一种改进的同伦算法与 H_∞ 鲁棒控制器设计

刘 斌 [1,2] 孙久强 [1] 翟志强 [3] 李 卓 [1] 王常虹 [2]

摘 要 提出了一种具有阶次限制的鲁棒控制器设计方法, 该算法将控制系统的性能指标转化为灵敏度函数问题, 并利用 Nevanlinna-Pick 插值算法进行求解. 提出了一种改进的同伦算法, 将其用于求解由灵敏度函数产生的非线性方程. 基于改进同伦算法设计的鲁棒控制器不仅避免了传统 H_∞ 控制中加权函数的选择问题, 而且克服了鲁棒控制器阶次较高的缺陷. 最后, 文章以 4 阶系统为例, 设计了具有阶次限制的 H_∞ 鲁棒控制器, 通过与传统鲁棒控制器的比较可以看出, 基于本文方法设计的控制器不仅具有较低的阶次, 而且其控制性能也具有明显的优越性.

关键词 H_∞ 鲁棒控制, 灵敏度, Nevanlinna-Pick 插值, 同伦法

引用格式 刘斌, 孙久强, 翟志强, 李卓, 王常虹. 一种改进的同伦算法与 H_∞ 鲁棒控制器设计. 自动化学报, 2013, **39**(8): 1374−1380

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01374

A Modified Homotopy Method and H_∞ Robust Controller Design

LIU Bin[1,2] SUN Jiu-Qiang[1] ZHAI Zhi-Qiang[3]
LI Zhuo[1] WANG Chang-Hong[2]

Abstract A novel method of robust controller design with degree constraint is proposed for feedback control systems, where the performance indices are firstly transferred to the sensitivity function problem that will be solved by Nevanlinna-Pick interpolation. A modified homotopy method is presented to solve nonlinear equations induced by the sensitivity function problem. A new controller based on modified homotopy method is designed without using weighting functions, which can also overcome the defect of high order. At last, the 4th order plant is considered and the corresponding H_∞ robust controller with degree constraint is designed. It is be shown from simulations that the robust controller has not only lower degree than traditional robust controller, but also superior quality obviously.

Key words H_∞ robust control, sensitivity function, Nevanlinna-Pick interpolation, homotopy method

Citation Liu Bin, Sun Jiu-Qiang, Zhai Zhi-Qiang, Li Zhuo, Wang Chang-Hong. A modified homotopy method and H_∞ robust controller design. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(8): 1374−1380

收稿日期 2011-12-08 录用日期 2012-08-17
Manuscript received December 8, 2011; accepted August 17, 2012
国家自然科学基金 (61004067), 黑龙江省青年科学基金 (QC2011C043), 黑龙江省普通高校青年学术骨干支持计划, 黑龙江省科学技术研究项目 (12531058) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61004067), Youth Science Foundation of Heilongjiang Province (QC2011C043), Youth Academic Backbone Project of Heilongjiang Province, Science and Technology Research Project of Heilongjiang Province (12531058)
本文责任编委 夏元清
Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing
1. 东北石油大学电气信息工程学院 大庆 163318 2. 哈尔滨工业大学航天学院空间控制与惯性技术研究中心 哈尔滨 150080 3. 南京农业大学工学院 南京 210095
1. School of Electric Information Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318 2. Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080 3. College of Engineering, Nanjing Agriaultural University, Nanjing 210095

目前, H_∞ 鲁棒控制器设计通常采用加权函数法[1]. 加权函数或用来反映干扰和噪声的频谱, 或用来反映输出灵敏度函数的形状, 从而将控制系统的设计转化为加权信号在某种意义下最小化的问题. 但是加权函数的选择没有一种通用的方法, 针对不同的控制系统, 选择的差异性较大, 即使是同一设计指标, 不同设计者对加权函数的选择也是大相径庭. 而且, 无论是灵敏度最小化问题还是混合灵敏度问题, 阶次较高的加权函数会产生高阶的灵敏度函数或是补灵敏度函数, 从而使得控制器的阶次较高.

Gahinet 等[2] 和 Skelton 等[3] 针对传统 H_∞ 控制的主要缺陷, 提出用 LMI (Linear matrix inequality) 来处理性能指标和鲁棒性, 从而降低控制器的阶次, 但是该方法破坏了目标函数在优化过程中的凸性. 针对含无穷远零点的奇异 H_∞ 控制对象, Xin 等显式地构造出低于广义对象阶次的控制器[4]. 曾建平对这一结果进行推广, 取消了对无穷远零点的限制[5]. Takao 等则针对含不稳定不变零点的情形, 提出基于 2-Riccati 方程设计降阶控制器的方法[6]. Xin[7] 和钟瑞麟等[8] 在 LMI 框架下分别利用系统不稳定的不变零点和稳定零点设计了降阶控制器. 上述方法设计的控制器均是基于时域中系统的状态空间模型. 本文从频域的角度提出了一种具有阶次限制的鲁棒控制器设计方法, 该方法源于 Byrnes 等提出的基于广义熵准则的 Nevanlinna-Pick 插值理论[9−11]. Georgiou 首次提出具有阶次限制的解析插值算法[12−13], 证明了不同谱零点下插值多项式的存在性及唯一性[14]. 文献 [10] 和文献 [15] 基于凸优化理论给出了相关证明, 指出凸优化函数的唯一驻点是搜索区域的内点, 并利用基于 Newton 法的数值算法求解该驻点. 文献 [16] 将文献 [10, 15] 中的最优化方法拓展至具有阶次限制的广义插值问题. 事实上, 上述优化问题是一个局部凸优化问题, 并非全局凸优化问题. 因此, 只有当优化问题的初始值接近最优解时才能保证数值算法的收敛性. 为了应用文献 [10, 15−16] 中提出的理论, 文献 [17−18] 中分别研究了基于连续法求解文献 [10, 15] 中的最优化问题. 但文献 [17−18] 中采用的 Euler 预估 −Newton 校正算法需要求解最优化问题的 Hession 阵, 计算量较大.

本文在文献 [18−19] 的基础上, 提出一种改进的同伦算法, 避免了传统同伦法中逆矩阵的求解, 降低了计算量, 而且迭代算法受初值影响较小. 基于此, 提出了一种基于灵敏度函数的鲁棒控制器设计方法, 首先将系统性能要求转化为灵敏度函数的约束条件, 然后将灵敏度函数的求解转化为具有阶次限制的 Nevanlinna-Pick 插值 (Nevanlinna-Pick interpolation with degree constraint, NPDC) 问题, 最后应用本文提出改进的同伦算法求解相应的非线性方程组, 从而确定灵敏度函数和控制器. 本文提出的鲁棒控制器设计方法与传统 H_∞ 鲁棒控制器设计方法的主要区别是不使用加权函数, 不仅可避免使用加权函数带来的缺陷, 而且控制器的阶次较低. 最后以 4 阶系统为仿真对象, 设计相应的 H_∞ 鲁棒控制器, 并与传统鲁棒控制器的控制效果进行了比较.

1 同伦法

在鲁棒控制器设计过程中, 经常需要求解线性方程 (组) 或非线性方程 (组). 求解线性方程组的算法已经趋于成熟, 常用的有高斯消去法、共轭梯度法等. 特别是 LMI 的出现, 使得控制器的设计变得更加简便. 但是, 非线性方程 (组) 的

求解一直缺少高效、可靠的算法. 因此, 如何快速、准确地求解非线性方程 (组) 就成为衡量控制器设计算法成功与否的一个重要因素. 目前, 在非线性方程求解过程中, 可以用有限元法、边界元法、有限体积法、无网格法等方法求解非线性方程. 其中, 有两大类算法被认为是求解非线性方程的代表性方法: 一类是 "分段线性法"[20]; 另一类是 "同伦法"[21].

同伦法作为现代数学中的一个有力工具得到了广泛应用[21]. 考虑两光滑映射 $F:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}^n$ 和 $G:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}^n$, 定义函数 $H:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}^n$:

$$H(\boldsymbol{x},\lambda):=\lambda F(x)+(1-\lambda)G(\boldsymbol{x}),\lambda\in[0,1] \tag{1}$$

当 $\lambda=0$ 时, $H(\boldsymbol{x},\lambda)=G(\boldsymbol{x})$; 当 $\lambda=1$ 时, $H(\boldsymbol{x},\lambda)=F(\boldsymbol{x})$. 一个拓扑空间可以连续地形变到另一个拓扑空间, 则称这两个拓扑空间同伦, 其中 $H(\boldsymbol{x},\lambda)$ 称为同伦函数, λ 称为同伦参数. 显然, $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$ 时同伦函数的零点分别为 $G(\boldsymbol{x})=0$ 和 $F(\boldsymbol{x})=0$ 的根.

当 λ 在 $[0,1]$ 中变化时, $H(\boldsymbol{x},\lambda)$ 构成一组同伦函数, 相应的同伦方程 $H(\boldsymbol{x},\lambda)=\mathbf{0}$ 的解构成 $\mathbf{R}^n$ 中的一条曲线. 这样, 从初始模型 $G(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 开始, 沿着同伦曲线就可以求得目标函数

$$F(\boldsymbol{x})=\mathbf{0} \tag{2}$$

的解. 因此, 需要 $G(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 的解 $\boldsymbol{x}_0$ 已知或易于求解, 至于如何跟踪同伦曲线, 常用的方法有两种: 预估–校正法和数值延拓法.

2　具有阶次限制的鲁棒控制问题

2.1　反馈控制中的灵敏度函数

考虑如图 1 所示的反馈控制系统, 其中 $P(z)$ 和 $C(z)$ 分别表示给定的被控对象和待设计的控制器, $r(z)$ 是参考信号, $d(z)$ 表示被控对象输出端干扰. 设 $P(z)$ 含有 n_p 个不稳定的极点 $|p_i|>1$, $i=1,2,\cdots,n_p$ 和 n_z 个不稳定的零点 $|z_i|>1$, $i=1,2,\cdots,n_z$.

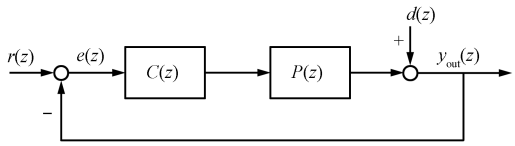

图 1　典型反馈控制系统结构图

Fig. 1　Typical configuration of the feedback control system

由图 1 可知, 从参考输入 $r(z)$ 到误差 $e(z)$ 的传递函数为

$$S(z)=\frac{1}{1+P(z)C(z)} \tag{3}$$

称之为灵敏度函数. $S(z)$ 同时也是从干扰 $d(z)$ 到输出 $y_{\rm out}(z)$ 的传递函数. 对于任何一个控制系统而言, 内稳定是首先要解决的问题, 闭环系统稳定性与灵敏度函数的关系如引理 1 所述.

引理 1[22]**.** 反馈系统内稳定的充要条件是: 1) 灵敏度函数 $S(z)$ 是稳定的; 2) 灵敏度函数 $S(z)$ 满足如下插值条件:

$$\begin{aligned}&S(p_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,n_p\\&S(z_j)=1,\ \ j=1,2,\cdots,n_z\end{aligned} \tag{4}$$

此外, 由于 $e=Sr$, 则 $\|e\|_2\le\|S\|_\infty\|r\|_2$, 出于控制性能的需要, 应减小 $\|S\|_\infty$. 对于干扰抑制而言, 因为 $\|y\|_2\le\|S\|_\infty\|d\|_2$, 故也需要对 $\|S\|_\infty$ 加以限制. 所以, 对于某一设定的 γ, 寻求 S 使之满足

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{NP}:=\{S\in\mathcal{RH}_\infty:\|S\|_\infty<\gamma,S(q_i)=w_i,\\ i=0,1,2,\cdots,n\}\end{aligned} \tag{5}$$

这就是所谓的 Nevanlinna-Pick 插值问题[23]. 该问题有解的充要条件是 Pick 矩阵半正定, 当 Pick 矩阵正定时, S 有无穷多个解析解[23]. 如果 P 中含有多重不稳定的极点和零点, 则可参考文献 [24]. Nevanlinna-Pick 插值理论不仅可以用于控制领域[25−26], 而且在信号处理, 电路理论等方面有广泛的应用[9−10, 14, 27]. 因此, 研究具有阶次限制的 Nevanlinna-Pick 具有重要的意义.

2.2　具有阶次限制的 Nevanlinna-Pick 插值

设各插值点 $q_i,i=0,1,2,\cdots,n$ 是不同的, 插值数据 $(q_i,w_i),i=1,2,\cdots,n$ 以共轭的形式出现, 而且 $q_0=\infty,w_0$ 为实数. 具有阶次限制的 Nevanlinna-Pick 插值问题可描述如下: 给定插值数据 $\{(q_i,w_i),i=0,1,2,\cdots,n\},|q_i|>1$, 且 Pick 矩阵满足

$$M_P:=\left[\frac{w_k+\bar{w}_l}{1-q_k^{-1}\bar{q}_l^{-1}}\right]_{k,l=0}^n>0 \tag{6}$$

确定函数

$$S_{\rm NPDC}\in\mathcal{S}_{\rm NPDC}:=\mathcal{S}_{\rm NP}\cap\mathcal{S}_{\rm DC}(n) \tag{7}$$

其中, $\mathcal{S}_{\rm DC}(n):=\{S:{\rm deg}S\le n\}$ 表示阶次不大于 n 的灵敏度函数 S 之集合.

引理 2 表明了 NPDC 与灵敏度函数 $S(z)$ 之间的关系.

引理 2[10]**.** 给定一 Schur 多项式 $\rho(z)=z^n+\rho_1z^{n-1}+\cdots+\rho_n$, 一定存在唯一的实多项式对:

$$\begin{aligned}\alpha(z)&=\alpha_0z^n+\alpha_1z^{n-1}+\cdots+\alpha_n\\ \beta(z)&=\beta_0z^n+\beta_1z^{n-1}+\cdots+\beta_n\end{aligned}$$

满足以下条件:

1) $S(z)=\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ 为严格有界实函数;

2) $S(q_i)=w_i,i=0,1,\cdots,n$ 为严格有界实函数;

3) $\gamma-S(z)S(z^{-1})=\frac{\rho(z)\rho(z^{-1})}{\alpha(z)\alpha(z^{-1})}$.

换言之, 对于某个 Schur 多项式 $\rho(z)$, 一定存在相应于 NPDC 问题的唯一解 $S(z)$. 而且, $\rho(z)$ 在复平面上单位圆内的 n 个自共轭零点集合与 NPDC 问题的插值解 $(\alpha(z),\beta(z))$ 之间是双射, 其中 $\rho(z)$ 的零点称为谱零点.

由于阶次的限制, 此时得到的灵敏度函数有可能达不到设定的性能指标, 因此有必要引入附加插值条件:

$$S(q_i')=w_i',|q_i'|>1,i=1,2,\cdots,n_e \tag{8}$$

附加插值点的选取比较自由, 只要不影响 Pick 矩阵的正定性即可. 但是, 随着附加插值条件数目的增多, 灵敏度函数的阶数也会增加, 从而增加控制器的阶次. 所以, 在满足系统性能要求的前提下, 附加插值条件的数目越少越好.

谱零点和附加插值点对 $S(z)$ 的影响可参考文献 [28].

2.3　控制器 $C(z)$ 的阶次分析

如果存在一个 $S(z)$ 满足性能指标, 则相应的控制器 $C(z)$ 为

$$C(z)=\frac{1-S(z)}{P(z)S(z)} \tag{9}$$

控制器 $C(z)$ 的阶次是由定理 1 决定的.

定理 1. 设 $P(z)$ 是严格正则的, $S(z)$ 是满足式 (7) 和插值条件 (4) 和 (8) 的灵敏度函数, n_e 为引入的附加插值约束条件的个数, 那么控制器的阶次满足下式

$$\deg C \le \deg P - 1 + n_e \tag{10}$$

证明. 考虑如下被控对象:

$$P(z) = \frac{P_{sn}(z)P_{un}(z)}{P_{sd}(z)P_{ud}(z)} \tag{11}$$

其中, $P_{sn}(z)$, $P_{un}(z)$, $P_{sd}(z)$ 和 $P_{ud}(z)$ 分别为稳定的、不稳定的分子多项式和稳定的、不稳定的分母多项式. 若不稳定的分子多项式和分母多项式分别表示为

$$P_{un}(z) = \prod_{i=1}^{n_z}(z-z_i)^{k_i}, |z_i| \ge 1, i = 1,2,\cdots,n_z$$
$$P_{ud}(z) = \prod_{j=1}^{n_p}(z-p_j)^{m_j}, |p_j| \ge 1, j = 1,2,\cdots,n_p$$
$$k = \deg P_{un} = \sum_{i=1}^{n_z} k_i, m = \deg P_{ud} = \sum_{j=1}^{n_p} m_j$$

则 $P(z)$ 的相对阶次 r 为

$$r = \deg P_{sd} + m - \deg P_{sn} - k \tag{12}$$

此时, 可认为 $P(z)$ 在无穷远处有 r 重不稳定零点. 若定义 $z_0 = \infty$, 则相应的阶次 $k_0 = r$.

设 $S(z) = \frac{S_n(z)}{S_d(z)}$, 根据引理 1 可知, 闭环系统内稳定的条件是灵敏度函数 $S(z)$ 满足下列条件:

1) $S_d(z) - S_n(z)$ 一定在 $z = z_i$ 处有 k_i 重零点, $i = 1,2,\cdots,n_z$, 且 $\deg(S_d(z) - S_n(z)) \le s_0 - r$;

2) $S_n(z)$ 一定在 $z = p_j$ 处有 m_j 重零点, $j = 1,2,\cdots,n_p$, 其中, $s_0 = \deg S = \deg S_d = \deg S_n$.

根据 1) 和 2) 可知, 多项式 $S_d(z) - S_n(z)$ 和 $S_n(z)$ 可以分解为:

$$S_d(z) - S_n(z) = \prod_{i=1}^{n_z}(z-z_i)^{k_i} \cdot G_1(z) = P_{un}(z)G_1(z) \tag{13}$$

$$S_n(z) = \prod_{j=1}^{n_p}(z-p_j)^{m_j} \cdot G_2(z) = P_{ud}(z)G_2(z) \tag{14}$$

其中, 多项式 $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$ 的阶次满足下列条件:

$$\deg G_1 \le s_0 - r - k \tag{15}$$

$$\deg G_2 = s_0 - m \tag{16}$$

根据式 (13) 和式 (14), 则有:

$$\frac{1-S(z)}{S(z)} = \frac{(S_d - S_n)(z)}{S_n(z)} = \frac{P_{un}(z)G_1(z)}{P_{ud}(z)G_2(z)} \tag{17}$$

将式 (11) 和式 (17) 代入式 (9) 可得:

$$C(z) = \frac{P_{sd}(z)G_1(z)}{P_{sn}(z)G_2(z)} := \frac{C_n(z)}{C_d(z)}$$

根据式 (12)、式 (15) 和式 (16), 有:

$$\begin{aligned}&\deg C_d - \deg C_n = \\ &\quad \deg P_{sn} + \deg G_2 - (\deg P_{sd} + \deg G_1) \ge \\ &\quad \deg P_{sn} + (s_0 - m) - \big[\deg P_{sd} + (s_0 - r - k)\big] = \\ &\quad \deg P_{sn} - \deg P_{sd} + r + k - m = 0\end{aligned}$$

所以, $C(z)$ 是正则的. 同时,

$$\begin{aligned}&\deg C \le \deg C_d = \deg P_{sn} + s_0 - m = \\ &\quad (\deg P_{sd} + m - k - r) + s_0 - m = \\ &\quad \deg P + s_0 - k - r - m\end{aligned} \tag{18}$$

显然, 当灵敏度函数 $S(z)$ 的阶次增加时, 控制器 $C(z)$ 的阶次也会随之增加.

根据闭环系统内稳定与插值的个数的关系

$$k_0 + \sum_{i=1}^{n_z} k_i + \sum_{i=1}^{n_p} m_i = r + k + m \tag{19}$$

那么, 在 NPDC 求解过程中引入 n_e 个附加插值条件, 则 $S(z)$ 的阶次满足:

$$s_0 = \deg S \le r + k + m - 1 + n_e \tag{20}$$

由式 (18) 和式 (20) 可知,

$$\begin{aligned}&\deg C \le \deg P + s_0 - k - r - m \le \\ &\quad \deg P + (r + k + m - 1 + n_e) - k - r - m \le \\ &\quad \deg P - 1 + n_e\end{aligned}$$

□

2.4 最优化问题

引理 2 保证了灵敏度函数 $S(z)$ 的存在性, 给定 $\rho(z)$ 求解 $S(z)$ 的过程可转化为如下的最优化问题[10]:

$$\min_{\zeta \in \mathcal{Q}_+} \mathbb{J}_\rho(\zeta) \tag{21}$$

其中, $\mathbb{J}_\rho(\zeta) := \langle \zeta + \zeta^*, \varpi + \varpi^* \rangle - \langle \log(\zeta + \zeta^*), \frac{\rho\rho^*}{\tau\tau^*} \rangle$, $\zeta^*(z) := \zeta(z^{-1})$, 且两实 $\mathcal{L}_2$ 函数 l_1 和 l_2 的内积定义为 $\langle l_1, l_2 \rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} l_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) l_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta$; $\tau(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - q_j^{-1})$ 是由插值点确定的阶多项式; $\mathcal{Q}_+ := \{\zeta := \frac{\mu}{\tau}, \zeta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + \zeta(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) > 0, \forall \theta \in [-\pi, \pi]\}$, μ 是阶次为 n 的实多项式; ϖ 为在 $|z| \ge 1$ 中解析的任一实函数且满足插值条件 $\varpi(q_j) = w_j, j = 0,1,\cdots,n$.

如果求得上述优化问题的最优解 $\zeta(z)$, 则灵敏度函数 $S(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ 可通过如下的谱分解得到:

$$\zeta(z) + \zeta^*(z) = \frac{\alpha(z)\alpha(z^{-1})}{\tau(z)\tau(z^{-1})} \tag{22}$$

$$\alpha(z)\beta^*(z) + \alpha^*(z)\beta(z) = \rho(z)\rho^*(z) \tag{23}$$

如果存在唯一的最小相位多项式 $\xi(z)$ 满足

$$\zeta(z) + \zeta(z^{-1}) = \xi(z)\xi(z^{-1}), \zeta \in \mathcal{Q}_+ \tag{24}$$

且可以表示为 Cauchy 核的形式

$$\xi(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\varphi_j z}{z - \bar{q}_j^{-1}}$$

则 $\mathbb{J}_\rho(\zeta)$ 的第一项只与 M_P 有关, 而与多项式 ϖ 的选取无关.

定义 $\boldsymbol{\varphi} := [\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R} \times \mathbf{C}^n$, 从而

$$\langle \zeta + \zeta^*, \varpi + \varpi^* \rangle = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{H}} M_{\mathrm{P}} \boldsymbol{\varphi} \tag{25}$$

由式 (22) 和式 (24) 可知, 多项式 $\xi(z)$ 可定义为

$$\xi(z) := \frac{\alpha(z)}{\tau(z)} = \frac{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n}{z^n + \tau_1 z^{n-1} + \cdots + \tau_n} \tag{26}$$

定义 $\alpha(z)$ 系数向量为 $\boldsymbol{\alpha} := [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n]^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{\alpha} = L_n V \boldsymbol{\varphi} \tag{27}$$

其中,

$$V := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \bar{q}_0^{-1} & \bar{q}_1^{-1} & \cdots & \bar{q}_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_0^{-n} & \bar{q}_1^{-n} & \cdots & \bar{q}_n^{-n} \end{bmatrix}$$

$$L_n := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \tau_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \tau_n & \cdots & \tau_1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据式 (24) ∼ (27), 则式 (21) 中的 $\mathbb{J}_\rho(\zeta)$ 变为

$$\mathbb{J}_\rho(\zeta) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} K \boldsymbol{\alpha} - 2\langle \log|\alpha|, \Psi\rangle + 2\langle \log|\tau|, \Psi\rangle \tag{28}$$

其中, $\Psi := \frac{\rho\rho^*}{\tau\tau^*}$, $K := L_n^{-\mathrm{T}} V^{-\mathrm{H}} M_P V^{-1} L_n^{-1} \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. 由于式 (28) 中的最后一项为常数, 且有 $\langle \log|\alpha|, \Psi\rangle = \langle \log\alpha, \Psi\rangle$, 所以, 若定义

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} K \boldsymbol{\alpha} - 2\langle \log\alpha, \Psi\rangle \tag{29}$$

则式 (21) 的最优化问题与下述最优化问题:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{S}_n} \mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{30}$$

是等价的, 其中 $\mathcal{S}_n := \Big\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^{n+1} : \alpha(z) := \sum_{k=0}^n \alpha_k z^{n-k} \neq 0, \forall|z| \geq 1, \alpha_0 > 0\Big\}$ 为非凸的 Schur 稳定域.

下面以引理的形式给出 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})$ 的两个重要性质, 它们是应用同伦法设计鲁棒控制器的理论基础.

引理 3[18]**.** 函数 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})$ 在 $\mathcal{S}_n$ 中存在唯一解 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{sol}}$.

引理 4[18]**.** 函数 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha})$ 在全局最优解的邻域内是严格凸函数.

根据引理 3 和引理 4 可知, 式 (30) 所示的最优化问题的解可通过下式求解:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

即为非线性方程

$$K\boldsymbol{\alpha} - \langle \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\alpha}}, \Psi\rangle = \mathbf{0} \tag{31}$$

的解, 其中 $\boldsymbol{z} := [z^n, z^{n-1}, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}$. 此处的 "内积" 是指按分量逐项做内积, 即

$$\langle \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\alpha}}, \Psi\rangle := [\langle \frac{z^n}{\boldsymbol{\alpha}}, \Psi\rangle \ \langle \frac{z^{n-1}}{\boldsymbol{\alpha}}, \Psi\rangle \ \ldots \langle \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}, \Psi\rangle]^{\mathrm{T}}$$

对于式 (31) 而言, 当 $\rho = \tau$ 时, 即 $\Psi = 1$ 时, 容易获得

$$K\boldsymbol{\alpha} - \langle \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\alpha}}, 1\rangle = \mathbf{0} \tag{32}$$

的解 $\boldsymbol{\alpha}_0$. 为了方便后面的求解, 对式 (31) 中的 Ψ 进行归一化.

定义 $\tilde{\Psi}(z) := \frac{\Psi(z)}{\langle\Psi,1\rangle}$ 使得 $\langle\tilde{\Psi}, 1\rangle = 1$, 则最优化问题的解就转化为非线性方程

$$K\boldsymbol{\alpha} - \langle \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\Psi}\rangle = \mathbf{0} \tag{33}$$

的根.

若要求解形如式 (33) 所示的非线性方程, 定义如下同伦函数:

$$\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}, \lambda) := K\boldsymbol{\alpha} - \langle \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\alpha}}, \Phi(z, \lambda)\rangle \tag{34}$$

其中, $\Phi(z, \lambda) := \lambda\tilde{\Psi} + (1 - \lambda)$, 显然, 当 λ 分别等于 0 和 1 时, 相应的方程 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \mathbf{0}$ 和 $\mathbb{F}(\boldsymbol{\alpha}, 1) = \mathbf{0}$ 即为方程 (32) 和方程 (33), 所以式 (34) 具有期望的同伦.

由引理 3 和引理 4 可知, 对于任一 $\lambda \in [0, 1]$, 式 (34) 均存在唯一解. 将式 (34) 相应于 $\lambda \in [0, 1]$ 的每个解记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)$, 则 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 构成了 n 维 Euclidean 空间的一条轨迹, 称之为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的轨迹. 在应用同伦法求解 (34) 之前, 首先说明一下轨迹 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 的性质[29].

1) 当 $\lambda \in [0, 1)$ 时, 轨迹 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 是连续可微的, 而且在 $\lambda = 1$ 处是连续的;

2) 轨迹 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 在 $\lambda \in [0, 1)$ 上没有转折点 (Turning point);

3) 轨迹 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 没有分叉点 (Bifurcation).

根据 1) ∼ 3) 可知, 可以应用同伦法从 $\lambda = 0$ 处沿 $\boldsymbol{\alpha}$ 的轨迹求解. 由于轨迹 $\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\}_{\lambda=0}^1$ 是连续可微的, 因而将 $\mathbb{F}\big(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda), \lambda\big)$ 对 λ 求导可得

$$\frac{\partial\mathbb{F}\big(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda), \lambda\big)}{\partial\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\partial\mathbb{F}\big(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda), \lambda\big)}{\partial\lambda} = \mathbf{0} \tag{35}$$

令 $\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} := \frac{\partial\mathbb{F}\big(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda),\lambda\big)}{\partial\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)}$, $\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} := \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$, $\mathbb{F}_\lambda := \frac{\partial\mathbb{F}\big(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda),\lambda\big)}{\partial\lambda}$, 则式 (35) 简记为

$$\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + \mathbb{F}_\lambda = \mathbf{0} \tag{36}$$

传统的同伦法, 需要求解 $\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}$ 的逆, 从而求得:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = -\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}^{-1}\mathbb{F}_\lambda \tag{37}$$

若已知了 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(0)$ 和 $\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}$, 就可以利用 Euler 预估 -Newton 校正算法沿其同伦曲线求解 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(1)$.

本文将对上述同伦算法进行改进, 直接对 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 进行迭代求解, 避免了求解 $\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}$ 的逆. 在不引起混淆的情况下, 下面的分析中将 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 记为 $\boldsymbol{\alpha}$.

3　改进的同伦算法

3.1　变量代换

引入变量 $\hbar$, $\hbar \neq -1$ 且 $\hbar$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关. 令

$$\boldsymbol{y}(\hbar) := (1 + \hbar)\boldsymbol{x} \tag{38}$$

则

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{1 + \hbar}\boldsymbol{y}(\hbar) \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\hbar} = \boldsymbol{x} \tag{40}$$

如果 $\nu \neq 0$, 则式 (2) 等价于

$$\nu F(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \tag{41}$$

根据式 (40) 和式 (41) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\hbar}=\boldsymbol{x}-\nu F(\boldsymbol{x}) \tag{42}$$

将式 (39) 代入式 (42), 得:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\hbar}=\frac{\boldsymbol{y}}{1+\hbar}-\nu F(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hbar}\Big(\frac{\boldsymbol{y}}{1+\hbar}\Big)=-\frac{\nu}{1+\hbar}F\Big(\frac{\boldsymbol{y}}{1+\hbar}\Big) \tag{44}$$

即:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\hbar}=-\frac{\nu}{1+\hbar}F(\boldsymbol{x}) \tag{45}$$

显然, 方程 (2) 的根为方程 (45) 的不动点.

3.2 非线性方程组

由于 $\lambda\in[0,1]$, 若将 λ 分为 m 等份, 则 $\triangle\lambda=\frac{1}{m}$, 对式 (36) 进行反向有限差分可得:

$$\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_i)\frac{\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_{i-1}}{\triangle\lambda}+\mathbb{F}_{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{0} \tag{46}$$

其中, $i=1,2,\cdots,m$, $\lambda_i=i\cdot\triangle\lambda$, $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}(\lambda_i)$, $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}(0)$. 这样, 式 (46) 就是 m 个耦合的非线性矢量方程构成的方程组, 而且该方程组的解 $\boldsymbol{\alpha}(\lambda_m)$ 就是方程 (36) 的根.

根据 3.1 节中的变量代换, 可将非线性方程组 (46) 的根转化为下述非线性方程组的不动点,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_i}{\mathrm{d}\hbar}=-\frac{\nu}{1+\hbar}\big[\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_i)\frac{\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_{i-1}}{\triangle\lambda}+\mathbb{F}_{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}_i)\big],\quad i=1,2,\cdots,m \tag{47}$$

说明:

1) 由于 λ 的长度为 1, 所以当 $m=1$ 时, 非线性矢量方程组 (47) 变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}_1}{\mathrm{d}\hbar}=-\frac{\nu}{1+\hbar}\big[(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0)\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\mathbb{F}_{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}_1)\big] \tag{48}$$

方程 (48) 的解 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即为方程 (36) 的根.

2) 对比式 (47) 和式 (37) 可知, 式 (47) 的求解过程中, 只需计算 Jacobian 矩阵 $\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\mathbb{F}_{\lambda}$, 避免了 Euler 预估 -Newton 校正算法中逆矩阵的求解, 计算量明显降低, 避免了求解 $\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}}$ 的逆矩阵.

3.3 迭代法求解 $\boldsymbol{\alpha}$

将式 (47) 记为如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}:=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\hbar) \tag{49}$$

令

$$\|\boldsymbol{\alpha}_i\|:=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i}=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i\rangle} \tag{50}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}{\mathrm{d}\hbar}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i}} \tag{51}$$

其中两个 n 维向量的内积定义为

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle:=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_{i_k}\boldsymbol{\alpha}_{j_k}$$

将式 (49) 代入式 (51) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}{\mathrm{d}\hbar}=\frac{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i}} \tag{52}$$

并将式 (49) 和式 (52) 合并为一个方程组:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hbar}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ \|\boldsymbol{\alpha}_i\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \frac{\boldsymbol{f}_i}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}\\ \frac{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_i\\ \|\boldsymbol{\alpha}_i\|\end{bmatrix} \tag{53}$$

显然, 方程 (53) 与方程 (49) 有相同的解. 而且, 方程 (53) 中具有 Minkowski 结构的增广状态变量 $\boldsymbol{\Gamma}_i:=[\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}},\|\boldsymbol{\alpha}_i\|]^{\mathrm{T}}$ 满足如下锥条件:

$$\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{\Gamma}_i=0 \tag{54}$$

其中

$$Q=\begin{bmatrix}I_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times 1}\\ \boldsymbol{0}_{1\times n} & -1\end{bmatrix} \tag{55}$$

为 Minkowski 度规.

此时, 方程 (53) 可写成如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_i=A_i\boldsymbol{\Gamma}_i \tag{56}$$

其中 $A_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \frac{\boldsymbol{f}_i}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|}\\ \frac{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|} & 0\end{bmatrix}$ 满足 $A_i^{\mathrm{T}}Q+QA_i=0$, 且为群 $SO_0(n,1)$ 的一个李代数 $so(n,1)$. 利用 Padé 逼近, 由 $t=\hbar_k$ 时的 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k}$ 可得到 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k+1}$, 即:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,k+1}=G_i(k)\boldsymbol{\Gamma}_{i,k} \tag{57}$$

其中:

$$G_i(k)=\exp\big[hA_i(k)\big]=\begin{bmatrix}I+\frac{(a_{i,k}-1)}{\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|}\boldsymbol{f}_{i,k}\boldsymbol{f}_{i,k}^{\mathrm{T}} & \frac{b_{i,k}\boldsymbol{f}_{i,k}}{\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|}\\ \frac{b_{i,k}\boldsymbol{f}_{i,k}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|} & a_{i,k}-1\end{bmatrix} \tag{58}$$

$$a_{i,k}:=\cosh\Big(\frac{h\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\|}\Big),b_{i,k}:=\sinh\Big(\frac{h\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\|}\Big)$$

在每次迭代过程中, 当 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k}$ 映射至 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k+1}$ 时, 保持群的下列特性:

$$G_i^{\mathrm{T}}QG_i=Q,\det G_i=1,G_{i,11}=0$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k}$ 表示 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 在 $\hbar_k$ 处的数值, 且 $\boldsymbol{\Gamma}_{i,k}$ 满足式 (54); $G_{i,k}\in SO_0(n,1)$ 为 G_i 在 $\hbar_k$ 处的群值; $G_{i,00}$ 表示 G_i 的 00 阶分量. 对于所有的 $h>0$ 而言, 群性质保持不变. 因此, 该算法是保群算法 (Group preserving scheme).

将式 (58) 代入式 (57) 得到:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i,k+1}=\boldsymbol{\alpha}_{i,k}+\eta_{i,k}\boldsymbol{f}_{i,k} \tag{59}$$

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{i,k+1}\|=a_{i,k}\|\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\|+\frac{b_{i,k}}{\boldsymbol{f}_{i,k}}\langle\boldsymbol{f}_{i,k},\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\rangle \tag{60}$$

式中,

$$\eta_{i,k}:=\frac{b_{i,k}\|\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\|\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|+(a_{i,k}-1)\cdot\langle\boldsymbol{f}_{i,k},\boldsymbol{\alpha}_{i,k}\rangle}{\|\boldsymbol{f}_{i,k}\|^2} \tag{61}$$

显然, 上述数值迭代算法 (59) ∼ (61) 与 Euler 法完全一致, 只是其迭代步长具有自适应性, 因此, 该单步迭代算法是一阶收敛的. 根据 $\eta_{i,k}$ 的表达式 (61) 和 Schwartz 不等式可知, $\eta_{i,k} > 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_{i,k+1} = \boldsymbol{\alpha}_{i,k}$ 的等价条件是 $\boldsymbol{f}_{i,k} = 0$, 这就意味着式 (59) 与式 (49) 具有相同的平衡点.

3.4　停止准则

应用 3.3 节中的迭代算法从 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 开始迭代求解式 (47), 相应的停止准则可由下式确定:

$$\|\boldsymbol{\alpha}_{m,k+1} - \boldsymbol{\alpha}_{m,k}\| \le \varepsilon_1 \tag{62}$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示向量的 2- 范数, ε_1 是事先设定的容许误差限. 也可采用下式作为停止准则:

$$\|\mathbb{F}_{\boldsymbol{\alpha}_m} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_m + \mathbb{F}_\lambda\| \le \varepsilon_2 \tag{63}$$

其中, ε_2 是事先设定的容许误差限.

4　仿真实例

考虑文献 [30] 中的名义被控对象:

$$P(s) = \frac{-6.475s^2 + 4.0302s + 175.77}{s(5s^3 + 3.5628s^2 + 139.5021s + 0.0929)} \tag{64}$$

该文献中设计的鲁棒控制器为: $C(s) = (1.424s^7 + 9.076 \times 10^2 s^6 + 3.141 \times 10^4 s^5 + 1.117 \times 10^5 s^4 + 9.073 \times 10^5 s^3 + 1.961 \times 10^6 s^2 + 1.306 \times 10^3 s + 0.01406)/(s^8 + 1.013 \times 10^3 s^7 + 1.326 \times 10^4 s^6 + 1.129 \times 10^5 s^5 + 6.326 \times 10^5 s^4 + 2.348 \times 10^6 s^3 + 4.940 \times 10^6 s^2 + 3.440 \times 10^6 s + 3.435)$.

在应用本文提出算法求解控制器之前, 首先通过 Möbius 变换 $s = \frac{z-1}{z+1}$, 将 s 域的右半平面映射为 z 域的单位圆外, 从而得到相应的插值条件. 同时将文献 [30] 中的系统性能要求转化为 z 域的描述方式, 据此利用本文算法求得控制器的 z 域描述方式, 再利用反变换 $z = \frac{1+s}{1-s}$ 得到相应的控制器为: $C_{\rm NPDC}(s) = (12.31s^3 + 9.036s^2 + 352.2s + 0.2331)/(s^4 + 20.13s^3 + 139.3s^2 + 448.7s + 650.6)$.

在控制器 $C_{\rm NPDC}(s)$ 和 $C(s)$ 作用下, 系统的闭环阶跃响应分别如图 2 中 NPDCoutput1 和 Output1 所示, 相应的控制器输出如图 5 中 NPDCinput1 和 Input1 所示. 当名义被控对象摄动为 $P_\delta(s) = (-21.475s^2 + 4.0302s + 175.77)/(s(0.006s^4 + 5s^3 + 3.5628s^2 + 139.5021s + 0.0929))$ 时, 两控制器作用下闭环系统阶跃响应曲线如图 2 中 NPDCoutput2 和 Output2 所示, 相应的控制器输出如图 3 中 NPDCinput2 和 Input2 所示.

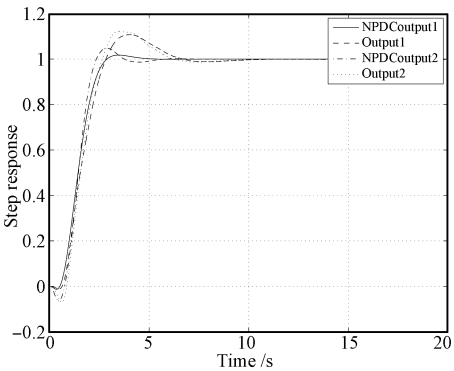

图 2　阶跃响应曲线

Fig. 2　Step response curves

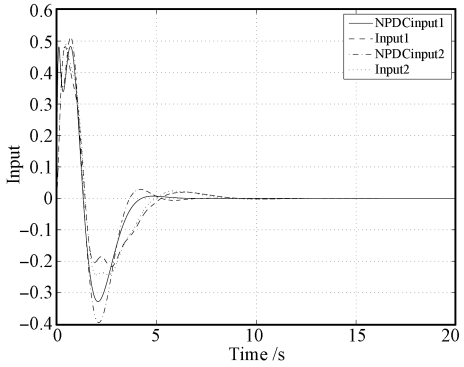

图 3　控制器输出曲线

Fig. 3　Output curves of controllers

由图 2 可以看出, 相对于 Output1 而言, NPDCoutput1 的超调小、响应速度快. 当被控对象摄动为 $P_\delta(s)$ 时, NPDCoutput2 与 Output2 的超调量都明显增加. 但是 $C_{\rm NPDC}(s)$ 表现出来的控制效果明显优于 $C(s)$ 的控制效果. 图 4 中给出了两鲁棒控制器下闭环系统的灵敏度函数的幅频特性, 分别记为 S_NPDC 和 S. 通过以上分析可以看出, 本文设计的鲁棒控制器不仅阶次低, 而且控制性能优于传统的鲁棒控制器.

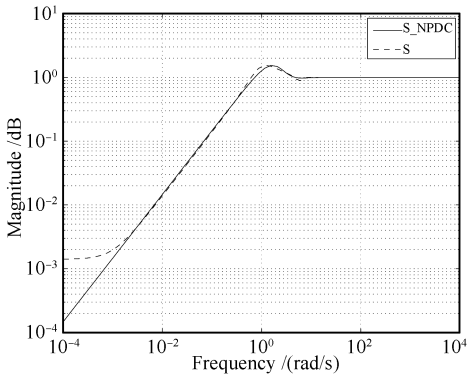

图 4　灵敏度函数的幅频特性

Fig. 4　Magnitude-frequency characteristic

5　结论

本文提出了一种改进的同伦算法, 避免了 Euler 预估 -Newton 校正过程中逆矩阵的求解. 将该算法用于求解鲁棒控制器设计过程中出现的非线性方程, 基于闭环系统的灵敏度函数设计了具有阶次限制的 H_∞ 鲁棒控制器, 并将其应用于反馈控制系统, 取得了较好的控制效果. 由仿真实验和分析结果可以看出, 与传统的鲁棒控制器相比, 基于本文方法设计的鲁棒控制器, 不仅具有较低的阶次, 而且控制性能优于传统的 H_∞ 鲁棒控制器.

References

1 Zhou K M, Doyle J C. *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1998

2 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**(4): 421−448

3 Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis D E. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. New York: Taylor and Francis, 1997

4 Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI. *Automatica*, 1996, **32**(11): 1581−1585

5 Zeng Jian-Ping, Cheng Peng. Design reduced-order controllers for a class of control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(2): 267−271
(曾建平, 程鹏. 一类控制问题的降阶控制器设计. 自动化学报, 2002, **28**(2): 267−271)

6 Watanabe T, Stoorvogel A A. Plant zero structure and further order reduction of a singular H^∞ controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002, **12**(7): 591−619

7 Xin X. Reduced-order controllers for the H_∞ control problem with unstable invariant zeros. *Automatica*, 2004, **40**(2): 319−326

8 Zhong Rui-Lin, Cheng Peng. Constructing a reduced-order H-infinity controller using stable invariant zeros. *Control Theory & Applications*, 2007, **24**(5): 707−710
(钟瑞麟, 程鹏. 利用稳定零点构造降阶 H_∞ 控制器的方法. 控制理论与应用, 2007, **24**(5): 707−710)

9 Byrnes C I, Georgiou T T, Lindquist A. Analytic interpolation with degree constraint: a constructive theory with applications to control and signal processing. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, USA: IEEE, 1999. 982−988

10 Byrnes C I, Georgiou T T, Lindquist A. A generalized entropy criterion for Nevanlinna-Pick interpolation with degree constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(6): 822−839

11 Byrnes C I, Georgiou T T, Lindquist A, Megretski A. Generalized interpolation in H^∞ with a complexity constraint. *Transactions of American Mathematical Society*, 2006, **358**(3): 965−987

12 Georgiou T T. Realization of power spectra from partial covariance sequences. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1987, **35**(4): 438−449

13 Georgiou T T. A topological approach to Nevanlinna-Pick interpolation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1987, **18**(5): 1248−1260

14 Byrnes C I, Lindquist A, Gusev S V, Matveev A S. A complete parameterization of all positive rational extensions of a covariance sequence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(11): 1841−1857

15 Byrnes C I, Gusev S V, Lindquist A. A convex optimization approach to the rational covariance extension problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, **37**(1): 211−229

16 Georgiou T T, Lindquist A. Kullback-Leibler approximation of spectral density functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, **49**(11): 2910−2917

17 Enqvist P. A homotopy approach to rational covariance extension with degree constraint. *International Journal of Applied Mathematics Computer Science*, 2001, **11**(5): 1173−1201

18 Nagamune R. A robust solver using a continuation method for Nevanlinna-Pick interpolation with degree constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(1): 113−117

19 Liu C S, Atluri S N. A novel time integration method for solving a large system of non-linear algebraic equations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2008, **31**(2): 71−84

20 Sznaier M, Rotstein H, Bu J Y, Sideris A. An exact solution to continuous-time mixed H_2/H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(11): 2095−2101

21 Arkowitz M. *Introduction to Homotopy Theory*. Berlin: Springer, 2011

22 Helton J W, Merino O. *Classical Control Using H_∞ Methods: Theory, Optimization, and Design*. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1998

23 Walsh J L. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in The Complex Domain*. New York: American Mathematical Society, 1956

24 Blomqvist A, Nagamune R. An extension of a Nevanlinna-Pick interpolation solver to cases including derivative constraints. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA: IEEE, 2002. 2552−2557

25 Delsarte P, Genin Y, Kamp Y. On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 1981, **9**(2): 177−187

26 Youla D C, Saito M. Interpolation with positive real functions. *Journal of the Franklin Institute*, 1967, **284**(2): 77−108

27 Byrnes C I, Gusev S V, Lindquist A. From finite covariance windows to modeling filters: a convex optimization approach. *SIAM Review*, 2001, **43**(4): 645−675

28 Nagamune R. Closed-loop shaping based on Nevanlinna-Pick interpolation with a degree bound. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(2): 300−305

29 Blomqvist A, Fanizza G, Nagamune R. Computation of bounded degree Nevanlinna-Pick interpolants by solving nonlinear equations. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Hawaii, USA: IEEE, 2003. 4511−4516

30 Doyle J C, Francis B, Tannenbaum A. *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990

刘 斌 东北石油大学副教授, 哈尔滨工业大学航天学院博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制. 本文通信作者.
E-mail: liuzhen8936@yahoo.com.cn
(**LIU Bin** Associate professor at Northeast Petroleum University, Ph. D. candidate at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His main research interest is robust control. Corresponding author of this paper.)

孙久强 东北石油大学硕士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制.
E-mail: 424392856@qq.com
(**SUN Jiu-Qiang** Master student at Northeast Petroleum University. His main research interest is robust control.)

翟志强 南京农业大学硕士研究生. 主要研究方向为车辆驱动系统及控制. E-mail: srtkyxz@163.com
(**ZHAI Zhi-Qiang** Master student at Nanjing Agricultural University. His research interest covers vehicle driving system and control.)

李 卓 东北石油大学讲师. 主要研究方向为信号分析.
E-mail: yifeiyang19800@yahoo.com.cn
(**LI Zhuo** Lecturer at Northeast Petroleum University. Her main research interest is signal processing.)

王常虹 哈尔滨工业大学教授. 主要研究方向为鲁棒控制与运动控制.
E-mail: cwang@hit.edu.cn
(**WANG Chang-Hong** Professor in Harbin Institute of Technology. His research interest covers robust control and motion control.)