

# 基于包含度的区间二型模糊粗糙集

赵涛<sup>1</sup> 肖建<sup>2</sup>

**摘要** 基于区间二型模糊包含度的公理化定义, 给出了新的区间二型模糊包含度计算公式. 进一步, 通过包含度定义了区间二型模糊粗糙集, 并讨论了它的一些基本性质. 最后, 利用区间二型模糊粗糙集研究了连续域决策信息系统的属性约简, 给出了新的约简方法. 实例说明了该约简方法的具体计算步骤, 并且通过实验验证了该算法的有效性和可行性.

**关键词** 区间二型模糊粗糙集, 区间二型模糊集, 包含度, 信息系统, 属性约简

**引用格式** 赵涛, 肖建. 基于包含度的区间二型模糊粗糙集. 自动化学报, 2013, 39(10): 1714–1721

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.01714

## Interval Type-2 Fuzzy Rough Sets Based on Inclusion Measures

ZHAO Tao<sup>1</sup> XIAO Jian<sup>2</sup>

**Abstract** In this paper, a new computation formula of interval type-2 fuzzy inclusion measure is proposed on the basis of the axiom definition of interval type-2 fuzzy inclusion measures. Furthermore, we define an interval type-2 fuzzy rough set model on the basis of inclusion measure and study its basic properties. In the end, the attribute reduction of continuous domain decision information system is discussed and the method on appropriate reduction is given. Further, we present calculation steps of the reduction approach by an example and experimental results demonstrate the feasibility and effectiveness of the reduction algorithm.

**Key words** Interval type-2 fuzzy rough sets, interval type-2 fuzzy sets, inclusion measure, information systems, attribute reduction

**Citation** Zhao Tao, Xiao Jian. Interval type-2 fuzzy rough sets based on inclusion measures. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(10): 1714–1721

Zadeh 在给出一型模糊集<sup>[1]</sup>的概念时, 就定义了两个模糊集的包含关系, 不过这种包含关系是清晰关系, 即一个模糊集要么包含于另一个模糊集, 要么不包含于另一个模糊集. 后来, 人们扩展了模糊包含度的概念, 将清晰关系推广到模糊关系, 此时模糊包含度表示一个模糊集包含于另一个模糊集的程度, 即包含度可取  $[0, 1]$  上的任意值. 为了增强系统处理不确定性的能力, Zadeh 在 1975 年又提出了二型模糊集<sup>[2]</sup>, 二型模糊集具有良好的抗噪性能, 在高度不确定场合具有超越一型模糊集的性能表现, 由于二型模糊集计算复杂, 使其在实际中的应用受到了限制. 相反, 二型模糊集的简化版本——区间二型模糊集却得到了较大的关注. 一型模糊包含度已经被广泛研究, 目前已经存在几十种一型模糊包含度, 但没有一种包含度具有通用的性能, 即某种包含度对一

些数据具有较好性能, 对另一些数据却效果较差, 这也是出现如此多包含度的原因. 相对一型模糊包含度, 二型模糊包含度的研究还比较少, Yang 等<sup>[3]</sup>给出了二型模糊包含度的公理化定义, 并研究了它和二型模糊相似度的关系; Hwang 等<sup>[4]</sup>基于 Sugeno 积分提出了新的二型模糊包含度, 并讨论了它的性质. 二型模糊包含度面临着一型模糊包含度同样的问题, 即不具有通用的包含度, 因此, 有必要扩展二型模糊包含度的理论与应用研究.

粗糙集理论<sup>[5-6]</sup>是继模糊集理论后, 又一处理不确定性的数学工具, 经过几十年的发展, 它的理论与应用都得到了不断的完善. 传统粗糙集仅能处理知识库中的知识是清晰的且被近似的概念是清晰的情形. 若知识库中的知识是模糊的且被近似的概念是模糊的, 传统粗糙集将无能为力. 由于模糊集和粗糙集都可以用来描述知识的不确定性, 而且各自的特点不同, 因此粗糙集和模糊集具有很强的互补性. 为了处理知识库中的知识是清晰的而被近似的概念是模糊的, 或者知识库中的知识是模糊的而被近似的概念是模糊的情形, Dubois 等首先将粗糙集和模糊集结合研究, 将清晰概念推广到模糊概念, 提出了粗糙模糊集<sup>[7]</sup>, 进一步他们把清晰划分推广到模糊划分, 又给出了模糊粗糙集<sup>[7]</sup>的概念. 传统模糊集虽然能较好地描述模糊性, 但它采用单值的隶属函数表示“一定程度上属于”的关系, 即单值的隶属度

收稿日期 2012-02-24 录用日期 2012-06-28  
Manuscript received February 24, 2012; accepted June 28, 2012  
国家自然科学基金 (51177137, 61134001), 中央高校基本科研业务费专项资金项 (SWJTU11CX034) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (51177137, 61134001) and Fundamental Research Funds for the Central Universities (SWJTU11CX034)  
本文责任编辑 文成林  
Recommended by Associate Editor WEN Cheng-Lin  
1. 西南交通大学交通运输与物流学院 成都 610031 2. 西南交通大学电气工程学院 成都 610031  
1. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031 2. School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031

包含了支持和反对的程度, 使得它不能表示中立. 因此, 直觉模糊集通过设定隶属度、非隶属度、踌躇度, 很好地解决了现实生活中的踌躇信息. Cornelis 首先将粗糙集和直觉模糊集<sup>[8-9]</sup>相结合, 提出了直觉模糊粗糙集<sup>[10]</sup>, 后来人们不断扩充了直觉模糊粗糙集的理论与应用研究<sup>[11-15]</sup>, 但是目前大多学者都致力于直觉模糊粗糙集近似算子的构造, 关于利用直觉模糊粗糙集进行属性约简的研究还相当少.

二型模糊集通过对隶属度进行再次的模糊化表示, 提高了处理不确定性的能力, 特有的“宽带”效应又提供了额外的设计自由度, 使其在高度不确定场合具有明显超越一型模糊集的性能表现. 然而, 关于区间二型模糊集和粗糙集的结合研究还较少, Wu 等<sup>[16]</sup>基于区间二型模糊关系定义了区间二型模糊粗糙集, 并针对连续域决策信息系统提出了区间二型模糊粗糙 QuickReduct 算法. 文献 [16] 中的区间二型模糊粗糙集模型结合了区间二型模糊集和粗糙集的特征, 因此它可以有效处理高度不确定数据和噪音数据. 尽管如此, 文献 [16] 中的模型不具有变精度粗糙集的思想, 因此对错分敏感, 由此可能造成“某些与被近似概念相近的知识在下近似计算中被遗弃”的结果, 这里的错分指“错误或丢失的分类”. 为了建立一个能有效处理高度不确定数据, 且对错分不敏感的健壮模型, 本文首先在区间二型模糊包含度的公理化定义下, 给出了新的区间二型模糊包含度计算公式. 然后, 通过包含度定义了区间二型模糊粗糙集, 并讨论了它的一些基本性质. 进一步, 利用区间二型模糊粗糙集研究了连续域决策信息系统的属性约简问题, 给出了约简方法, 实例说明了该约简方法的计算步骤. 最后, 实验结果表明了本文所提约简算法的有效性和可行性.

### 1 区间二型模糊包含度

本节首先简要回顾区间二型模糊集的概念及区间二型模糊包含度的一些基本术语, 然后基于区间二型模糊包含度的公理化定义给出新的区间二型模糊包含度的计算公式.

**定义 1**<sup>[17]</sup>. 设  $X$  为论域, 一个二型模糊集  $A$  可以表达为

$$A = \int_{x \in X} \frac{u_A(x)}{x} = \int_{x \in X} \frac{\int_{u \in J_x} \frac{f_x(u)}{u}}{x}, J_x \subseteq [0, 1]$$

其中, 称  $u_A(x) = \int_{u \in J_x} f_x(u)/u$  为次隶属函数,  $f_x(u)$  是  $x$  的次隶属度.  $J_x$  的并集称为不确定性的迹 (Footprint of uncertainty, FOU), FOU 的上、下限对应上、下隶属函数.

**定义 2**<sup>[17]</sup>. 次隶属度值均为 1 的二型模糊集合

称为区间二型模糊集合, 即

$$A = \int_{x \in X} \frac{u_A(x)}{x} = \int_{x \in X} \frac{\int_{u \in J_x} \frac{1}{u}}{x}, J_x \subseteq [0, 1]$$

一般地,  $IF_2(X)$  表示论域  $X$  上的所有区间二型模糊集.

**定义 3**<sup>[17]</sup>.  $\forall A, B \in IF_2(X)$ , 令  $A, B$  的上、下隶属函数分别为  $\bar{u}_A(x)$  与  $\underline{u}_A(x)$ ,  $\bar{u}_B(x)$  与  $\underline{u}_B(x)$ , 序关系  $\subseteq$  定义为:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \bar{u}_A(x) \leq \bar{u}_B(x)$  且  $\underline{u}_A(x) \leq \underline{u}_B(x)$ .

**定义 4**<sup>[3]</sup>. 实函数  $I: IF_2(X) \times IF_2(X) \rightarrow [0, 1]$  称为区间二型模糊包含度, 若  $I$  满足:

- 1)  $\forall A \in IF_2(X), I(A, A) = 1;$
- 2)  $\forall A, B \in IF_2(X), A \subseteq B \Leftrightarrow I(A, B) = 1;$
- 3)  $\forall A, B, C \in IF_2(X), A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow I(C, A) \leq I(B, A), I(C, A) \leq I(C, B).$

基于上述包含度的公理化定义, 本文提出新的包含度计算公式, 具体形式如下:

$$I_1(A, B) = \frac{1}{2} \int_{x \in X} dx \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x)) dx \right]$$

其中,  $\int$  表示积分, 对于离散论域  $X$ , 相应的用  $\sum$  代替  $\int$ .

**定理 1.**  $I_1(\cdot, \cdot)$  是一个区间二型模糊包含度.

**证明.** 1)  $\forall A \in IF_2(X), I_1(A, A) = \frac{1}{2} \int_{x \in X} dx \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_A(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_A(x)) dx \right] = 1.$

2)  $\forall A, B \in IF_2(X)$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $\forall x \in X, \bar{u}_A(x) \leq \bar{u}_B(x)$  且  $\underline{u}_A(x) \leq \underline{u}_B(x)$ . 故  $I_1(A, B) = \frac{1}{2} \int_{x \in X} dx \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x)) dx \right] = \frac{1}{2} \int_{x \in X} dx \left[ \int_{x \in X} dx + \int_{x \in X} dx \right] = 1$

另一方面, 若  $I_1(A, B) = 1$ , 则  $\frac{1}{2} \int_{x \in X} dx \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x)) dx \right] = 1$   
 $\Rightarrow \int_{x \in X} [2 - \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) - \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x))] dx = 0$   
 $\Rightarrow 2 - \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) - \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x)) = 0$

$$\Rightarrow \min(1, 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x)) = 1 \text{ 且 } \min(1, 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x)) = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \bar{u}_A(x) + \bar{u}_B(x) \geq 1 \text{ 且 } 1 - \underline{u}_A(x) + \underline{u}_B(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow \bar{u}_A(x) \leq \bar{u}_B(x) \text{ 且 } \underline{u}_A(x) \leq \underline{u}_B(x) \Rightarrow A \subseteq B.$$

3)  $\forall A, B, C \in IF_2(X)$ , 若  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $\forall x \in X, \bar{u}_A(x) \leq \bar{u}_B(x) \leq \bar{u}_C(x)$  且  $\underline{u}_A(x) \leq \underline{u}_B(x) \leq \underline{u}_C(x)$ . 故  $I_1(C, A) = \frac{1}{2} \int_{x \in X} \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_C(x) + \bar{u}_A(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_C(x) + \underline{u}_A(x)) dx \right] \leq \frac{1}{2} \int_{x \in X} \left[ \int_{x \in X} \min(1, 1 - \bar{u}_B(x) + \bar{u}_A(x)) dx + \int_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{u}_B(x) + \underline{u}_A(x)) dx \right] = I_1(B, A)$ .

类似地,  $I_1(C, A) \leq I_1(C, B)$ . □

**定理 2.** 1)  $\forall A, B, C \in IF_2(X), A \subseteq B \Rightarrow I_1(A, C) \geq I_1(B, C)$ .

2)  $\forall A, B, C \in IF_2(X), A \subseteq B \Rightarrow I_1(C, A) \leq I_1(C, B)$ .

**证明.** 1) 考虑如下三种情况:

a) 若  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $I_1(A, C) = 1$  且  $I_1(B, C) = 1$ , 故  $I_1(A, C) \geq I_1(B, C)$ .

b) 若  $A \subseteq C \subseteq B$ , 则  $I_1(A, C) = 1$  且  $I_1(B, C) \leq 1$ , 故  $I_1(A, C) \geq I_1(B, C)$ .

c) 若  $C \subseteq A \subseteq B$ , 则  $I_1(A, C) \geq I_1(B, C)$ .

2) 类似 1) 可直接得到. □

**定理 3.** 1)  $\forall A, B, C \in IF_2(X), I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

2)  $\forall A, B, C \in IF_2(X), I_1(A \cap B, A \cap C) = \max\{I_1(A, C), I_1(B, C)\}$ .

**证明.** 1) 考虑如下六种情况: a) 若  $A \subseteq B \subseteq C$ , 则  $A \cup B \subseteq A \cup C$ , 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = 1$ . 另,  $I_1(B, A) \leq 1$  且  $I_1(B, C) = 1$ . 所以  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

b) 若  $B \subseteq A \subseteq C$ , 则  $A \cup B \subseteq A \cup C$ , 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = 1$ . 另,  $I_1(B, A) = 1$  且  $I_1(B, C) = 1$ . 所以  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

c) 若  $A \subseteq C \subseteq B$ , 则  $I_1(A \cup B, A \cup C) = I_1(B, C)$ . 另,  $I_1(B, A) \leq I_1(B, C)$ . 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

d) 若  $C \subseteq A \subseteq B$ , 则  $I_1(A \cup B, A \cup C) = I_1(B, A)$ . 另,  $I_1(B, A) \geq I_1(B, C)$ . 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

e) 若  $B \subseteq C \subseteq A$ , 则  $I_1(A \cup B, A \cup C) = I_1(A, A) = 1$ . 另,  $I_1(B, A) = I_1(B, C) = 1$ . 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

f) 若  $C \subseteq B \subseteq A$ , 则  $I_1(A \cup B, A \cup C) = I_1(A, A) = 1$ . 另,  $I_1(B, A) = 1$  且  $I_1(B, C) \leq 1$ . 故  $I_1(A \cup B, A \cup C) = \max\{I_1(B, A), I_1(B, C)\}$ .

2) 类似 1) 可直接得到. □

## 2 区间二型模糊粗糙集

本节首先简要回顾一型模糊粗糙集及区间二型模糊粗糙集模型. 然后, 基于区间二型模糊包含度定义了新的区间二型模糊粗糙集, 并讨论了它的一些基本性质.

**定义 5.** 设  $X$  是有限非空论域,  $A_i \in IF_2(X)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 称  $\psi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  为  $X$  上的一个区间二型模糊划分, 若下列条件满足:  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \sup p(\bar{A}_i) = X$  且  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \sup p(\underline{A}_i) = X$ . 其中,  $\bar{A}_i$  和  $\underline{A}_i$  分别为  $A_i$  的上隶属函数及下隶属函数所确定的一型模糊集,  $\sup p(\bar{A}_i)$  和  $\sup p(\underline{A}_i)$  分别表示一型模糊集  $\bar{A}_i$  及  $\underline{A}_i$  的支撑集.

**定义 6**<sup>[7]</sup>. 设  $P = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  是由  $X$  上的一型模糊划分, 对于  $X$  上的任意一型模糊集  $A$ , 则  $A$  关于  $P$  的上近似和下近似定义为:

$$u_{A^*}(F_i) = \sup_{x \in X} \min\{u_{F_i}(x), u_A(x)\}$$

$$u_{A_*}(F_i) = \inf_{x \in X} \max\{1 - u_{F_i}(x), u_A(x)\}$$

**定义 7**<sup>[16]</sup>. 令  $R \in IF_2(X \times X), A \in IF_2(X)$ , 定义区间二型模糊近似算子  $R_*, R^* : IF_2(X) \rightarrow IF_2(X)$ , 即

$$R_*A \equiv \int_{x \in X} \int_{u \in D\bar{R}(A)(x)} \frac{1}{x, u}$$

$$R^*A \equiv \int_{x \in X} \int_{u \in D\underline{R}(A)(x)} \frac{1}{x, u}$$

其中, 对任意  $x \in X, D\bar{R}(A)(x) \equiv [\underline{u}_{R_*A}(x), \bar{u}_{R_*A}(x)], D\underline{R}(A)(x) \equiv [\underline{u}_{R^*A}(x), \bar{u}_{R^*A}(x)]$  且

$$\underline{u}_{R_*A}(x) = \bigwedge_{y \in X} [(1 - \underline{u}_R(x, y)) \vee \underline{u}_A(y)]$$

$$\bar{u}_{R_*A}(x) = \bigwedge_{y \in X} [(1 - \underline{u}_R(x, y)) \vee \bar{u}_A(y)]$$

$$\underline{u}_{R^*A}(x) = \bigvee_{y \in X} [\bar{u}_R(x, y) \wedge \underline{u}_A(y)]$$

$$\bar{u}_{R^*A}(x) = \bigvee_{y \in X} [\bar{u}_R(x, y) \wedge \bar{u}_A(y)]$$

**定义 8.** 设  $\psi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  为  $X$  上的区间二型模糊划分,  $I(\cdot, \cdot)$  为  $IF_2(X)$  上的包含度, 称  $R = (X, \psi, I)$  为区间二型模糊包含近似空间, 对于任意的  $A \in IF_2(X)$ ,  $A$  关于  $R = (X, \psi, I)$  依参数  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$  的下近似  $\underline{R}_\alpha(A)$  和上近似  $\bar{R}_\beta(A)$  是定义在  $X$  上的一对区间二型模糊集:

$$\underline{R}_\alpha(A) = \cup\{A_i | I(A_i, A) \geq \alpha\}$$

$$\bar{R}_\beta(A) = \cup\{A_i | I(A_i, A) > \beta\}$$

$A$  关于  $R = (X, \psi, I)$  依参数  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$  的正域, 边界和负域分别为

$$pos(A, \alpha, \beta) = \underline{R}_\alpha(A) = \cup\{A_i | I(A_i, A) \geq \alpha\}$$

$$bn(A, \alpha, \beta) = \cup\{A_i | \beta < I(A_i, A) < \alpha\}$$

$$neg(A, \alpha, \beta) = \cup\{A_i | I(A_i, A) \leq \beta\}$$

从定义 8 可以看出: 由于参数  $\alpha, \beta$  及区间二型模糊包含度  $I(\cdot, \cdot)$  的使用, 本文所定义的区间二型模糊粗糙集模型融有变精度粗糙集的思想, 因此对错分不敏感. 第 4 节的实验比较结果也证实了这个结论.

**定义 9.** 设  $X$  是有限非空论域,  $P, Q$  是两个属性集, 其中  $X/P = \{P_1, \dots, P_n\}$  和  $X/Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  为  $X$  上的区间二型模糊划分. 则关于参数  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ ,  $Q$  的  $P$  正域  $pos_P(Q)$  为  $X$  上的区间二型模糊集, 具体形式如下:

$$pos_P(Q) = \bigcup_{A \in X/Q} \underline{R}_\alpha(A)$$

其中,  $R = (X, X/P, I)$  为  $X/P$  和区间二型模糊包含度  $I(\cdot, \cdot)$  所确定的区间二型模糊包含近似空间. 在下文中, 规定  $pos_P(Q)$  的上、下隶属函数分别表示为  $pos_P(Q)$  和  $\underline{pos}_P(Q)$ .

**定理 4.** 设  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ ,  $I(\cdot, \cdot)$  为  $IF_2(X)$  上的包含度, 则包含度近似算子满足下列性质:

- 1)  $\underline{R}_\alpha(A) \subseteq \underline{R}_\beta(A), \forall A \in IF_2(X)$ ;
- 2)  $\forall A, B \in IF_2(X), A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}_\alpha(A) \subseteq \underline{R}_\alpha(B), \underline{R}_\beta(A) \subseteq \underline{R}_\beta(B)$ ;
- 3)  $\forall A, B \in IF_2(X), \underline{R}_\alpha(A \cap B) \subseteq \underline{R}_\alpha(A) \cap \underline{R}_\alpha(B); \forall A, B \in IF_2(X), \underline{R}_\beta(A \cup B) \supseteq \underline{R}_\beta(A) \cup \underline{R}_\beta(B)$ ;
- 4)  $\forall A, B \in IF_2(X), \underline{R}_\alpha(A \cup B) \supseteq \underline{R}_\alpha(A) \cup \underline{R}_\alpha(B); \forall A, B \in IF_2(X), \underline{R}_\beta(A \cap B) \subseteq \underline{R}_\beta(A) \cap \underline{R}_\beta(B)$ ;
- 5) 若  $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2, A \in IF_2(X)$ , 则  $\underline{R}_{\alpha_2}(A) \subseteq \underline{R}_{\alpha_1}(A), \underline{R}_{\beta_2}(A) \subseteq \underline{R}_{\beta_1}(A)$ .

**证明.** 由定义直接可得.  $\square$

### 3 属性约简

信息系统的知识是依照属性对其对象进行的分类. 信息系统的属性并不是同等重要的, 删除冗余属性, 并不影响对象的分类结果. 属性约简就是在保持分类能力不变的前提下, 删除不必要的知识, 通过约简, 可以深化人们的认识. 传统的粗糙集只能处理包含离散值的数据集, 对于属性值连续的数据集处理能力有限, 在现实世界中, 属性值可能是实型数据, 此时若要用传统粗糙集进行属性约简, 必须对连续属性进行离散化. 传统离散化方式没有保留实数值存在的差异, 容易导致某种程度的信息损失, 事实上, 连续数据具有一定的不确定性和模糊性, 概念之

间的界限并不明确, 一种合理的做法是用模糊化的方法代替离散化方法, 将实数值转化为确定的隶属度值, 基于模糊粗糙集的方法处理连续数据集. 文献 [18] 提出了模糊粗糙 QuickReduct 算法; 文献 [19] 提出了一种基于模糊粗糙集紧计算域的属性约简算法.

事实上, 连续数据具有高度的不确定性<sup>[20]</sup>, 这主要包括: 1) 测量噪音的不确定性, 连续数据可能受到噪音影响; 2) 执行机器的不确定性, 测量仪器由于磨损等情况可能造成结果的不确定性; 3) 语言的不确定性, 同一数据对不同人的含义差异性; 4) 运行环境的不确定性, 运行条件的不同可能导致数据的变化. 上述所有的不确定性将最终转化为隶属函数的不确定性, 因此将实数值转化为确定的隶属度值, 可能具有一定的不合理性. 二型模糊集特有的“宽带”效应, 可以提高处理不确定性的能力. 另一方面, 在现实生活中, 错分现象常常存在. 基于此, 我们将利用本文所定义的区间二型模糊粗糙集模型处理连续数据集.

**定义 10.** 连续域决策信息系统  $S = \langle U, C, D, V, f \rangle$ . 其中,  $U = \{x_1, \dots, x_n\}$  是非空有限对象集合;  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  为连续条件属性集合;  $D = \{d\}$  为决策属性集;  $V = \{V_1, \dots, V_m, V_d\}$  为属性值集;  $f$  为信息函数.

接下来, 我们将基于区间二型模糊粗糙集处理连续域决策信息系统  $S = \langle U, C, D, V, f \rangle$ . 关于其属性约简算法的一般步骤如下:

**步骤 1.** 对每个条件属性  $c_i \in C, i = 1, \dots, m$  和决策属性  $D = \{d\}$  进行区间二型模糊划分. 不妨设  $U/\{c_i\} = \{Z_{i1}, \dots, Z_{ii}\}$ , 其中  $Z_{i1}, \dots, Z_{ii}$  是区间二型模糊集. 一般地, 若  $U/\{c_1\} = \{Z_{11}, \dots, Z_{1l_1}\}, U/\{c_2\} = \{Z_{21}, \dots, Z_{2l_2}\}$ , 则  $U/\{c_1, c_2\} = \{Z_{11} \cap Z_{21}, \dots, Z_{11} \cap Z_{2l_2}, Z_{12} \cap Z_{21}, \dots, Z_{12} \cap Z_{2l_2}, \dots, Z_{1l_1} \cap Z_{21}, \dots, Z_{1l_1} \cap Z_{2l_2}\}$ .

**步骤 2.** 对于参数  $0 < \alpha \leq 1$ , 求  $D$  的  $C$  正域  $pos_C(D)$ .

**步骤 3.** 令  $B = C$ , 并取定精度  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

**步骤 4.** 循环  $B$  中的元素, 计算出所有的  $pos_{B-\{b\}}(D)$ , 其中  $b \in B$ .

**步骤 5.** 令

$$E = \{b \in B; |\overline{pos_{B-\{b\}}(D)}| - |\overline{pos_C(D)}| / |U| < \varepsilon$$

且

$$|\overline{pos_{B-\{b\}}(D)}| - |\overline{pos_C(D)}| / |U| < \varepsilon\}$$

其中,  $|\overline{pos_{B-\{b\}}(D)}| = \sum_{x \in U} u_{\overline{pos_{B-\{b\}}(D)}}(x)$ . 若  $E = \emptyset$ , 则转至步骤 6; 否则任取  $b' \in E$ , 令  $B = B - \{b'\}$ , 若此时  $B$  仅有一个元素转至步骤 6, 否则转至步骤 4.

**步骤 6.** 输出  $B$ ,  $B$  即是系统  $S$  的一个约简.

下面通过实例来说明本文所提出的约简算法的

具体计算步骤.

**例 1.** 考虑如下的连续域决策信息系统, 见表 1.

表 1 连续域决策信息系统的实例  
Table 1 Example of continuous domain decision information system

对象/属性	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$d$
$x_1$	0.1	0.3	-1	Yes
$x_2$	1.5	-1.3	0.8	Yes
$x_3$	-1.2	0.9	0	No
$x_4$	0.8	1	1	No
$x_5$	-1.7	-0.5	1.7	Yes

**步骤 1.** 基于图 1 的三个区间二型模糊集  $F, L, Z$  对条件属性  $\{c_1, c_2, c_3\}$  进行区间二型模糊划分, 其中

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) &= e^{-0.5 * (\frac{x+1}{2})^2}, \quad \overline{L}(x) = e^{-0.5 * (\frac{x-0}{2})^2} \\ \overline{Z}(x) &= e^{-0.5 * (\frac{x-1}{2})^2}, \quad \underline{F}(x) = e^{-0.5 * (\frac{x+1}{1.5})^2} \\ \underline{L}(x) &= e^{-0.5 * (\frac{x-0}{1.5})^2}, \quad \underline{Z}(x) = e^{-0.5 * (\frac{x-1}{1.5})^2} \end{aligned}$$

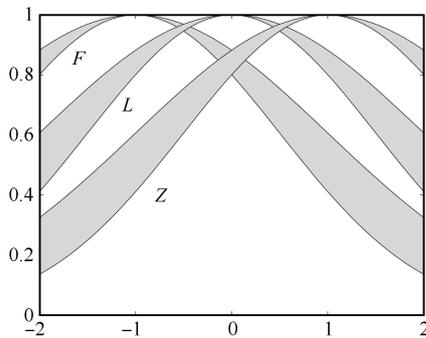


图 1 区间二型模糊划分  
Fig. 1 Interval type-2 fuzzy partition

我们可以获得如下的区间二型模糊等价类:

$$\begin{aligned} U/\{c_1\} &= \{F_{c_1}, L_{c_1}, Z_{c_1}\} \\ U/\{c_2\} &= \{F_{c_2}, L_{c_2}, Z_{c_2}\} \\ U/\{c_3\} &= \{F_{c_3}, L_{c_3}, Z_{c_3}\} \end{aligned}$$

为了简单起见, 仅列出  $F_{c_1}$  的上、下隶属函数  $\overline{F}_{c_1}$  和  $\underline{F}_{c_1}$ . 事实上,  $u_{\overline{F}}(x_1) = e^{-0.5 * (\frac{x_1+1}{2})^2} = e^{-0.5 * (\frac{0.1+1}{2})^2} = 0.8596$ ,  $u_{\overline{F}}(x_2) = 0.4578$ ,  $u_{\overline{F}}(x_3) = 0.9950$ ,  $u_{\overline{F}}(x_4) = 0.6670$ ,  $u_{\overline{F}}(x_5) = 0.9406$ . 故  $\overline{F}_{c_1} = 0.8596/x_1 + 0.4578/x_2 + 0.9950/x_3 + 0.6670/x_4 + 0.9406/x_5$ ;  $\underline{F}_{c_1} = 0.7642/x_1 + 0.2494/x_2 + 0.9912/x_3 + 0.4868/x_4 + 0.8968/x_5$ . 另,  $U/\{d\} = \{Y_d, N_d\}$ , 其中  $\overline{Y}_d = 1/x_1 + 1/x_2 +$

$0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5$ ,  $\underline{Y}_d = 1/x_1 + 1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5$ ,  $\overline{N}_d = 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 0/x_5$ ,  $\underline{N}_d = 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 0/x_5$ .

**步骤 2.** 取参数  $\alpha = 0.8$  求  $D$  的  $C$  正域  $pos_C(D)$ , 其中  $\overline{pos_C(D)} = 0.9037/x_1 + 0.9692/x_2 + 0.5461/x_3 + 0.6065/x_4 + 0.4020/x_5$ ,  $\underline{pos_C(D)} = 0.8353/x_1 + 0.9460/x_2 + 0.3411/x_3 + 0.4111/x_4 + 0.1979/x_5$ .

**步骤 3.** 令  $B = C$ , 并取定精度  $\varepsilon = 0.05$ .

**步骤 4.** 循环  $B$  中的元素, 计算出所有的  $pos_{B-\{b\}}(D)$ , 其中  $b \in B$ . 则

$$\begin{aligned} \overline{pos_{B-\{c_3\}}(D)} &= 0.8096/x_1 + 0.9692/x_2 + \\ &0.5461/x_3 + 0.6065/x_4 + 0.4020/x_5 \\ \underline{pos_{B-\{c_3\}}(D)} &= 0.6869/x_1 + 0.9460/x_2 + \\ &0.3411/x_3 + 0.4111/x_4 + 0.1979/x_5 \\ \overline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} &= 0.9037/x_1 + 0.6670/x_2 + \\ &0.5461/x_3 + 0.6065/x_4 + 0.4020/x_5 \\ \underline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} &= 0.8353/x_1 + 0.4868/x_2 + \\ &0.3411/x_3 + 0.4111/x_4 + 0.1979/x_5 \\ \overline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + \\ &0/x_4 + 0/x_5 \\ \underline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + \\ &0/x_4 + 0/x_5 \end{aligned}$$

**步骤 5.** 由于

$$\begin{aligned} \|\overline{pos_{B-\{c_3\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.0188 \\ \|\underline{pos_{B-\{c_3\}}(D)} - \underline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.0297 \\ \|\overline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.0604 \\ \|\underline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} - \underline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.0918 \\ \|\overline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.6855 \\ \|\underline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} - \underline{pos_C(D)}\|/|U| &= 0.5463 \end{aligned}$$

故  $E = \{c_3\}$ ,  $B = \{c_1, c_2\}$ .

**步骤 6.** 循环中的元素, 计算出所有的  $pos_{B-\{b\}}(D)$ , 其中  $b \in B$ . 则

$$\begin{aligned} \overline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 0/x_5 \\ \underline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 0/x_5 \\ \overline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 0/x_5 \\ \underline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 0/x_5 \end{aligned}$$

**步骤 7.** 由于

$$\|\overline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}\|/|U| = 0.6855$$

$$\frac{||\overline{pos_{B-\{c_2\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}||}{|U|} = 0.5463$$

$$\frac{||\overline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}||}{|U|} = 0.6855$$

$$\frac{||\overline{pos_{B-\{c_1\}}(D)} - \overline{pos_C(D)}||}{|U|} = 0.5463$$

故  $E = \emptyset$ , 算法终止, 输出  $B = \{c_1, c_2\}$ ,  $B$  即是原系统的一个约简.

### 4 实验分析

为了显示本文所提约简算法的性能, 我们在 UCI 机器学习数据库<sup>[21]</sup> 上选取数据集 “Iris” 进行实验. 我们首先显示一些参数对约简性能的影响. 然后, 我们通过实验的比较来验证本文所提约简算法的有效性和可行性.

#### 4.1 参数的影响

在本部分, 我们显示约简算法中的参数对约简性能的影响. 约简算法涉及 2 个参数, 即步骤 2 中的参数  $\alpha$  及步骤 3 中的参数  $\varepsilon$ . 首先随机设定参数  $\varepsilon$  固定不变,  $\alpha$  从 0 到 1, 以步长 0.1 进行变化, 实验结果总结在图 2 和图 3; 然后随机设定参数  $\alpha$  固定不变,  $\varepsilon$  从 0 到 1, 以步长 0.1 进行变化, 实验结果总结在图 4 和图 5. 其中, 横轴表示参数, 纵轴分别表示约简属性个数和分类正确率 (表示下近似的基数与上近似的基数比).

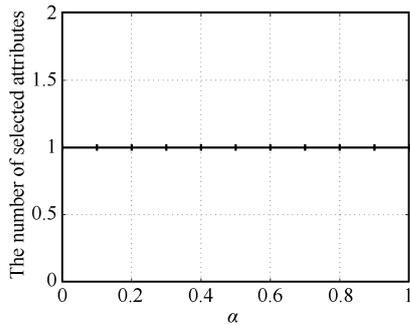


图 2 约简属性个数随参数  $\alpha$  的变化趋势

Fig. 2 Trend of the number of selected attributes varying with  $\alpha$

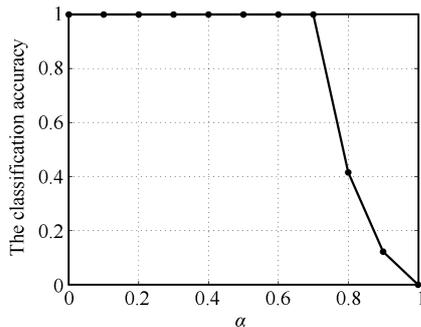


图 3 分类正确率随参数  $\alpha$  的变化趋势

Fig. 3 Trend of the classification accuracy varying with  $\alpha$

从图 2 和图 3 可以看出, 约简属性个数随着参数  $\alpha$  的变化保持不变, 这说明参数  $\varepsilon$  对约简属性个数起到了决定性作用. 此外, 随着  $\alpha$  的增大, 分类正确率在开始时保持不变, 但当  $\alpha$  增大到 0.7 以后, 分类正确率就会逐渐变小; 从图 4 和图 5, 我们发现参数  $\varepsilon$  从 0 到 0.2 变化时, 约简属性个数逐渐变小, 超过 0.2 后, 约简属性个数保持不变. 另外, 分类正确率随着参数  $\varepsilon$  的变化保持不变, 这说明参数  $\alpha$  对分类正确率起到了决定性作用. 从上述结果可以看到, 当  $\alpha$  在 0.7 到 1 变化,  $\varepsilon$  在 0 到 0.2 变化时, 约简性能变化显著. 基于此, 我们接下来进行第二阶段实验. 在第二阶段实验中, 令参数  $\alpha$  和  $\varepsilon$  同时变化. 假定参数  $\alpha$  从 0.7 到 1, 以步长 0.1 进行变化, 且同时令参数  $\varepsilon$  从 0 到 0.2, 也以步长 0.1 进行变化, 实验结果总结在图 6 和图 7. 其中,  $x$  轴表示参数  $\alpha$ ,  $y$  轴表示参数  $\varepsilon$ ,  $z$  轴分别表示约简属性个数和分类正确率.

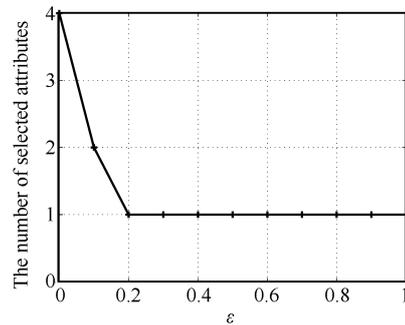


图 4 约简属性个数随参数  $\varepsilon$  的变化趋势

Fig. 4 Trend of the number of selected attributes varying with  $\varepsilon$

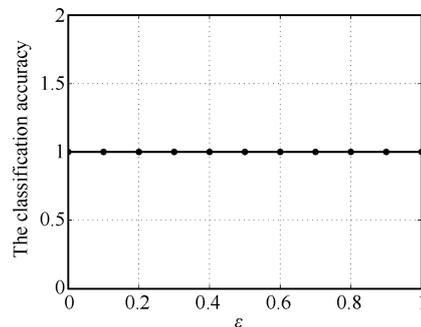


图 5 分类正确率随参数  $\varepsilon$  的变化趋势

Fig. 5 Trend of the classification accuracy varying with  $\varepsilon$

从图 6 可以发现, 当  $\varepsilon$  在 0.15 到 0.2 之间变化时, 可以获得最理想的约简属性个数. 图 7 显示当  $\alpha$  在 0.7 到 0.8 之间时, 分类正确率比较理想. 结合前述讨论, 可总结出: 当  $\varepsilon$  在 0.15 到 0.2 之间,  $\alpha$  在 0.7 到 0.8 之间时, 约简效果最好. 上述结论对本文的后续实验具有一定的指导作用. 然而, 在实际应用

中, 究竟该如何具体化这些参数, 是否能从理论上证实这些参数对于不同的数据集都具有统一的选择标准, 仍然是我们进一步研究的重点.

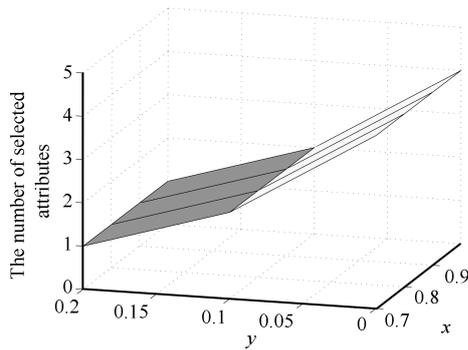


图 6 约简属性个数随参数  $\alpha$  和  $\epsilon$  的变化趋势

Fig. 6 Trend of the number of selected attributes varying with  $\alpha$  and  $\epsilon$

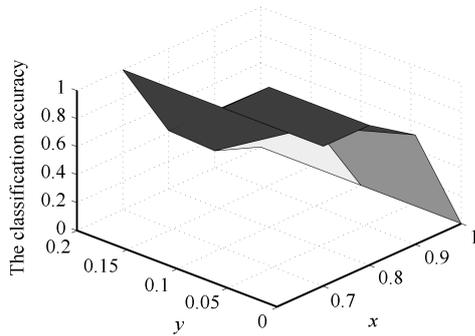


图 7 分类正确率随参数  $\alpha$  和  $\epsilon$  的变化趋势

Fig. 7 Trend of the classification accuracy varying with  $\alpha$  and  $\epsilon$

## 4.2 实验结果

在本部分, 我们通过算法间的比较来验证本文所提约简算法的有效性和可行性. 针对连续域决策信息系统的属性约简, 文献 [18] 基于一型模糊粗糙集提出了一型模糊粗糙 QuickReduct 算法, 然而一型模糊粗糙 QuickReduct 算法不能有效处理高度不确定数据和噪音数据. 文献 [16] 将一型模糊粗糙 QuickReduct 算法推广到二型模糊环境中, 相应提出了区间二型模糊粗糙 QuickReduct 算法, 区间二型模糊粗糙 QuickReduct 算法虽然能有效处理高度不确定数据和噪音数据, 但不具有变精度粗糙集的思想, 因此对错分敏感. 本文所提约简算法融有变精度粗糙集和区间二型模糊集的特征, 可以有效处理高度不确定数据和错分现象. 接下来, 我们通过实验来比较这三种算法, 从而证实上述的结论. 为了叙述的方便, 规定文献 [18] 的算法为“方法 1”, 文献 [16] 的算法为“方法 2”, 本文算法为“方法 3”. 本次实

验将数据集分割为两部分, 即训练集和测试集. 实验又分为 3 种情形. 情形 1: 训练集和测试集的比例为 1:1; 情形 2: 训练集和测试集的比例为 1:2; 情形 3: 训练集和测试集的比例为 1:3. 数据分割的目的在于考察不同方法在不同样本条件下的约简性能, 实验结果总结见表 2.

表 2 比较结果

Table 2 Results of the comparison

	方法 1	方法 2	方法 3
情形 1			
约简属性个数	2	3	1
分类正确率 (训练集)	0.4561	0.7748	1
分类正确率 (测试集)	0.4121	0.7233	1
情形 2			
约简属性个数	2	3	2
分类正确率 (训练集)	0.4755	0.8422	1
分类正确率 (测试集)	0.3911	0.7158	0.7454
情形 3			
约简属性个数	2	2	2
分类正确率 (训练集)	0.4867	0.8236	0.8470
分类正确率 (测试集)	0.3685	0.5220	0.7295

从表 2 可以发现, 方法 3 得到了最为精简的约简结构, 方法 2 比方法 1 获得的约简属性个数略多, 这说明方法 3 最能降低原始条件属性的个数. 从分类正确率的平均水平来看, 方法 1 的平均分类正确率为:  $(0.4561 + 0.4121 + 0.4755 + 0.3911 + 0.4867 + 0.3685)/6 = 0.4317$ ; 方法 2 的平均分类正确率为:  $(0.7748 + 0.7233 + 0.8422 + 0.7158 + 0.8236 + 0.5220)/6 = 0.7366$ ; 方法 3 的平均分类正确率为:  $(1 + 1 + 1 + 0.7454 + 0.8470 + 0.7295)/6 = 0.8870$ . 方法 2 获得的分类正确率要明显高于方法 1, 这是由于方法 2 可以有效处理噪音数据和高度不确定数据. 方法 3 获得了最高的分类正确率, 这说明方法 3 对于连续域决策信息系统具有较强的数据概括能力, 这正是由于方法 3 可以有效处理高度不确定数据, 以及对错分不敏感. 实验结果表明方法 3 是可行和有效的.

## 5 结论

连续域决策信息系统的属性约简一直是研究的热点问题, 由于传统粗糙集只对包含离散值的决策表有效, 基于传统粗糙集进行连续域决策信息系统的属性约简, 必须先对连续属性进行离散化, 然而离散化容易导致信息损失, 所以用模糊化代替离散化的手段逐渐被广大学者认同, 事实上, 连续数据具有高度的不确定性, 作者认为采用二型模糊化取代一型模糊化可能更具合理性. 另一方面, 在现实生活中, 错分现象常常存在. 正是以上思路为主线, 本文在区间二型模糊包含度的公理化定义下, 给出了

新的区间二型模糊包含度的计算公式, 并讨论了它一些基本性质. 进一步, 在区间二型模糊包含近似空间中, 给出了区间二型模糊集的上、下近似集. 最后, 基于区间二型模糊粗糙集模型研究了连续域决策信息系统的属性约简问题, 给出了新的约简算法, 实例说明了相应约简方法的具体计算步骤, 并且实验比较结果表明了本文所提约简算法是可行和有效的. 下一步, 可以考虑基于普通二型模糊粗糙集研究连续域决策信息系统.

## References

- Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, **8**(3): 338–356
- Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, 1975, **8**(3): 199–249
- Yang M S, Lin D C. On similarity and inclusion measures between type-2 fuzzy sets with an application to clustering. *Computer and Mathematics with Applications*, 2009, **57**(6): 896–907
- Hwang C M, Yang M S, Hung W L, Lee E S. Similarity, inclusion and entropy measures between type-2 fuzzy sets based on the Sugeno integral. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **53**(9–10): 1788–1797
- Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Science*, 1982, **11**(5): 341–356
- Pawlak Z. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991
- Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 1990, **17**(2–3): 191–209
- Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**(1): 87–96
- Atanassov K T. *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*. Heidelberg: Physical-Verlag, 1999
- Cornelis C, De Cock M, Kerre E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: at the crossroads of imperfect knowledge. *Expert Systems*, 2003, **20**(5): 260–270
- Xu Xiao-Lai, Lei Ying-Jie, Tan Qiao-Ying. Intuitionistic fuzzy rough sets based on triangle norm. *Control and Decision*, 2008, **23**(8): 900–904  
(徐小来, 雷英杰, 谭巧英. 基于直觉模糊三角模的直觉模糊粗糙集. 控制与决策, 2008, **23**(8): 900–904)
- Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators. *Information Sciences*, 2008, **178**(11): 2448–2465
- Zhou L, Wu W Z, Zhang W X. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators. *Information Sciences*, 2009, **179**(7): 883–898
- Lu Yan-Li, Lei Ying-Jie, Hua Ji-Xue. Attribute reduction based on intuitionistic fuzzy rough set. *Control and Decision*, 2009, **24**(3): 335–341  
(路艳丽, 雷英杰, 华继学. 基于直觉模糊粗糙集的属性约简. 控制与决策, 2009, **24**(3): 335–341)
- Zhang Zhi-Ming, Bai Yun-Chao, Tian Jing-Feng. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy coverings. *Control and Decision*, 2010, **25**(9): 1369–1373  
(张植明, 白云超, 田景峰. 基于覆盖的直觉模糊粗糙集. 控制与决策, 2010, **25**(9): 1369–1373)
- Wu Hao-Yang, Wu Yu-Yuan, Luo Jing-Ping. An interval type-2 fuzzy rough set model for attribute reduction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(2): 301–315
- Mendel J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001
- Jensen R, Shen Q. Fuzzy-rough attribute reduction with application to web categorization. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, **141**(3): 469–485
- Bhatt R B, Copal M. On fuzzy-rough sets approach to feature selection. *Pattern Recognition Letters*, 2005, **26**(7): 965–975
- Pan Yong-Ping, Huang Dao-Ping, Sun Zong-Hai. Overview of type-2 fuzzy logic control. *Control Theory & Applications*, 2011, **28**(1): 13–23  
(潘永平, 黄道平, 孙宗海. II 型模糊控制综述. 控制理论与应用, 2011, **28**(1): 13–23)
- Fisher R A. UCI repository of machine learning databases [Online], available: <http://www.ics.uci.edu/mllearn/MLRepository.html>, January 25, 2012



**赵涛** 西南交通大学交通运输与物流学院博士研究生. 2010 年获西南交通大学数学学院学士学位. 主要研究方向为二型模糊系统, 智能控制. 本文通信作者. E-mail: zhaotaozhaogang@126.com  
(**ZHAO Tao** Ph. D. candidate at the School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University. He received his bachelor degree from Southwest Jiaotong University in 2010. His research interest covers type-2 fuzzy systems and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



**肖建** 西南交通大学电气工程学院教授. 主要研究方向为智能控制, 计算机控制系统. E-mail: jxiao@home.swjtu.edu.cn  
(**XIAO Jian** Professor at the School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University. His research interest covers intelligent control and computer-controlled systems.)