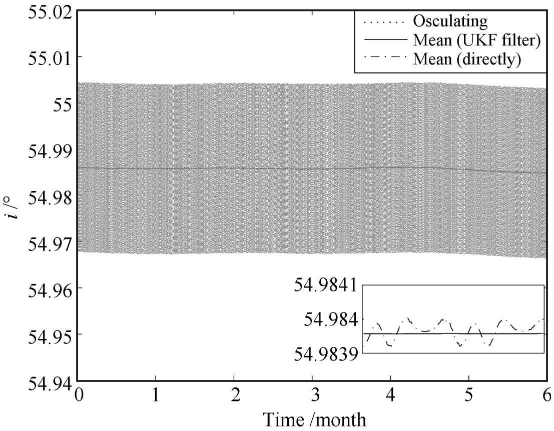


图 4　轨道倾角

Fig. 4　Inclination

图 2～4 中分别给出了采用滤波算法和直接法计算得到的平均根数, 以及瞬时轨道根数. 局部放大图表示第 180 天的平均轨道根数仿真结果. 从仿真结果图 2～4 中可以看出, 本文算法能够长期应用于平均轨道根数的计算. 由于大气阻力摄动的影响, 半长轴存在长期衰减; 偏心率受到长周期项和长期项的共同作用, 其长期趋势是减小的; 轨道倾角的变化范围很小, 由摄动产生的长周期项和长期项作用不明显. 通过与直接法的比较可以看出本文算法计算出的平均轨道根数更平滑, 不易受测量噪声的影响. 为说明本文算法的精度, 表 4 给出了本文算法与直接法的精度. 由表 4 可知, 本文算法的精度高于直接法. 为进一步说明本文算法鲁棒性, 采用更为复杂和精确的 NRLMSISE-00 大气密度模型生成测量数据并进行仿真. 由仿真结果可知, 本文算法依然有效, 其精度如表 4 所示.

表 4　平均轨道根数估计精度

Table 4　Estimation accuracy of mean orbital elements

轨道根数	直接法	滤波法 (指数大气)	滤波法 (NRLMSISE-00)
a (km)	20	2.5	2.8
e	4.9×10^{-5}	5.0×10^{-6}	5.2×10^{-6}
i (°)	5.1×10^{-5}	4.0×10^{-6}	5.6×10^{-6}
Ω (°)	2.2×10^{-4}	3.1×10^{-5}	4.5×10^{-5}
ω (°)	0.15	0.016	0.02

5　结论

1) 本文针对卫星长期自主运行的发展需求, 以小偏心率低轨卫星为研究对象, 同时考虑地球非球形摄动和大气阻力摄动的影响, 提出了一种基于球形单边平方根 UKF 滤波的平均轨道根数计算方法. 与传统方法相比, 本文算法能满足自主卫星在轨实时计算平均轨道根数的要求. 由仿真结果可知, 本文算法具有长期有效、精度较高、稳定性好和鲁棒性好等优点.

2) 本文是在卫星无轨道机动的情况下研究的平均轨道根数确定方法. 但卫星在轨运行通常需进行变轨、保持等轨道机动操作, 尤其对于编队卫星的队形保持和队形重构等任务, 其轨道控制更加频繁. 因此, 下一步工作可研究在卫星存在轨道机动时平均轨道根数的滤波估计算法.

References

1 Lin Xiao-Hui, Zhang Jin-Xiu, Cao Xi-Bin. Orbit modulation method based on mean orbit elements. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2005, **35**(5): 556−561
(林晓辉, 张锦绣, 曹喜滨. 基于平均轨道要素的轨道修正方法. 吉林大学学报 (工学版), 2005, **35**(5): 556−561)

2 Wang Gong-Bo, Zheng Wei, Tang Guo-Jian. Application of UKF in spacecraft relative navigation based on quasi-mean element differences. *Journal of Astronautics*, 2011, **32**(5): 1047−1053
(王功波, 郑伟, 汤国建. 基于拟平均根数之差的航天器相对导航 UKF 滤波算法. 宇航学报, 2011, **32**(5): 1047−1053)

3 Gurfil P, Herscovitz J, Pariente M. The SAMSON project — cluster flight and geolocation with three autonomous nano-satellites. In: Proceedings of the 26th AIAA/USU Conference on Small Satellites. Salt Lake City, UT, USA, 2012. 1−8

4 Mazal L, Mingotti G, Gurfil P. Continuous-thrust cooperative guidance law for disaggregated satellite. In: Proceedings of the 2002 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Minneapolis, MN, USA, 2012

5 Mazal L, Gurfil P. Cluster-keeping algorithms for the SAMON project. In: 63rd International Astronautical Congress, Naples, Italy, 2012. 5384−5393

6 Liu Lin. *Orbit Theory of Spacecraft*. Beijing: National Defence Industry Press, 2000
(刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000)

7 Schaub H, Junkins J. *Analytical Mechanics of Space Systems*. Reston, VA: AIAA, 2003

8 Li Ji-Shen. *Orbit Determination of Spacecraft*. Beijing: National Defence Industry Press, 2003
(李济生. 航天器轨道确定. 北京: 国防工业出版社, 2003)

9 Gurfil P. Modern astrodynamics. *Elsevier Astrodynamics Series*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2006

10 Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems. In: Proceedings of the 1995 American Control Conference. Seattle, WA: IEEE, 1995. 1628−1632

11 Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(3): 477−482

12 Julier S J. The spherical simplex unscented transformation. In: Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, CO, USA: IEEE, 2003. 2430−2434

13 Van Der Merwe R, Wan E A. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation. In: Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Salt Lake City, UT: IEEE, 2001. 3461−3464

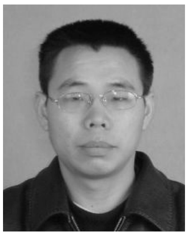
14 Liu Lin, Hu Song-Jie, Wang Xin. *Introduction Astrodynamics*. Nanjing: Nanjing University Press, 2006
(刘林, 胡松杰, 王歆. 航天动力学引论. 南京: 南京大学出版社, 2006)

15 Liu L. The Motion Theory of Artificial Earth Satellite. Beijing: Science Press, 1974
(刘林. 人造地球卫星运动理论. 科学出版社, 1974)

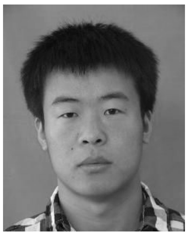
16 Zong Z W, Rao L, Dan M. A UKF tracking method based on Runge-Kutta Integration. *Radar Science and Technology*, 2010, **8**(4): 352−356
(宗志伟, 饶彬, 丹梅. 一种基于 Runge-Kutta 积分的 UKF 跟踪算法. 雷达科学与技术. 2010, **8**(4): 352−356)

孙兆伟 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为飞行器建模与仿真, 置信度评估和飞行器测试.
E-mail: sunzhaowei@vip.sina.com
(**SUN Zhao-Wei** Professor at the Astronautics School, Harbin Institute of Technology. His research interest covers spacecraft modeling and simulation, and micro-satellite test.)

仲惟超 哈尔滨工业大学航天学院博士研究生. 主要研究方向为卫星姿轨控系统建模与仿真. 本文通信作者.
E-mail: heropanda@hit.edu.cn
(**ZHONG Wei-Chao** Ph. D. candidate at the Astronautics School, Harbin Institute of Technology. His research interest covers satellite attitude and orbit control system modeling and simulation. Corresponding author of this paper.)



张世杰 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为卫星动力学与控制.
E-mail: sjzhang@hit.edu.cn
(**ZHANG Shi-Jie** Professor at the Astronautics School, Harbin Institute of Technology. His research interest covers astrodynamics and control.)



张 健 哈尔滨工业大学卫星技术研究所硕士研究生. 主要研究方向为电动力绳系动力学及控制.
E-mail: zhangjian6140@126.com
(**ZHANG Jian** Master student at the Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers dynamic and control of electrodynamic tethers.)