

基于多传感器的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法

冯肖亮^{1,2} 文成林³ 刘伟峰³ 李晓芳¹ 徐立中¹

摘 要 与集中式和分布式融合滤波器相比, 序贯式融合滤波器不仅保证了估计精度相同, 而且在对测量值即到达即滤波、部分测量值缺失等方面都具有灵活性、自适应性和实时性等特点. 为此, 本文针对一类噪声能量有界的多传感器动态系统, 给出了一种序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器. 首先, 利用测量值扩维的方法, 给出一种集中式融合有限域 H^∞ 滤波器; 然后, 利用 H^∞ 滤波的性能指标与二次型不等式之间、以及 Hilbert 空间二次型的稳定点与 Krein 空间正交投影之间等的对应关系, 构造出一种序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器; 最后, 从理论与数值仿真两方面验证了新滤波器与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器的性能等价性.

关键词 融合估计, 序贯式融合, 有限域 H^∞ 滤波, Krein 空间

引用格式 冯肖亮, 文成林, 刘伟峰, 李晓芳, 徐立中. 基于多传感器的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法. 自动化学报, 2013, 39(9): 1523–1532

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01523

Sequential Fusion Finite Horizon H^∞ Filtering for Multisensor System

FENG Xiao-Liang^{1,2} WEN Cheng-Lin³ LIU Wei-Feng³ LI Xiao-Fang¹ XU Li-Zhong¹

Abstract Compared with the centralized fusion filter and the distributed one, sequential fusion filter not only works with the same fusion estimation precision, but also with the advantages of flexibility, adaptively, real-time and so on. Therefore, a novel sequential fusion H^∞ filter is proposed for the multisensor system with bounded energy noises in this paper. Firstly, utilizing the method of measurement augmented, a centralized fusion finite horizon H^∞ filter is given. Then, based on the correspond relationship between the H^∞ filtering performance index and the quadratic inequality, and the relationship between the stationary point of the quadratic form in Hilbert space and the projection in Krein space, a novel sequential fusion finite horizon H^∞ filter is derived in this paper. Finally, the equivalency of the new filter and the centralized fusion finite horizon H^∞ filter is demonstrated from theory analysis and numerical simulation.

Key words Fusion estimation, sequential fusion, finite horizon H^∞ filtering, Krein space

Citation Feng Xiao-Liang, Wen Cheng-Lin, Liu Wei-Feng, Li Xiao-Fang, Xu Li-Zhong. Sequential fusion finite horizon H^∞ filtering for multisensor system. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(9): 1523–1532

状态估计是依据一定的准则, 在已知测量值的基础上获得系统状态估计值的一种优化方法. 随着工业过程中现代化、自动化水平的不断提高, 系统状态估计在工业过程中起到的作用也更加突出. 由于工业系统的复杂程度越来越高, 状态滤波精度的要求也越来越精确, 往往需要通过增加信息冗余的途径实现这一目的, 因此, 使用多个传感器来共同完成

这一任务便是必然的选择^[1]. 无论扩维集中式融合滤波器, 还是分布式融合滤波器, 它们都需要所有传感器的测量值全部到达之后, 才能够利用所有量测值, 实现对当前的系统状态的估计. 这样不可避免地导致滤波器难以满足系统对实时性的要求; 尤其是在多传感器网络系统中有延时测量存在时, 要实现系统对实时性的要求就会更加困难. 而由文献 [2] 构造出的序贯式融合滤波器, 不仅在目标状态估计精度上与扩维集中式融合滤波算法是等价的, 更重要的是能有效克服上述分析中所遇到的相关问题, 在对量测即到达即滤波、部分量测缺失等方面都具有灵活性、自适应性和实时性等特点. 随后文献 [3–7] 又将其推广到了异步融合系统、非线性目标跟踪系统以及网络通信存在延迟、错序甚至丢包时的网络融合估计场景中, 文献 [8] 进一步给出了多尺度序贯式融合滤波算法. 文献 [9] 还针对多传感器多速率系统设计了序贯式的融合滤波方法. 目前, 对相应问题的研究仍然是该领域的热点问题.

收稿日期 2012-01-06 录用日期 2012-08-06
Manuscript received January 6, 2012; accepted August 6, 2012
国家自然科学基金 (60934009, 61172133, 61175030, 91016020) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60934009, 61172133, 61175030, 91016020)

本文责任编辑 方海涛

Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao

1. 河海大学计算机与信息学院 南京 211100 2. 河南工业大学电气工程学院 郑州 450001 3. 杭州电子科技大学自动化学院系统科学与控制工程研究所 杭州 310018

1. College of Computer and Information Engineering, Hohai University, Nanjing 211100 2. College of Electrical Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001 3. Institute of Systems Science and Control Engineering, College of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018

文献 [2–9] 所给出的多种序贯式融合滤波器都需要系统模型满足标准的 Kalman 滤波条件: 系统参数确定, 系统噪声为已知均值和方差的高斯噪声. 然而, 这在实际过程中通常是难以实现的. 在系统不满足标准 Kalman 滤波条件时, 我们还能否设计出类似的集中式融合滤波器或分布式融合滤波器? 利用设计出的集中融合滤波器还能否构造出与之性能等价的序贯式融合滤波器?

为此, 本文将以一类噪声能量有界但统计特性未知的系统为对象, 开展对上述问题的研究, 在噪声能量有界但统计特性未知的系统中, 最常见的滤波器是 H^∞ 滤波器^[10–12]. H^∞ 滤波器能够在一定的性能指标函数约束下, 使得系统干扰对待估信号的估计误差影响最小.

基于 Kalman 滤波的序贯式融合滤波器是在线性最小均方误差意义下, 利用同一时刻量测的状态相同, 不同时刻量测的状态递推的状态关系式推导得到的. 基于全局设计的无限域定常 H^∞ 滤波器无法直接处理序贯式融合过程中状态关系式不一致的情况, 而在每次处理量测信息时, 都利用一次有限域 H^∞ 滤波器, 难于获得与集中式融合滤波方法等价的估计结果, 这主要是由于两种方法所利用的性能指标函数不同. 因而, 与序贯式融合 Kalman 滤波器的设计相比, 与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器设计面临着新的问题和挑战.

为了解决上述问题, 本文首先利用测量值扩维的方法将单个传感器的有限域 H^∞ 滤波器推广至多传感器的集中式融合有限域 H^∞ 滤波器; 然后, 将 H^∞ 滤波的性能指标转化为一类惯性不定二次型的最小化问题. 再通过对集中式融合有限域 H^∞ 滤波对应的二次型进行分析, 并利用 Hilbert 空间二次型的稳定点与 Krein 空间正交投影之间的对应关系^[12–14], 得到了一种与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器. 最后的数值仿真进一步验证了新滤波器与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器的性能等价性.

符号说明. 在本文中, Hilbert 空间中的变量用斜粗体标记, 如 “ $\mathbf{x}(i)$ ”; Krein 空间中的变量用斜粗体字母下加一横线标记, 如 “ $\underline{\mathbf{x}}(i)$ ”.

1 系统描述

考虑如下线性时变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = F(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1) \\ \mathbf{z}(k) = L(k)\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为 k 时刻的离散系统状态变量, $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^p$ 为待估计信号, $F(k, k-1)$, $L(k)$ 为适

当维数的已知矩阵; 过程噪声 $\mathbf{w}(k, k-1) \in \mathbf{R}^n$ 的统计特性未知, 且 $\{\mathbf{w}(k, k-1)\} \in l_2[1, N)$.

假设系统中有 N 个传感器同时对 k 时刻的系统运行状态 $\mathbf{x}(k)$ 进行观测, 相应的测量方程为

$$\mathbf{y}_i(k) = H_i(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_i(k), \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

式 (2) 中, $\mathbf{y}_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 代表的是第 i 个传感器对系统状态 $\mathbf{x}(k)$ 的测量值, $H_i(k)$ 为其对应的测量矩阵, 同样假设测量噪声 $\mathbf{v}_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 的统计特性未知, 且满足 $\{\mathbf{v}_i(k)\} \in l_2[1, N)$.

2 多传感器集中式融合有限域 H^∞ 滤波器

在如式 (1) 和式 (2) 所描述的多传感器系统中, 当所有传感器对 k 时刻状态 $\mathbf{x}(k)$ 的测量值 $\{\mathbf{y}_i(k) | i = 1, \dots, N\}$ 都到达融合中心之后, 可以将其写成如下增广矩阵的形式:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{H}(k) = \begin{bmatrix} H_1(k) \\ \vdots \\ H_N(k) \end{bmatrix}, \\ V(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

那么式 (2) 所描述的测量方程可表示为

$$Y(k) = \bar{H}(k)\mathbf{x}(k) + V(k) \quad (4)$$

给定 $\gamma > 0$ 时, 式 (1) 和式 (4) 所示系统的有限域 H^∞ 滤波器构造问题就是要在测量值空间 $\{Y(i) | i = 1, 2, \dots, k\}$ 上寻找估计值 $\hat{\mathbf{z}}(k|k)$, 使得估计误差 $\mathbf{e}_z(k) = \hat{\mathbf{z}}(k|k) - \mathbf{z}(k)$ 满足如下有限域 H^∞ 性能指标:

$$\sup_{\mathbf{w}, \mathbf{V} \in l_2} \frac{\sum_{i=1}^k \mathbf{e}_z^T(i) \mathbf{e}_z(i)}{\sum_{i=1}^k V^T(i) V(i) + \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1) \mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0} < \gamma^2 \quad (5)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_0$, P_0 为加权系数, 衡量 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 偏离 $\mathbf{x}(0)$ 的程度.

这样, 式 (1) 和式 (2) 所描述的多传感器融合滤波问题就被等价表述为式 (1) 和式 (4) 所示的伪单传感器滤波问题. 应用单传感器系统的有限域 H^∞ 滤波^[12], 可得如下结论.

结论 1. 给定 $\gamma > 0$ 时, 对式 (1) 和式 (2) 所示的多传感器系统, 有如下集中式融合有限域 H^∞ 滤波器

$$\hat{\mathbf{z}}(k|k) = L(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k) \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K(k) \times [Y(k) - \bar{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \quad (7)$$

$$K(k) = P(k)\bar{H}^T(k) \times [\bar{H}(k)P(k)\bar{H}^T(k) + I]^{-1} \quad (8)$$

在式 (7) 中, $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = F(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$. $P(k)$ 的初始值为 P_0 , 且满足如下 Riccati 方程:

$$P(k+1) = F(k+1, k)P(k)F^T(k+1, k) - F(k+1, k)P(k) \begin{bmatrix} \bar{H}^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \times \bar{R}_e^{-1}(k) \begin{bmatrix} \bar{H}(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k)F^T(k+1, k) + I \quad (9)$$

$$\bar{R}_e(k) = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{H}(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k) \times \begin{bmatrix} \bar{H}^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \quad (10)$$

滤波器存在的充分必要条件为

$$P^{-1}(k) + \bar{H}^T(k)\bar{H}(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L^T(k) > 0 \quad (11)$$

3 多传感器序贯式融合有限域 H^∞ 滤波

按照序贯式融合滤波的思想, 融合中心依照量测到达的顺序对当前待估信号的估计值进行序贯更新. 不妨假设各传感器的量测到达融合中心的顺序与传感器下标相同, 即 k 时刻各量测到达融合中心的先后顺序为: $\mathbf{y}_1(k), \mathbf{y}_2(k), \dots, \mathbf{y}_N(k)$. 为了得到与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法, 我们对其所满足的性能指标函数进行分析.

式 (5) 所示的有限域 H^∞ 性能指标函数还可以表示为

$$\sup_{\mathbf{w}, \mathbf{v} \in l_2} \frac{\sum_{i=1}^k \mathbf{e}_z^T(i)\mathbf{e}_z(i)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^T(i)\mathbf{v}_j(i) + \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1)\mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0} < \gamma^2 \quad (12)$$

式 (12) 所示性能指标函数可转化为如下形式的二次型不等式:

$$\bar{J}(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1)\mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^T(i)\mathbf{v}_j(i) - \gamma^{-2} \mathbf{e}_z^T(i)\mathbf{e}_z(i) \right) = \bar{J}(k-1) + \mathbf{w}^T(k, k-1)\mathbf{w}(k, k-1) +$$

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^T(k)\mathbf{v}_j(k) - \gamma^{-2} \mathbf{e}_z^T(k)\mathbf{e}_z(k) > 0 \quad (13)$$

求解上述二次型不等式问题等价于: 求解使得二次型 $\bar{J}(k)$ 取最小值 $\bar{J}^*(k)$ 且 $\bar{J}^*(k) > 0$ 的稳定点.

由系统噪声满足 $\mathbf{w}^T(k, k-1)\mathbf{w}(k, k-1) \geq 0$, $\mathbf{v}_i^T(k)\mathbf{v}_i(k) \geq 0, i = 2, \dots, N$, 可得结论 2.

结论 2. 集中式融合有限域 H^∞ 滤波器所对应的二次型可由如下二次型序列等价表示:

$$\begin{cases} J_1(k) = J_N(k-1) + \mathbf{v}_1^T(k)\mathbf{v}_1(k) + \mathbf{w}^T(k, k-1)\mathbf{w}(k, k-1) \\ J_i(k) = J_{i-1}(k) + \mathbf{v}_i^T(k)\mathbf{v}_i(k), \\ \quad i = 2, \dots, N-1 \\ J_N(k) = J_{N-1}(k) + \mathbf{v}_N^T(k)\mathbf{v}_N(k) - \gamma^{-2} \mathbf{e}_z^T(k)\mathbf{e}_z(k) > 0 \end{cases} \quad (14)$$

为了便于描述和标记, 记第 i 个传感器的量测对应的状态为 $\mathbf{x}_i(k)$, 则有:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = F(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1) \\ \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_1(k) = \mathbf{x}_2(k) = \dots = \mathbf{x}_N(k) \end{cases} \quad (15)$$

利用 Hilbert 空间二次型的稳定点与 Krein 空间正交投影之间的对应关系^[12-13], 对结论 2 中的二次型序列进行分析, 可得如下定理成立.

定理 1. 给定 $\gamma > 0$ 时, 可以得到一种与式 (6) ~ (10) 所示的集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器.

该定理的证明过程将由第 3.1 节的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器的建立、第 3.2 节的与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价性证明两部分组成.

3.1 序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器的建立

3.1.1 当第一个传感器的量测到达融合中心时

由式 (15), 可知该量测对应的状态方程为

$$\mathbf{x}_1(k) = F(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1) \quad (16)$$

其对应于式 (14) 所示的二次型:

$$J_1(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1)\mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{v}_1^T(k)\mathbf{v}_1(k) - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} Y(i) \\ \hat{\mathbf{z}}(i|i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}(i) \\ L(i) \end{bmatrix} \mathbf{x}(i) \right)^T \times$$

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Y(i) \\ \hat{\mathbf{z}}(i|i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}(i) \\ L(i) \end{bmatrix} \mathbf{x}(i) \right) \quad (17)$$

由文献 [12–14] 可知, 式 (17) 所示 Hilbert 空间二次型的稳定点求解问题对应于如下 Krein 空间状态空间模型的正交投影问题 (详见文献 [12–13]).

$$\begin{cases} \Xi(l), & l = 1, \dots, k-1 \\ \mathbf{x}_1(k) = F(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1) \\ \mathbf{y}_1(k) = H_1(k)\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{v}_1(k) \end{cases} \quad (18)$$

其中, $\Xi(l)$ 代表模型方程:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(l) = F(l, l-1)\mathbf{x}(l-1) + \mathbf{w}(l, l-1) \\ \begin{bmatrix} Y(l) \\ \hat{\mathbf{z}}(l|l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}(l) \\ L(l) \end{bmatrix} \mathbf{x}(l) + \underline{V}(l) \end{cases}$$

且初始值与系统噪声满足:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{w}(j_1, j_1 - 1) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ \underline{V}(j_3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{w}(j_2, j_2 - 1) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ \underline{V}(j_4) \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I\delta_{j_1, j_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \delta_{j_3, j_4} \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中, $j_1, j_2 = 1, \dots, k$; $j_3, j_4 = 1, \dots, k-1$.

若记 $\underline{W}(k) = [\mathbf{w}^T(1, 0), \dots, \mathbf{w}^T(k, k-1)]^T$, $\underline{\xi}(k) = [\mathbf{x}^T(0), \underline{W}^T(k)]^T$, 那么式 (17) 所示二次型的稳定点对应于 $\underline{\xi}(k)$ 在由 $\{\underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(k-1), \hat{\mathbf{z}}(1|1), \dots, \hat{\mathbf{z}}(k-1|k-1), \mathbf{y}_1(k)\}$ 张成的 Krein 子空间 $L_y^1(k)$ 上的正交投影. 记 $\underline{Y}(i), \hat{\mathbf{z}}(i|i)$ 在 $\{\underline{Y}(1), \dots, \underline{Y}(i-1), \hat{\mathbf{z}}(1|1), \dots, \hat{\mathbf{z}}(i-1|i-1)\}$ 张成的子空间 $L_Y(i-1)$ 上的正交投影分别为: $\hat{\mathbf{Y}}(i|i-1), \hat{\mathbf{z}}^*(i|i-1), \hat{\mathbf{y}}_1(k|k-1)$ 为 $\mathbf{y}_1(k)$ 在 $L_Y(k-1)$ 上的正交投影, 误差 $\mathbf{e}_{Yz}(i) = [\underline{Y}^T(i), \hat{\mathbf{z}}^T(i|i)]^T - [\hat{\mathbf{Y}}^T(i|i-1), (\hat{\mathbf{z}}^*(i|i-1))^T]^T$, $\mathbf{e}_{y1}(k) = \mathbf{y}_1(k) - \hat{\mathbf{y}}_1(k|k-1)$. 则 $\{\mathbf{e}_{Yz}(1), \dots, \mathbf{e}_{Yz}(k-1), \mathbf{e}_{y1}(k)\}$ 为 L_y^1 的一组正交基. 故 $\underline{\xi}(k)$ 在 $L_y^1(k)$ 上的正交投影可表示为

$$\hat{\underline{\xi}}_1(k|k) = \langle \underline{\xi}(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle \langle \mathbf{e}_{y1}(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle^{-1} \mathbf{e}_{y1}(k) +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{\xi}(k), \mathbf{e}_{Yz}(i) \rangle \langle \mathbf{e}_{Yz}(i), \mathbf{e}_{Yz}(i) \rangle^{-1} \mathbf{e}_{Yz}(i) \quad (20)$$

$\mathbf{x}_1(k)$ 在空间 $L_y^1(k)$ 上的正交投影为

$$\hat{\mathbf{x}}_1(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) +$$

$$\langle \mathbf{x}_1(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle \langle \mathbf{e}_{y1}(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle^{-1} \mathbf{e}_{y1}(k) \quad (21)$$

在式 (21) 中, $\hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) = F(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$, $\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$ 为 $\mathbf{x}(k-1)$ 在 $L_Y(k-1)$ 的正交投影.

$$\mathbf{e}_{y1}(k) = H_1(k)[\mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1)] + \mathbf{v}_1(k) \quad (22)$$

若记 $\mathbf{e}_{x1}(k) = \mathbf{x}_1(k) - \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1)$, $P_1(k) = \langle \mathbf{e}_{x1}(k), \mathbf{e}_{x1}(k) \rangle$, 则有:

$$R_{ey1}(k) = \langle \mathbf{e}_{y1}(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle = H_1(k)P_1(k)H_1^T(k) + I \quad (23)$$

$$K_1(k) = \langle \mathbf{x}_1(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle \langle \mathbf{e}_{y1}(k), \mathbf{e}_{y1}(k) \rangle^{-1} = P_1(k)H_1^T(k)R_{ey1}^{-1}(k) \quad (24)$$

由于 $\mathbf{x}_2(k) = \mathbf{x}_1(k)$, 所以 $\mathbf{x}_2(k)$ 基于 $L_y^1(k)$ 的正交投影 $\hat{\mathbf{x}}_2(k|k-1) = \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1)$.

$$P_2(k) = \langle \mathbf{e}_{x2}(k), \mathbf{e}_{x2}(k) \rangle = P_1(k) - P_1(k)H_1^T(k)(H_1(k)P_1(k) \times H_1^T(k) + I)^{-1}H_1(k)P_1(k) \quad (25)$$

$\hat{\underline{\xi}}_1(k|k)$ 对应于二次型 $J_1(k)$ 的一个稳定点, 在该稳定点处, $J_1(k)$ 的值为

$$J_1^*(k) = J_N^*(k-1) + \mathbf{e}_{y1}^T(k)R_{ey1}^{-1}(k)\mathbf{e}_{y1}(k) \quad (26)$$

其中, $\mathbf{e}_{y1}(k) = \mathbf{y}_1(k) - H_1(k)F(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$.

根据 $R_{ey1}(k) = H_1(k)P_1(k)H_1^T(k) + I > 0$, $\bar{R}_e(i) > 0$ 及稳定点处取极值的判断条件可知, $J_1^*(k)$ 为 $J_1(k)$ 的最小值. 此时, 系统待估信号的估计值为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}}_1(k|k) = L(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_1(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) + K_1(k) \times [\mathbf{y}_1(k) - H_1(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1)] \\ \hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) = F(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) \\ K_1(k) = P_1(k)H_1^T(k)(H_1(k)P_1(k) \times H_1^T(k) + I)^{-1} \\ P_2(k) = P_1(k) - P_1(k)H_1^T(k)(H_1(k) \times P_1(k)H_1^T(k) + I)^{-1}H_1(k)P_1(k) \end{cases} \quad (27)$$

3.1.2 当第 i ($i = 2, \dots, N-1$) 个传感器的量测到达融合中心时

由式 (14) 知, $\mathbf{y}_i(k)$ 对应的二次型为

$$J_i(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1) \mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 + \sum_{j=1}^i \mathbf{v}_j^T(k) \mathbf{v}_j(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\begin{bmatrix} Y(j) \\ \hat{\mathbf{z}}(j|j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}(j) \\ L(j) \end{bmatrix} \mathbf{x}(j) \right)^T \times \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Y(j) \\ \hat{\mathbf{z}}(j|j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{H}(j) \\ L(j) \end{bmatrix} \mathbf{x}(j) \right) \quad (28)$$

求解二次型 $J_i(k)$ 的稳定点对应于如下 Krein 空间状态空间模型的正交投影^[12-13]:

$$\begin{cases} \Xi(l), \quad l = 1, \dots, k-1 \\ \mathbf{x}(k) = F(k, k-1) \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1) \\ \mathbf{x}_j(k) = \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}_j(k) = H_j(k) \mathbf{x}_j(k) + \mathbf{v}_j(k), \quad j = 1, \dots, i \end{cases} \quad (29)$$

初始值与系统噪声除满足式 (19) 所示 Gramian 矩阵外, 还满足

$$\langle \mathbf{v}_{j_5}(k), \mathbf{v}_{j_6}(k) \rangle = I \delta_{j_5, j_6}, \quad j_5, j_6 = 2, \dots, i \quad (30)$$

同样, 记 $\{\mathbf{Y}(1), \dots, \mathbf{Y}(k-1), \mathbf{y}_1(k), \dots, \mathbf{y}_i(k), \hat{\mathbf{z}}(1|1), \dots, \hat{\mathbf{z}}(k-1|k-1)\}$ 张成的 Krein 子空间为 $L_y^i(k)$. $\hat{\mathbf{y}}_i(k|k-1)$ 为 $\mathbf{y}_i(k)$ 在 $L_y^{i-1}(k)$ 上的正交投影, 误差 $\mathbf{e}_{yi}(k) = \mathbf{y}_i(k) - \hat{\mathbf{y}}_i(k|k-1)$, 那么 $\{\mathbf{e}_{Yz}(1), \dots, \mathbf{e}_{Yz}(k-1), \mathbf{e}_{y1}(k), \dots, \mathbf{e}_{yi}(k)\}$ 就构成了 $L_y^i(k)$ 的一组正交基, 故 $\underline{\xi}(k)$ 在 $L_y^i(k)$ 上的正交投影为

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\xi}}_i(k|k) &= \sum_{m=1}^{k-1} \langle \underline{\xi}(k), \mathbf{e}_{Yz}(m) \rangle \times \\ &\quad \langle \mathbf{e}_{Yz}(m), \mathbf{e}_{Yz}(m) \rangle^{-1} \mathbf{e}_{Yz}(m) + \\ &\quad \sum_{j=1}^i \langle \underline{\xi}(k), \mathbf{e}_{yj}(k) \rangle \langle \mathbf{e}_{yj}(k), \mathbf{e}_{yj}(k) \rangle^{-1} \mathbf{e}_{yj}(k) \end{aligned} \quad (31)$$

$\mathbf{x}_i(k)$ 在 $L_y^i(k)$ 上的正交投影为

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_{i-1}(k|k) + K_i(k) \mathbf{e}_{yi}(k) \quad (32)$$

式中

$$K_i(k) = \langle \mathbf{x}_i(k), \mathbf{e}_{yi}(k) \rangle \langle \mathbf{e}_{yi}(k), \mathbf{e}_{yi}(k) \rangle^{-1} =$$

$$P_i(k) H_i^T(k) (H_i(k) P_i(k) H_i^T(k) + I)^{-1}$$

由状态关系式 $\mathbf{x}_{i+1}(k) = \mathbf{x}_i(k)$, 可知

$$P_{i+1}(k) = P_i(k) - P_i(k) H_i^T(k) (H_i(k) \times P_i(k) H_i^T(k) + I)^{-1} H_i(k) P_i(k) \quad (33)$$

$\hat{\underline{\xi}}_i(k|k)$ 对应于 $J_i(k)$ 的一个稳定点, 对应的极值

$$J_i^*(k) = J_{i-1}^*(k) + \mathbf{e}_{yi}^T(k) R_{eyi}^{-1}(k) \mathbf{e}_{yi}(k)$$

其中, $\mathbf{e}_{yi}(k) = \mathbf{y}_i(k) - H_i(k) \hat{\mathbf{x}}_{i-1}(k|k)$.

根据 $R_{eyj}(k) = H_j(k) P_j(k) H_j^T(k) + I > 0$ ($j = 1, \dots, i$), $\bar{R}_e(i) > 0$ 及稳定点处取极值的判断条件可知, $J_i^*(k)$ 为 $J_i(k)$ 的最小值. 此时, 系统待估信号的估计值为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}}_i(k|k) = L(k) \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_{i-1}(k|k) + \\ \quad K_i(k) [\mathbf{y}_i(k) - H_i(k) \hat{\mathbf{x}}_{i-1}(k|k)] \\ K_i(k) = P_i(k) H_i^T(k) \times \\ \quad (H_i(k) P_i(k) H_i^T(k) + I)^{-1} \\ P_{i+1}(k) = P_i(k) - P_i(k) H_i^T(k) (H_i(k) \times \\ \quad P_i(k) H_i^T(k) + I)^{-1} H_i(k) P_i(k) \end{cases} \quad (34)$$

3.1.3 当第 N 个传感器的量测到达融合中心时

由式 (14) 可知, $\mathbf{y}_N(k)$ 对应的二次型为

$$J_N(k) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j^T(i) \mathbf{v}_j(i) - \gamma^{-2} \mathbf{e}_z^T(i) \mathbf{e}_z(i) \right) + \sum_{i=1}^k \mathbf{w}^T(i, i-1) \mathbf{w}(i, i-1) + \tilde{\mathbf{x}}_0^T P_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (35)$$

求解二次型 $J_N(k)$ 的稳定点对应于如下 Krein 空间状态空间模型的正交投影^[12-13]:

$$\Xi(l), \quad l = 1, \dots, k \quad (36)$$

当 $l = k$ 时, 上式还可以表示为

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k) = F(k, k-1)\underline{\mathbf{x}}(k-1) + \underline{\mathbf{w}}(k, k-1) \\ \underline{\mathbf{x}}_l(k) = \underline{\mathbf{x}}(k), \quad l = 1, \dots, N \\ \underline{\mathbf{y}}_j(k) = H_j(k)\underline{\mathbf{x}}_j(k) + \underline{\mathbf{v}}_j(k), \\ \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}_N(k) \\ \hat{\mathbf{z}}(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_N(k) + \bar{\underline{\mathbf{v}}}_N(k) \end{cases} \quad (37)$$

初始值与系统噪声除满足式 (19) 所示 Gramian 矩阵外, 还满足

$$\begin{cases} \langle \underline{\mathbf{v}}_{j_7}(k), \underline{\mathbf{v}}_{j_8}(k) \rangle = I\delta_{j_7, j_8}, \\ \quad j_7, j_8 = 2, \dots, N \\ \langle \bar{\underline{\mathbf{v}}}_N(k), \bar{\underline{\mathbf{v}}}_N(k) \rangle = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{记 } \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}_N(k) \\ \hat{\mathbf{z}}(k|k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k),$$

则 $\{\underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(1), \dots, \underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(k-1), \underline{\mathbf{e}}_{y_1}(k), \dots, \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k)\}$ 就构成了 $L_Y(k)$ 的一组正交基. 则 $\underline{\xi}(k)$ 在 $L_Y(k)$ 上的正交投影可表示为

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\xi}}_N(k|k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{\xi}(k), \underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(i) \rangle \times \\ &\quad \langle \underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(i), \underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(i) \rangle^{-1} \underline{\mathbf{e}}_{Y_z}(i) + \\ &\quad \sum_{j=1}^N \langle \underline{\xi}(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_j}(k) \rangle \langle \underline{\mathbf{e}}_{y_j}(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_j}(k) \rangle^{-1} \underline{\mathbf{e}}_{y_j}(k) \end{aligned} \quad (39)$$

$\underline{\mathbf{x}}_N(k)$ 在 $L_Y(k)$ 上的正交投影为

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_N(k|k) &= \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k) + \\ &\quad \langle \underline{\mathbf{x}}_N(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) \rangle \langle \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) \rangle^{-1} \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) \end{aligned} \quad (40)$$

在这里

$$\begin{aligned} R_{ey_N}(k) &= \langle \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) \rangle = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P_N(k) [H_N^T(k) L^T(k)] = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \Lambda_1(k) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_3(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Lambda_1^T(k) \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\langle \underline{\mathbf{x}}_N(k), \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) \rangle = P_N(k) [H_N^T(k), L^T(k)] \quad (42)$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda_1(k) = L(k)P_N(k)H_N^T(k) \times \\ \quad (I + H_N(k)P_N(k)H_N^T(k))^{-1} \\ \Lambda_2(k) = -\gamma^2 I + L(k) \times \\ \quad (P_N^{-1}(k) + H_N^T(k)H_N(k))^{-1} L^T(k) \\ \Lambda_3(k) = I + H_N(k)P_N(k)H_N^T(k) \end{cases}$$

由状态空间方程 $\underline{\mathbf{x}}(k+1) = F(k+1, k)\underline{\mathbf{x}}(k) + \underline{\mathbf{w}}(k+1, k)$, 知

$$\begin{aligned} P_1(k+1) &= F(k+1, k)P_N(k) \times \\ &\quad F^T(k+1, k) + I - F(k+1, k)P_N(k) \times \\ &\quad \begin{bmatrix} H_N^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} R_{ey_N}^{-1}(k) \times \\ &\quad \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P_N(k) F^T(k+1, k) \end{aligned} \quad (43)$$

$\hat{\underline{\xi}}_N(k|k)$ 对应于 $J_N(k)$ 的一个稳定点, 对应的极值 $J_N^*(k) = J_{N-1}^*(k) + \underline{\mathbf{e}}_{y_N}^T(k) R_{ey_N}^{-1}(k) \underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k)$ 且

$$\underline{\mathbf{e}}_{y_N}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}_N(k) \\ \hat{\mathbf{z}}(k|k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} \hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k)$$

若记

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}^*(k|k) &= L(k)\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k) + \\ &\quad \Lambda_1(k) [\underline{\mathbf{y}}_N(k) - H_N(k)\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k)] \end{aligned} \quad (44)$$

并将其代入 $J_N^*(k)$, 可得:

$$J_N^*(k) = J_{N-1}^*(k) + \hat{\mathbf{z}}^T(k|k) \Lambda_2^{-1}(k) \hat{\mathbf{z}}(k|k) +$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_N^T(k|k-1) \Lambda_3^{-1}(k) \tilde{\mathbf{y}}_N(k|k-1) \quad (45)$$

式中, $\tilde{\mathbf{y}}_N(k|k-1) = \underline{\mathbf{y}}_N(k) - H_N(k)\hat{\underline{\mathbf{x}}}_{N-1}(k|k)$, $\tilde{\mathbf{z}}(k|k) = \hat{\mathbf{z}}(k|k) - \hat{\mathbf{z}}^*(k|k)$.

由文献 [12-13] 可知, $J_N^*(k)$ 为二次型 $J_N(k)$ 的最小值的充要条件是, $R_{ey_N}(k)$ 与 $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ 有

相同的惯性 (有相同数目的负特征值). 则 $\Lambda_2(k) < 0$ 成立时, $J_N^*(k)$ 为二次型 $J_N(k)$ 的最小值.

要选择 $\hat{z}(k|k)$ 保证 $J_N^*(k) > 0$, 一个最直接的选择是 $\hat{z}(k|k) = \hat{z}^*(k|k)$, 所以最小值

$$J_N^*(k) = J_{N-1}^*(k) + \tilde{\mathbf{y}}_N^T(k|k-1) \times \Lambda_3^{-1}(k) \tilde{\mathbf{y}}_N(k|k-1) \quad (46)$$

此时, 系统状态估计值为

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{z}}_N(k|k) = L(k) \hat{\mathbf{x}}_N(k|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_N(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_{N-1}(k|k) + K_N(k)(\mathbf{y}_N(k) - H_N(k) \hat{\mathbf{x}}_{N-1}(k|k)) \\ K_N(k) = P_N(k) H_N^T(k) (H_N(k) P_N(k) \times H_N^T(k) + I)^{-1} \\ P_1(k+1) = F(k+1, k) P_N(k) \times F^T(k+1, k) + I - F(k+1, k) P_N(k) \times \begin{bmatrix} H_N^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} R_{eyN}^{-1}(k) \times \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P_N(k) F^T(k+1, k) \\ R_{eyN}(k) = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_N(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P_N(k) \begin{bmatrix} H_N^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (47)$$

在利用第 N 个传感器的量测 $\mathbf{y}_N(k)$ 对系统的状态估计进行更新之后, 融合中心可得 $\mathbf{z}(k)$ 基于量测 $\{\mathbf{y}_j(i) | i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, N\}$ 的全局估计值.

这样, 就得到了一种序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器, 如式 (27)、式 (34) 和式 (47) 所示. 融合滤波器存在的条件为: $\Lambda_2(k) < 0$.

3.2 与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价性证明

事实上, 将式 (10) 代入式 (9), 并利用矩阵求逆定理^[8], 可得:

$$P(k) = I + F(k, k-1) [P^{-1}(k-1) + \bar{H}^T(k-1) \bar{H}(k-1) - \gamma^{-2} \times L^T(k-1) L(k-1)]^{-1} F^T(k, k-1) \quad (48)$$

同理,

$$P_1(k) = I + F(k, k-1) [P_N^{-1}(k-1) + H_N^T(k-1) H_N(k-1) - \gamma^{-2} \times L^T(k-1) L(k-1)]^{-1} F^T(k, k-1) \quad (49)$$

$$P_i(k) = [P_{i-1}^{-1}(k) + H_{i-1}^T(k) H_{i-1}(k)]^{-1}, \quad i = 2, \dots, N \quad (50)$$

由式 (50) 可知

$$P_N^{-1}(k) = P_1^{-1}(k) + \sum_{i=2}^N H_{i-1}^T(k) H_{i-1}(k) \quad (51)$$

$$P_1(k) = I + F(k, k-1) [P_1^{-1}(k-1) + \sum_{i=1}^N H_{i-1}^T(k-1) H_{i-1}(k-1) - \gamma^2 \times L^T(k-1) L(k-1)]^{-1} F^T(k, k-1) \quad (52)$$

通过比较式 (52) 与式 (48) 可知: 当 $P_1(k-1)$ 与 $P(k-1)$ 相等时, $P_1(k)$ 与 $P(k)$ 也是相等的. 序贯式融合有限域 H^∞ 滤波与集中式融合有限域 H^∞ 滤波的初始值均为 P_0 , 故 $P_1(k) = P(k)$.

应用矩阵求逆定理, 可得:

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k) \bar{H}^T(k) \times (\bar{H}(k) P(k) \bar{H}^T(k) + I)^{-1} = \\ &[\bar{H}^T(k) \bar{H}(k) + P^{-1}(k)]^{-1} \bar{H}^T(k) = \\ &[\bar{H}^T(k) \bar{H}(k) + P_1^{-1}(k)]^{-1} \bar{H}^T(k) = \\ &[P_N^{-1}(k) + H_N^T(k) H_N(k)]^{-1} \bar{H}^T(k) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} K_i(k) &= P_i(k) H_i^T(k) \times (H_i(k) P_i(k) H_i^T(k) + I)^{-1} = \\ &[P_i^{-1}(k) + H_i^T(k) H_i(k)]^{-1} H_i^T(k) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} I - K(k) \bar{H}(k) &= I - [\bar{H}^T(k) \bar{H}(k) + P_1^{-1}(k)]^{-1} \bar{H}^T(k) \bar{H}(k) = \\ &(\bar{H}^T(k) \bar{H}(k) + P_1^{-1}(k))^{-1} P_1^{-1}(k) \end{aligned} \quad (55)$$

$$I - K_i(k) H_i(k) =$$

$$(H_i^T(k)H_i(k) + P_i^{-1}(k))^{-1}P_i^{-1}(k) \quad (56)$$

集中式融合有限域 H^∞ 滤波的状态估计方程 (7) 可化为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + K(k) \times \\ &\quad [Y(k) - \bar{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] = \\ &\quad (P_N^{-1}(k) + H_N^T(k)H_N(k))^{-1} \times \\ &\quad P_1^{-1}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \sum_{i=1}^N \{ (P_N^{-1}(k) + \\ &\quad H_N^T(k)H_N(k))^{-1}H_i^T(k)\mathbf{y}_i(k) \} \quad (57) \end{aligned}$$

序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器利用第 N 个量测更新后的状态估计值为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_N(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}_{N-1}(k|k) + K_N(k) \times \\ &\quad [\mathbf{y}_N(k) - H_N(k)\hat{\mathbf{x}}_{N-1}(k|k)] = \\ &\quad (P_N^{-1}(k) + H_N^T(k)H_N(k))^{-1} \times \\ &\quad P_1^{-1}(k)\hat{\mathbf{x}}_1(k|k-1) + \sum_{i=1}^N \varphi(N, i)\mathbf{y}_i(k) \quad (58) \end{aligned}$$

其中,

$$\varphi(N, i) = \begin{cases} \left(\prod_{j=i+1}^N \mathbf{a}_j \right) K_i(k), & i < N \\ K_N(k), & i = N \end{cases} \quad (59)$$

$$\mathbf{a}_j = I - K_{N+i+1-j}(k)H_{N+i+1-j}(k)$$

将式 (54) ~ (56) 代入上式, 可得:

$$\varphi(N, i) = (P_N^{-1}(k) + H_N^T(k)H_N(k))^{-1} H_i^T(k) \quad (60)$$

将式 (60) 代入式 (58), 即为式 (57), 故 $\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_N(k|k)$, $\hat{\mathbf{z}}(k|k) = \hat{\mathbf{z}}_N(k|k)$. 所以, 通常在序贯滤波中, 将最后一个量测更新后的估计值称为全局估计值, 也记为 $\hat{\mathbf{z}}(k|k)$.

4 仿真验证

考虑目标运动模型

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 0.71 & 1 \\ 0 & 0.81 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k, k-1)$$

有两个传感器对该目标的运动过程进行跟踪, 传感器测量方程为

$$\mathbf{y}_i(k) = H_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_i(k), \quad i = 1, 2$$

系统待估信号为 $\mathbf{z}(k) = L\mathbf{x}(k)$, $L = [1, 0]$.

考虑 H^∞ 性能指标水平 $\gamma = 1.05$, 系统初始值及其他参数为 $\mathbf{x}_0 = [0 \ 1]^T$, $H_1 = H_2 = [1, 0]$, $\mathbf{w}(k, k-1) = 5 \begin{bmatrix} \sin(0.2k) \\ \cos(1.5k) \end{bmatrix}$, $P_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{cases} \mathbf{v}_1(k) = 2 \sin(0.5k) \\ \mathbf{v}_2(k) = 2 \cos(0.75k) \end{cases}$.

为了验证本文提出的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器的等价性, 我们对上述系统进行 100 次蒙特卡罗仿真, 仿真结果如图 1 和图 2 及表 1 所示.

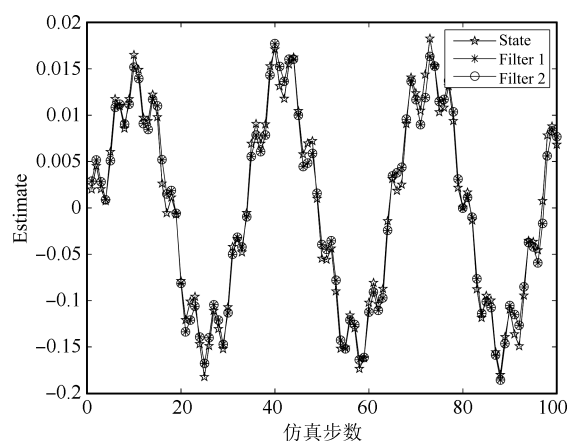


图 1 两类融合滤波方法估计曲线图

Fig.1 The estimate curves of two fusion filters

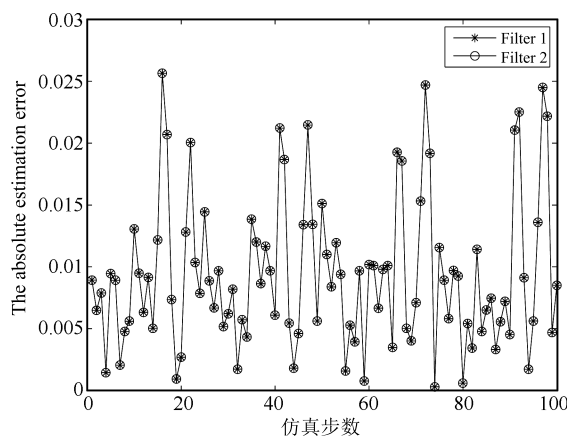


图 2 绝对估计误差曲线图

Fig.2 The absolute estimation error curves

本小节利用数值仿真验证了集中式融合有限域 H^∞ 滤波与序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法在滤波精度方面的等价性. 由图 1、图 2 及表 1 显示的对比结果可知, 本文设计的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法能够取得与集中式融合有限域 H^∞ 滤波相同的

滤波精度. 而且本文方法是利用序贯式的融合思想, 能够及时地对到达融合中心的量测进行处理. 以保证系统融合滤波的灵活性与实时性.

表 1 两类融合滤波方法的绝对估计误差均值

Table 1 Absolute estimation errors of two fusion filters

算法	集中式融合	序贯式融合
	有限域 H^∞ 滤波	有限域 H^∞ 滤波
滤波器	Filter 1	Filter 2
绝对估计误差均值	0.0094	0.0094

5 总结与展望

本文以噪声能量有界的线性时变系统为对象, 研究了多传感器系统的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波问题. 由于序贯式融合过程中状态方程的不一致性以及性能指标等因素的存在, 基于 Kalman 滤波的序贯式融合滤波器的设计方法不能直接应用于序贯式融合 H^∞ 滤波过程. 本文首先利用测量值扩维的思想, 将一类有限域 H^∞ 滤波算法推广到多传感器系统, 并给出一种集中式融合有限域 H^∞ 滤波器; 然后将其对应的有限域 H^∞ 滤波性能指标转化为二次型的最小化问题, 并利用 Hilbert 空间二次型的稳定点与 Krein 空间正交投影之间的对应关系对该二次型最小化问题进行综合分析, 得到了一种与集中式融合有限域 H^∞ 滤波器性能等价的序贯式融合有限域 H^∞ 滤波器. 按照序贯式融合的思想, 当量测到达时, 融合中心可以及时地对待估信号进行估计, 而不需要等到所有量测都到达之后再行集中式滤波, 保证了滤波过程的灵活性与实时性, 而且避免了高维增广矩阵运算, 降低了滤波器对系统处理性能的要求. 而且从理论和仿真上分别证明了本文提出的序贯式有限域 H^∞ 滤波融合算法能够取得与集中式融合有限域 H^∞ 滤波相同的滤波精度.

本文主要是在文献 [12–13] 介绍的 Krein 空间状态估计理论的基础上, 利用 Hilbert 空间二次型的稳定点与 Krein 空间正交投影之间的对应关系, 针对噪声能量有界的多传感器系统开展序贯式融合有限域 H^∞ 滤波问题研究. 然而, Krein 空间状态估计理论的研究仍需要进一步开展. 当系统模型参数不确定、而且噪声能量有界时, 该类系统的多传感器鲁棒序贯式 H^∞ 滤波融合算法也是本文工作进一步发展的方向之一. 此外, 本文是以多传感器同步融合系统为对象, 进行序贯式融合有限域 H^∞ 滤波方法研究的. 由于传感器节点位置与通信环境等因素的影响, 在多传感器系统中, 更经常遭遇的是异步融合系统, 随着无线传感器网络技术的发展, 还会遇到传输延迟、丢包等更复杂场景的多传感器融合滤波问题.

基于 Kalman 滤波器已有研究者利用等价量测、解相关等技术^[15–17], 得到了一系列针对这些复杂场景的序贯式有限域滤波融合算法. 然而, 当系统噪声统计特性未知时, 上述技术中用到的噪声相关性、伪测量噪声的统计特性等均难以描述. 因而, 噪声统计特性未知时, 系统在遭遇异步融合以及传输延迟、丢包等复杂场景时的融合滤波问题也有待于进一步研究.

References

- 1 Wang Cheng-Hong. Thinking about several problems of basic science in automation domain. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(S1): 165–170
(王成红. 关于自动化领域中若干基础科学问题的思考. 自动化学报, 2002, **28**(S1): 165–170)
- 2 Wen Cheng-Lin, Lv Bing, Ge Quan-Bo. A data fusion algorithm based on filtering step by step. *Acta Electronica Sinica*, 2004, **32**(8): 1264–1267
(文成林, 吕冰, 葛泉波. 一种基于分步式滤波的数据融合算法. 电子学报, 2004, **32**(8): 1264–1267)
- 3 Wang Jie, Han Chong-Zhao, Li Xiao-Rong. Asynchronous multisensor data fusion. *Control and Decision*, 2001, **16**(6): 877–881
(王洁, 韩崇昭, 李晓榕. 异步多传感器数据融合. 控制与决策, 2001, **16**(6): 877–881)
- 4 Guo Wen-Yan, Han Chong-Zhao, Lian Feng. Multiple-sensor fusion tracking based on square-root unscented Kalman filter. *Journal of System Simulation*, 2008, **20**(12): 3237–3240
(郭文艳, 韩崇昭, 连峰. 基于平方根 UKF 的多传感器融合跟踪. 系统仿真学报, 2008, **20**(12): 3237–3240)
- 5 Ge Q B, Xu T L, Feng X L. A novel data fusion method based on measurements summation for multisensor system. In: *Proceedings of the 8th Word Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*. Jinan, China: IEEE, 2010. 6757–6761
- 6 Wen C B, Cai Y Z, Wen C L, Xu X M. Optimal sequential Kalman filtering with cross-correlated measurement noises. *Aerospace Science and Technology*, 2013, **26**(1): 153–159
- 7 Deng Z L, Zhang P, Qi W J, Liu J F, Gao Y. Sequential covariance intersection fusion Kalman filter. *Information Sciences*, 2012, **189**: 293–309
- 8 Wen Cheng-Lin. *Multiscale Dynamic Modeling Theory and Its Application*. Beijing: Science Press, 2008. 51–308
(文成林. 多尺度动态建模理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2008. 51–308)
- 9 Shi H, Yan L P, Liu B S, Zhu J H. A sequential asynchronous multirate multisensor information fusion algorithm for state estimation. *Chinese Journal of Electronics*, 2008, **17**(4): 630–632
- 10 Hu S L, Yue D. Event-based H_∞ filtering for networked system with communication delay. *Signal Processing*, 2012, **92**(9): 2029–2039
- 11 Wan Y M, Dong W, Ye H. Distributed H_∞ filtering with consensus strategies in sensor networks: considering consensus tracking error. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1211–1217

- 12 Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Linear estimation in Krein spaces. II: applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **40**(1): 34–49
- 13 Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Linear estimation in Krein spaces-part I: theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **40**(1): 18–33
- 14 Zhong M Y, Liu S, Zhao H H. Krein space-based H_∞ fault estimation for linear discrete time varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1529–1533
- 15 Ge Q B, Xu T L, Feng X L, Wen C L. Universal delayed Kalman filter with measurement weighted summation for the linear time invariant system. *Chinese of Journal Electronics*, 2011, **20**(1): 67–72
- 16 Besada-Portas E, Lopez-Orozco J A, Besada J, de la Cruz J M. Multisensor fusion for linear control systems with asynchronous, out-of-sequence and erroneous data. *Automatica*, 2011, **47**(7): 1399–1408
- 17 Wen C L, Liu R L, Chen T W. Linear unbiased state estimation with random one-step sensor delay. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2007, **26**(4): 573–590



冯肖亮 河海大学计算机与信息学院博士研究生. 主要研究方向为多源信息融合, 目标跟踪, 无线传感器网络.

E-mail: fengxl2002@163.com

(**FENG Xiao-Liang** Ph.D. candidate at the College of Computer and Information Engineering, Hohai University. His research interest covers multi-

sensor information fusion, target tracking, and wireless sensor networks.)



文成林 杭州电子科技大学自动化学院系统科学与控制工程研究所教授. 主要研究方向为多尺度估计理论及其应用, 信号处理与数据融合技术及应用, 动态系统建模理论及其应用. 本文通信作者. E-mail: wencl@hdu.edu.cn

(**WEN Cheng-Lin** Professor at the Institute of Systems Science and Control Engineering, School of Automation, Hangzhou Dianzi University. His research interest covers multi-scale estimation theory and its applications, signal processing, data

fusion technology and its applications, and dynamic system modeling theory and its application technology. Corresponding author of this paper.)



刘伟峰 杭州电子科技大学自动化学院系统科学与控制工程研究所副教授. 主要研究方向为目标跟踪, 不确定信息处理与模式识别.

E-mail: liuwf@hdu.edu.cn

(**LIU Wei-Feng** Associate professor at the Institute of Systems Science and Control Engineering, School of Au-

tomation, Hangzhou Dianzi University. His research interest covers target tracking, uncertain information processing, and pattern recognition.)



李晓芳 河海大学计算机与信息学院副教授. IEEE 会员, 中国计算机学会高级会员, IEEE SMC 南京分会主席. 主要研究方向信息获取与传感器网络.

E-mail: jsjxy@hhu.edu.cn

(**LI Xiao-Fang** Associate professor at the College of Computer and Information Engineering, Hohai University.

She is the secretary general of the IEEE SMC Nanjing Chapter, and a senior member of China Computer Federation. Her research interest covers information acquisition and wireless sensor networks.)



徐立中 河海大学计算机与信息学院教授. 主要研究方向为多传感器系统与信息融合, 遥测遥控与信息处理, 信息处理系统及其应用, 系统建模与仿真.

E-mail: lzhxu@hhu.edu.cn

(**XU Li-Zhong** Professor at the College Computer and Information Engineering, Hohai University. His research

interest covers multi-sensor system and information fusion, signal processing in remote sensing and remote control, information processing system and its applications, and system modeling and simulation.)