基于图像欧氏距离的二维局部多样性保持投影

高全学 [1] 高菲菲 [1] 郝秀娟 [1] 程 洁 [1]

摘 要 主成分分析可以较好地保持数据的全局多样性几何属性, 在模式识别、机器学习、图像识别等领域有着很重要的作用. 缺点是他不能较好地保持局部数据的多样性几何属性, 且忽略了图像像素之间的相互关系, 导致算法性能不够好, 且对模式形变比较敏感. 对此问题, 提出了一种基于图像欧氏距离的二维局部多样性保持投影. 该方法利用邻接图描述局部数据之间的变化关系, 然后利用图像欧氏距离度量数据间的多样性几何属性, 有效地将图像像素之间的相互关系嵌入到目标函数中. 和主成分分析相比, 所提方法较好地保持了局部数据的多样性几何属性, 而且明确考虑了图像像素之间的相互关系, 对模式形变具有好的鲁棒性. 在 Yale, AR 及 PIE 三个人脸库上的实验结果证明了所提算法的有效性.

关键词 二维主成分分析, 多样性, 流形学习, 特征提取, 人脸识别

引用格式 高全学, 高菲菲, 郝秀娟, 程洁. 基于图像欧氏距离的二维局部多样性保持投影. 自动化学报, 2013, **39**(7): 1062−1070

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01062

Image Euclidean Distance-based Two-dimensional Local Diversity Preserving Projection

GAO Quan-Xue[1] GAO Fei-Fei[1] HAO Xiu-Juan[1] CHENG Jie[1]

Abstract Previous works have demonstrated that principal component analysis (PCA) well preserves the global information, i.e., diversity of data, and plays an important role in pattern recognition, machine learning, and image processing. However, PCA ignores the spatial relationships among pixels in images and does not well preserve the local diversity of data, which will impair the recognition accuracy and lead to unstableness to the perturbation of images. To address these problems, a novel approach, namely image Euclidean distance based two-dimensional local diversity preserving projection (IED-2DLDPP) is proposed. IED-2DLDPP constructs an adjacency graph to model the variation of data and employs image Euclidean distance to characterize the diversity of data, which explicitly considers the spatial relationships among pixels in the images. Extensive experiments on Yale, AR, and PIE databases show the efficiency of the proposed method.

Key words Two-dimensional principal component analysis (2DPCA), diversity, manifold learning, feature extraction, face recognition

Citation Gao Quan-Xue, Gao Fei-Fei, Hao Xiu-Juan, Cheng Jie. Image Euclidean distance-based two-dimensional local diversity preserving projection. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 1062−1070

随着信息采集技术、传感器技术和计算机技术的迅速发展, 人们在各个领域获取的数据的维数越来越高, 数据结构也越来越复杂, 且未知. 因此, 如何有效地描述数据, 方便后续分析已成为急需要解决的基础问题之一. 降维是一种有效的解决方案, 目的是在某种准则下, 将高维数据映射到低维空间, 进一步提高分析数据的性能和挖掘出隐藏在数据空间的内在几何结构. 其中, 主成分分析 (Principal component analysis, PCA) 和线性判别分析 (Linear discriminant analysis, LDA) 是两种经典的降维技术[1−2], 已被广泛地应用到人脸识别、医学图像处理、数据挖掘和图像检索等领域. LDA 是一种有监督的降维技术. 目的是寻找投影方向, 使得投影后的数据满足类间离散度最大同时类内离散度最小[2]. 与 LDA 不同, PCA[2] 是基于最小均方误差的无监督降维技术, 目的是寻找投影方向, 使得数据在该投影方向上的方差最大. PCA 主要刻画了数

收稿日期 2012-06-07 录用日期 2013-01-06
Manuscript received June 7, 2012; accepted January 6, 2013
国家自然科学基金 (61271296, 60802075), 陕西省自然科学基础研究计划 (2012JM8002), 浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室开放课题 (A1106), 中国博士后基金 (2012M521747), 高等学校学科创新引智计划 (B08038), 中央基本科研业务费, 西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室自主研究课题资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61271296, 60802075), Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China (2012JM8002), the Open Project Program of the State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University (A1106), China Postdoctoral Science Foundation (2012M521747), 111 Project of China (B08038), Fundamental Research Funds for the Central Universities of China, and the State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University
本文责任编委 章毓晋
Recommended by Associate Editor ZHANG Yu-Jin
1. 西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室 西安 710071
1. The State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi′an 710071

据的全局多样性几何属性. 利用 PCA 和 LDA 分析数据, 如人脸图像, Turk 等[3] 和 Belhumeur 等[4] 分别提出了特征脸算法和 Fisher 脸算法, 取得了不错的效果. 受此启发, 人们提出了许多改进算法来进一步提高 PCA 和 LDA 在实际分析中的性能[5−8]. 然而, PCA 和 LDA 仅保持了数据的全局欧氏几何结构, 对线性可分的数据分析具有好的性能. 研究表明[9−11], 实际获取的数据尤其是图像数据分布在非线性流形面上, 是线性不可分的, 使得基于 PCA 和 LDA 的降维方法不能有效地提取出隐藏在高维空间的内在几何结构, 而且削弱甚至破坏了对模式分析非常重要的局部几何结构, 导致性能不够好. 为了有效地挖掘出隐藏在高维数据空间的内在几何结构, 人们提出了很多有效方法, 其中核学习和流形学习是两种经典的统计降维技术, 已成为模式识别和机器学习领域的研究热点. 学习的思想是通过核函数将数据映射到更高维的隐特征空间, 使得数据线性可分, 然后在隐特征空间利用线性技术实现降维[12−13]. 但是核学习是如何保持数据的空间几何结构尤其是局部空间几何结构, 并不清楚, 且计算较复杂.

与核学习不同, 流形学习利用邻接图比较直观地描述了数据的空间几何关系, 已成为目前非常活跃的研究方向之一[14−18]. 局部保持投影 (Locality preserving projection, LPP)[14] 和邻域保持嵌入 (Neighborhood preserving embedding, NPE)[15] 是两种典型代表, 用于寻找投影方向, 使得邻域内相距比较近的点, 投影后仍然相距较近, 较好地保持了数据的局部几何结构. 理想情况下, 邻域内的数据都投影到一个点. 显然, 这两种方法仅考虑了数据的相似性几何属性, 忽略了邻域数据之间的变化, 即多样性. 此外, LPP 和 NPE 都是通过最小化距离函数来保持数据的局部几何结构, 导致距离比较大的点在目标函数中起主导作用, 因此不能保证邻域内相距越远的点, 投影后相距也较远, 破坏了数据的多样性几何属性和局部拓扑几何属性. PCA 虽然较好地保持了数据的多样性几何属性, 但主要刻画了数据的全局欧氏几何结构, 当数据线性不可分时, 全局欧氏几何结构削弱甚至破坏了对数据分析很重要的局部几何结构, 导致性能不够好. 此外, PCA 利用欧氏距离度量数据的多样性时, 忽略了图像像素之间的相互关系, 使得模式形变发生变化时, 同类图像间的欧氏几何距离比较大, 而不同类图像之间的欧氏几何距离比较小, 导致算法对形变比较敏感. 从 Yale 数据库随机选择三个近邻图像, 如图 1 所示, 其中 (a) 和 (b) 属于同一个人不同装饰下的图像, (c) 属于另外一个人的图像. 计算欧氏几何距离有: (a) 和 (b) 之间的距离为 $d_E(a,b)=1\,745$, (a) 和 (c) 之间的距离为 $d_E(a,c)=1\,642$. 显然, (a) 和 (c) 之间的欧氏几何距离比较小, 但他们属于不同类, 容易导致分类错误. 最后, 利用 PCA 分析图像数据时, 需要将图像矩阵转换成图像向量, 导致计算量比较大, 而且样本比较少时, 性能不够好[5−6].

图 1　相似和不相似图像

Fig. 1　The similar and unsimilar images

受 LPP[14]、2DLPP (Two-dimensional locality preserving projection)[19] 以及文献 [6, 20−22] 的启发, 提出了一种基于图像欧氏距离的二维局部多样性保持投影 (Image Euclidean distance based two-dimensional local diversity preserving projection, IED-2DLDPP). 该方法利用邻接图描述局部数据之间的变化关系, 然后利用图像欧氏距离度量数据间的多样性几何属性, 有效地将图像像素之间的相互关系嵌入目标函数中. 在 AR、PIE 以及 Yale 数据库上的实验结果证实了所提算法的有效性.

1　Two-dimensional principal component analysis (2DPCA)

2DPCA 是 PCA 的推广, 直接从图像矩阵估计图像的总体离散度矩阵, 较好地保持了数据的全局多样性几何属性. 给定 N 个训练图像 $X_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $i=1,2,\cdots,N$, 2DPCA 的目标函数为[5−6]

$$\boldsymbol{\alpha}^*=\arg\max_{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1}\frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(X_i-\overline{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(X_i-\overline{X}\right)\right)\boldsymbol{\alpha} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 为投影方向, $\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i$ 为样本的均值.

通过简单的代数变换有:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(X_i-\overline{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(X_i-\overline{X}\right)\right)\boldsymbol{\alpha}=\\&\frac{1}{N}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^{\mathrm{T}}X_i-X_i^{\mathrm{T}}\overline{X}-\overline{X}^{\mathrm{T}}X_i+\right.\right.\\&\left.\left.\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{X}\right)\right)\boldsymbol{\alpha}=\\&\frac{1}{2N^2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i^{\mathrm{T}}X_i+\sum_{j=1}^{N}X_j^{\mathrm{T}}X_j-\right.\end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} X_i^{\mathrm{T}} X_j - \sum_{i,j=1}^{N} X_j^{\mathrm{T}} X_j \Bigg) \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2N^2} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \left(X_i - X_j\right)^{\mathrm{T}} \left(X_i - X_j\right) \boldsymbol{\alpha} \right)$$

结合式 (1) 和式 (2) 知, 2DPCA 较好地刻画了全局数据之间的变化, 即保持了数据的全局多样性几何属性. 式 (1) 的最佳投影方向 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是离散度矩阵 $G_t = \sum_{i=1}^{N}(X_i - X_j)^{\mathrm{T}}(X_i - X_j)$ 的最大特征值对应的特征向量. 令 $W \in \mathbf{R}^{n\times d}\,(d \ll n)$ 表示投影矩阵, 则 W 的列向量是由 G_t 的前 d 个较大特征值对应的特征向量组成. 这表明, 最优投影依赖于离散度矩阵的估计, 由于离散度矩阵是由样本之间的欧氏几何距离决定的, 使得相距较远的点在目标函数中起主导作用, 而相距较近的点在目标函数中的作用就越小, 甚至可以忽略不计. 因此, 2DPCA 不能较好地刻画出邻域数据间的多样性几何属性. 此外, 利用欧氏几何距离度量图像之间的多样性几何属性, 意味着图像中所有像素都是相互独立的, 与实际不符, 容易导致 2DPCA 对模式形变比较敏感.

2 IED-2DLDPP

2DLPP[19] 是 LPP 的推广, 是一种典型的基于图像矩阵的局部几何结构保持方法, 主要刻画了邻域数据间的相似性几何属性, 且相距比较远的点在目标函数中起到主导作用, 因此不能保证邻域内相距较远的点, 投影后仍然相距较远, 破坏了数据的多样性几何属性和局部拓扑几何结构. 受 2DLPP 和 2DPCA[5−6] 的启发, 提出了一种基于图像欧氏几何距离的二维局部多样性保持投影.

2.1 多样性保持投影

给定训练图像矩阵 $X^{\mathrm{T}} = [X_1^{\mathrm{T}}, X_2^{\mathrm{T}}, \cdots, X_N^{\mathrm{T}}]$, 其中矩阵 $X_i \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 代表第 i 个训练图像, N 为训练图像个数. 受流形学习技术的启发[18, 20], 图像之间的变化关系可用邻接图 $G_d = \{Z, B\}$ 来描述, 其中 $Z = \{{X_i}^N\}_{i=1}$ 代表顶点集, 权重矩阵 $B \in \mathbf{R}^{N\times N}$ 刻画了邻接图中顶点之间的变化大小.

多样性刻画了模式的不同几何属性, 而相似性刻画了模式相似几何属性. 如果数据分布的比较紧凑, 则这些数据更多的反映了模式的相似性几何属性. 相反, 如果数据分布得比较稀疏, 则这些数据更多地反映了模式的不同属性, 即多样性几何属性. 如图 2 所示, 三角形点与其 3 邻域点分布相对比较稀疏, 刻画了模式更多的多样性几何属性, 而正方形点与其 3 邻域点分布比较紧凑, 更多刻画了模式的相似几何属性. 为了更好地保持局部数据的多样性几何属性, 应该使邻域内相距较远的点, 投影后也相距较远. 如果这些点投影后变得很近, 则应该给较大的惩罚权值. 因此权重矩阵 B 中的元素 B_{ij} 定义如下:

$$B_{ij} = \begin{cases} \exp(-t/\|X_i - X_j\|_{\mathrm{F}}^2), & X_j \in \Omega_{X_i}^k \text{或} \\ & X_i \in \Omega_{X_j}^k \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\Omega_{X_i}^k$ 代表 X_i 的 k 邻域点集, $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 表示矩阵的 F 范数, t 是一个大于零的参数.

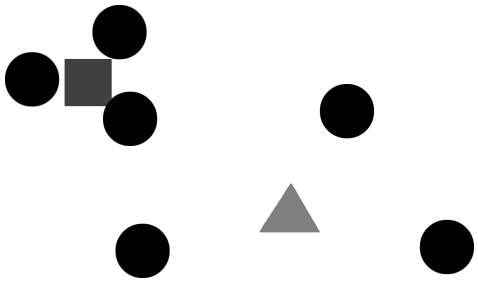


图 2 二维数据点

Fig. 2 The two-dimensional points

如上所述, 为了更好地保持邻域内数据之间的多样性几何属性, 必须保证邻域内相距较远的点, 投影后仍然相距较远. 则一个比较合理的目标函数是:

$$\arg\max \operatorname{tr}\left(\sum_{i,i=1}^{N} B_{ij} \left(Y_i - Y_j\right) \left(Y_i - Y_j\right)^{\mathrm{T}} \right) \tag{4}$$

其中 Y_i 代表图像 $X_i\,(i = 1, \cdots, N)$ 的低维描述.

如果样本 X_i 和 X_j 在高维数据空间相距比较远, 但投影后的 Y_i 和 Y_j 相距比较近, 即 $\|Y_i - Y_j\|_{\mathrm{F}}^2$ 比较小, 则式 (4) 中的加权系数 B_{ij} 提供一个大的惩罚因子. 因此, 最大化目标函数 (4) 的目的是, 如果 X_i 和 X_j 之间的变化比较大, 则对应的低维描述 Y_i 和 Y_j 之间的变化也比较大. 因此, 式 (4) 较好地保持了数据的局部多样性几何属性. 然而, 式 (4) 利用欧氏几何距离度量数据之间的变化时, 忽略了图像像素之间的相互关系, 导致算法对形变比较敏感, 使得邻域内不同类图像之间的距离可能小于同类图像之间的距离, 破坏了局部判别信息. 受文献 [23] 启发, 利用图像欧氏距离代替传统的欧氏距离度量图像数据之间的变化, 可有效地将图像像素之间的相互关系嵌入到目标函数中.

2.2 图像欧氏距离

定义 1 (图像欧氏距离)[23−24]**.** 给定两个 $m \times n$ 的图像 X_i 和 X_j, $Vec(X_i)$ 和 $Vec(X_j)$ 分别表示 X_i 和 X_j 的向量形式, 即 $Vec(X_i) = (x_i^1, x_i^2, \cdots, x_i^{mn})$, $Vec(X_j) = (x_j^1, x_j^2, \cdots, x_j^{mn})$. 则 X_i 和 X_j

之间的图像欧氏距离为

$$d_{IED}(X_i, X_j) = (Vec(X_i) - Vec(X_j))^{\mathrm{T}} G (Vec(X_i) - Vec(X_j)) \tag{5}$$

其中, 对称矩阵 $G \in \mathbf{R}^{LL\times LL}$ $(LL = m \times n)$ 刻画了像素之间的相互关系, 定义如下:

$$G_{ii,jj} = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-[(p-p')^2 + (q-q')^2]/2\right) \tag{6}$$

其中, $ii = (p-1)n + q, jj = (p'-1)n + q', p, p' = 1, 2, \cdots, m, q, q' = 1, 2, \cdots, n$.

在实际应用中, 图像的维数比较大, 使得矩阵 G 的维数很大, 比如对 112×92 的人脸图像, 矩阵 G 的大小为 $10\,304 \times 10\,304$, 导致计算很复杂, 甚至内存溢出. 为了有效地降低计算复杂度, 利用下面的定理 1, 给出了快速实现图像欧氏距离的矩阵表达形式.

定理 1[25]**.** 已知矩阵 B_1, B_2 和 H 的大小分别为 $m \times p$, $n \times q$ 和 $p \times q$, 假定 $\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 代表矩阵 H 的第 i 行, 且 $Vec(H) = \left[\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{h}_p^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$. 令向量 $\boldsymbol{z}$ 代表矩阵 Z 按行展开的向量形式, 如果 $\boldsymbol{z} = Vec(Z) = (B_1 \otimes B_2)Vec(H)$, $\otimes$ 表示 Kronecher 积. 则有:

$$Z = B_1 H B_2^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

根据定理 1, 有下面推论成立.

推论 1 (图像欧氏距离的矩阵形式). 给定两个 $m \times n$ 的图像 X_i 和 X_j, 则图像欧氏距离的矩阵表达形式是

$$d_{IED}(X_j, X_l) = \|(\hat{X}_j - \hat{X}_l)\|_{\mathrm{F}} \tag{8}$$

其中,

$$\hat{X}_j = G_1^{\frac{1}{2}} X_j (G_2^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

对称矩阵 $G_1 \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 和 $G_2 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 分别定义如下:

$$G_1(p, p') = \left(\tfrac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{(p-p')^2}{2}\right\}, \quad p, p' = 1, \cdots, m \tag{10}$$

$$G_2(q, q') = \left(\tfrac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{(q-q')^2}{2}\right\}, \quad q, q' = 1, \cdots, n \tag{11}$$

证明. 见附录. □

2.3 目标函数

如上所述, 图像欧氏距离很好地考虑了图像像素之间的相互信息, 为了更好地将图像像素之间的相互信息嵌入到式 (4) 的目标函数中, 一个合理的方案是用图像欧氏距离代替传统的欧氏距离, 即用式 (8) 代替式 (4) 中的欧氏距离. 假定 $\hat{Y}_j$ 代表 $\hat{X}_j$ 的低维描述, 其中 $\hat{X}_j$ 是样本 X_j 通过式 (9) 变换后得到的, 则基于图像欧氏距离的多样性保持投影的目标函数是

$$\arg\max \operatorname{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j)(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j)^{\mathrm{T}}\right) \tag{12}$$

假定 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^n$ 代表投影方向, 把 $\hat{\boldsymbol{y}}_i = \hat{X}_i\boldsymbol{\omega}$ 代入式 (12), 有:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j)(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j)^{\mathrm{T}}\right) = \\
&\sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{y}}_i - \hat{\boldsymbol{y}}_j) = \\
&\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\hat{X}_i - \hat{X}_j)^{\mathrm{T}}(\hat{X}_i - \hat{X}_j)\right]\boldsymbol{\omega} = \\
&2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{X}_i\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\right) - \right. \\
&\left.\sum_{i=1}^{N}\hat{X}_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{N} B_{ij}\hat{X}_j\right)\right]\boldsymbol{\omega} = \\
&2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left[\hat{X}^{\mathrm{T}}(D \otimes I_m)\hat{X} - \hat{X}^{\mathrm{T}}(B \otimes I_m)\hat{X}\right]\boldsymbol{\omega} = \\
&2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{X}^{\mathrm{T}}(L_d \otimes I_m)\hat{X}\boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{13}$$

其中, $\hat{X}^{\mathrm{T}} = [\hat{X}_1^{\mathrm{T}}, \hat{X}_2^{\mathrm{T}}, \hat{X}_3^{\mathrm{T}}, \cdots, \hat{X}_N^{\mathrm{T}}]$, $L_d = D - B$(为了避免与 LPP 中的 L 冲突, 称 L_d 为差异 Laplacian 矩阵). D 为对角阵, 其对角线上的元素为矩阵 B 对应列 (或行) 元素之和, 即 $D_{ii} = \sum_j B_{ij} \mathrm{or} \sum_j B_{ji}$, I_m 是一个 $m \times m$ 的单位阵.

将式 (13) 代入式 (12), 则 IED-2DLDPP 的目标函数可写成:

$$\boldsymbol{\omega} = \arg\max_{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}=1}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}G_p\boldsymbol{\omega}) \tag{14}$$

其中 $G_p = \hat{X}^{\mathrm{T}}(L_d \otimes I_m)\hat{X}$ 称为训练图像的局部多样性离散度矩阵.

式 (14) 的最优投影方向 $\boldsymbol{\omega}$ 为局部多样性离散度矩阵 G_p 的最大特征值对应的特征向量, 即

$$G_p\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega} \tag{15}$$

其中 λ 为 G_p 对应于特征向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的特征值. 在实际应用中, 通常需要 l ($l \geq 2$) 个投影方向, 令 $W = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_l]$ 表示最优投影矩阵, 则 W 的列向量是由 G_p 的前 l 个较大特征值对应的特征向量组成.

2.4 特征提取及分类

特征提取是将图像投影到由矩阵 W 的列向量张成的空间. 给定任意一个图像 $X_i \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 则对应的低维描述 $Y_i \in \mathbf{R}^{m\times l}$ 为

$$Y_i = X_i W, \qquad i = 1, \cdots, N \tag{16}$$

类似地, 测试图像 X^* 的低维描述 Y^* 可以通过式 (16) 获得.

分类是根据低维描述 Y_i 和 Y^* 之间的相似度来实现. Y_i 和 Y^* 之间的相似度定义如下:

$$d(Y_i, Y^*) = \sum_{k=1}^{l} \|\boldsymbol{y}_k^{(i)} - \boldsymbol{y}_k^{(*)}\|_2 \tag{17}$$

其中, $\boldsymbol{y}_k^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{y}_k^{(*)}$ 分别代表 Y_i 和 Y^* 的第 k 列, $\|\cdot\|_2$ 代表向量的 2 范数. 为简单起见, 选用最近邻分类器进行分类, 即如果 $d(Y_k, Y^*) = \min_i\{d(Y_i, Y^*)\}$, 则测试图像 X^* 与训练图像 X_k 属于同一类.

2.5 IED-2DLDPP 算法步骤

总结上述分析, IED-2DLDPP 算法总结如下:

步骤 1. 建立邻接图 $G_d = \{Z, B\}$. $Z = \{X_i^N\}_{i=1}$ 代表邻接图的顶点集, 矩阵 B 度量了顶点之间的变化. 如果第 j 个顶点 X_j 在第 i 个顶点 X_i 的 k 邻域内, 或者第 i 个顶点 X_i 在第 j 个顶点 X_j 的 k 邻域内, 则顶点 i 和 j 连接起来. 除此外, 还可以利用邻域半径来构造邻接图, 即如果 $\|X_i - X_j\|_{\mathrm{F}} < \varepsilon$ (ε 是足够小的正数), 则将顶点 i 和 j 连接起来.

步骤 2. 计算邻接图 G_d 中的权重矩阵 B. 矩阵 B 的元素 B_{ij} 度量了顶点 i 和 j 之间的变化关系, 即顶点 i 和 j 间的权重, 当顶点 i 和 j 没有连接时, 值为 0; 否则, 按照式 (3) 计算.

步骤 3. 计算图像的转换矩阵 $\hat{X}$. 根据式 (9)、式 (10) 和式 (11) 计算图像 X_j 的变换矩阵 $\hat{X}_j$, 则训练图像的转换矩阵为 $\hat{X}^{\mathrm{T}} = [\hat{X}_1^{\mathrm{T}}, \hat{X}_2^{\mathrm{T}}, \hat{X}_3^{\mathrm{T}}, \cdots, \hat{X}_N^{\mathrm{T}}]$.

步骤 4. 计算投影矩阵 W. 令 $\boldsymbol{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \cdots, l$) 是 $\hat{X}^{\mathrm{T}}(L_d \otimes I_m)\hat{X}$ 的前 l 个较大特征值对应的特征向量, 其中 L_d 由式 (13) 计算, I_m 是一个 $m \times m$ 的单位阵. 则投影矩阵为 $W = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_N]$.

步骤 5. 提取特征. 将训练图像 X_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) 和测试图像 X^* 利用式 (16) 投影到 W 张成的子空间, 得到低维描述 Y_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) 和 Y^*.

步骤 6. 分类. 利用式 (17) 度量 Y_i 和 Y^* 的相似度, 然后采用最近邻分类器实现分类.

3 实验分析

实验分别选择 Yale、AR 和 PIE 数据库来评价 IED-2DLDPP 的性能, 并和经典的二维降维方法 2DPCA[5]、2DLDA[8]、2DLPP[19]、2DNPE[16] 以及 2DMFA[1] 进行对比和分析.

Yale 数据库 (http: //cvc.yale.edu/projects/yalefaces/yalefaces.html) 由 15 个人组成, 共 165 幅灰度图像. 每个人含有不同光照、表情、姿态等共 11 张图像. 实验中, 每张图片通过手动裁剪扣取面部图像, 并归一化成 32×32[14]. 然后分别选取每个人的前 3、6、9 张图像用于训练, 相应的剩余图像构成测试图库. 则三个训练图库分别包含 45、90 和 135 个图像, 对应的三个测试图库分别包含 120、75 和 30 个图像.

PIE 数据库包含 68 个人的 41 368 幅人脸图像, 这些图像是由 13 个同步摄像机在 21 个闪光灯下拍摄的, 包含了姿势、光照以及表情的变化. 实验选择 Pose29 作为图像库, 其中, 每个人含有不同光照下的 24 幅图像, 且每幅图像通过手动裁剪扣取面部图像, 并归一化成 64×64[14]. 实验选择每个人的前 12 张图像进行训练, 其余图像用于测试, 即训练图库和测试图库都包含 816 个图像.

AR 人脸数据库 (The AR face database, http://rvl1.ecn.purdue.edu/~ aleix/aleix_face_DB.html) 包括 120 个人, 共 3 120 张图像, 其中每个人含有在不同光照、表情、遮挡和时间下采集的 26 张图像. 其中前 13 和后 13 分别由不同时期采集, 前后间隔为 1 个月. 实验通过手动裁剪扣取每张图像的面部图像, 并归一化成大小为 50×40[5]. 选取每个人的前 7 张图像作为训练样本, 第二时期对应的 7 张人脸图像作为测试样本.

在上述数据库上, 实验分别利用 2DPCA、2DLDA、2DLPP、2DNPE、2DMFA 以及 IED-2DLDPP 提取低维子空间 (最优投影), 然后选用最近邻分类器进行分类. 需要说明的是, 在 2DLPP、2DNPE、2DMFA 和 IED-2DLDPP 中, 都涉及参数选择问题, 为了更好地评价几种算法的性能, 实验在 $[0, +\infty)$ 区间选择参数 t, 选择出各自算法对应的最佳识别率. 表 1～3 分别给出了六种算法在 Yale、AR 和 PIE 数据库上的最高识别率和对应的特征维数. 图 3 和图 4 分别给出了六种算法在 Yale 和 AR 数据库上的识别率与投影方向个数的变化曲线; 图 5 给出了六种算法在 PIE 数据库上的识别率与投影方向个数的变化曲线. 分析表 1～3 和图 3～5 有:

表 1　六种算法在 Yale 库上的识别率 (%) 及相应的特征维数

Table 1　The top recognition accuracy of six methods (%) and corresponding number of features in Yale database

训练/测试样本数	2DPCA	2DLPP	2DNPE	2DLDA	2DMFA	IED-2DLDPP
45/120	61.67 (32*4)	65.00 (32*4)	61.67 (32*2)	56.67 (32*7)	52.5 (32*3)	71.67 (32*2)
90/75	68.00 (32*1)	77.33 (32*2)	73.33 (32*2)	73.33 (32*4)	74.67 (32*2)	80.00 (32*2)
135/30	86.67 (32*3)	96.67 (32*2)	93.33 (32*4)	86.67 (32*3)	93.33 (32*3)	100.00 (32*4)

表 2　六种算法在 AR 库上的识别率 (%) 及相应的特征维数

Table 2　The top recognition accuracy of six methods (%) and corresponding number of features in AR database

算法	2DPCA	2DLPP	2DNPE	2DLDA	2DMFA	IED-2DLDPP
识别率	67.74	66.43	65.24	58.57	62.15	70.00
特征维数	50*13	50*12	50*16	50*26	50*16	50*12

表 3　六种算法在 PIE 库上的识别率 (%) 及相应的特征维数

Table 3　The top recognition accuracy of six methods (%) and corresponding number of features in PIE database

算法	2DPCA	2DLPP	2DNPE	2DLDA	2DMFA	IED-2DLDPP
识别率	81.62	87.87	74.88	65.93	71.08	89.34
特征维数	64*13	64*21	64*8	64*47	64*22	64*35

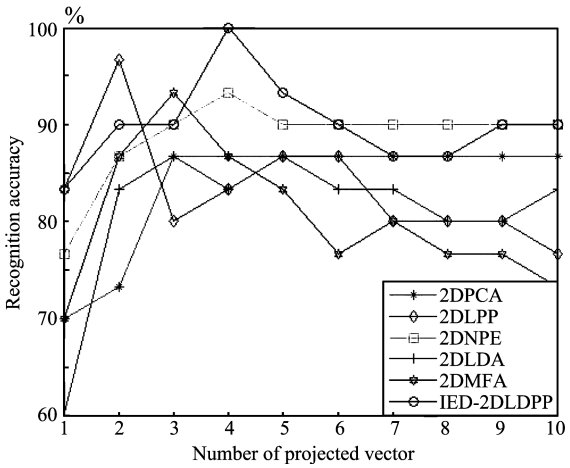


图 3　六种算法在 Yale 库上的识别曲线

Fig. 3　The curves of recognition accuracy of six methods in Yale database

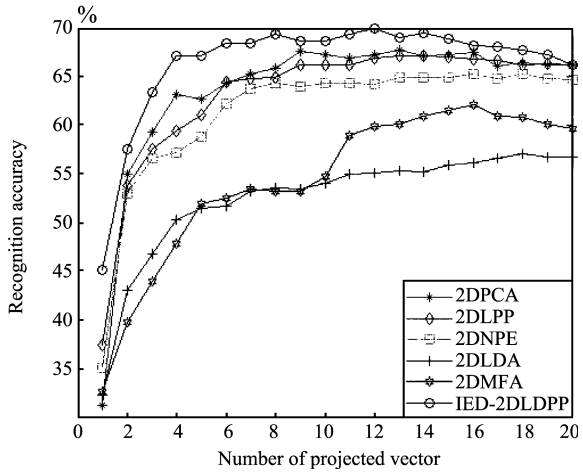


图 4　六种算法在 AR 库上的识别曲线

Fig. 4　The curves of recognition accuracy of six methods in AR database

1) IED-2DLDPP 的识别率明显比 2DPCA 的识别率高, 其中在 Yale 数据上提高至少 10 个百分点, 在 PIE 数据库上提高至少 7 个百分点, 在 AR 数据库上提高将近 2 个百分点. 主要原因可能是表情、姿势和时间的变化, 导致人脸图像线性不可分, 因此 2DPCA 保持的全局欧氏几何结构不能较好地反映数据的内在几何结构; 此外全局欧氏几何结构削弱甚至破坏了对分类重要的局部几何结构. 不同的是, IED-2DLDPP 利用邻接图有效地描述了邻域数据间的变化关系, 刻画了局部数据的多样性几何属性, 而且考虑了图像像素之间的相互关系, 提高了对形变的鲁棒性.

2) IED-2DLDPP 的识别率优于 2DLDA. 这主要因为人脸图像的非线性分布, 使得 2DLDA 保持的全局欧氏几何结构不能较好地反映数据的局部内在几何结构; 另外一个原因可能是 2DLDA 在最小化类内离散度时, 虽然有效地保持了同类数据间的相似性几何属性, 但忽略了同类样本间的变化, 即多样性几何属性, 导致 2DLDA 容易发生过学习. 此外, 2DLDA 通过最大化类间距离提取判别信息时, 不能较好地提取出嵌入在邻域内不同类数据之间的判别信息, 导致算法性能不好. IED-2DLDPP 虽然是无监督特征提取方法, 但图像欧氏距离考虑了图像像素间的相互关系, 有利于增加邻域内不同类图

像之间的距离, 同时减小邻域内同类样本之间的距离, 使得 IED-2DLDPP 较好地提取出了局部判别信息.

3) IED-2DLDPP 优于二维流形学习算法 2DMFA、2DLPP 和 2DNPE. 这主要是因为 2DLPP 和 2DNPE 仅保持了数据的相似性几何属性, 忽略了数据之间的多样性几何属性, 导致算法存在过学习; 此外, 他们忽略了邻域内不同类数据之间的判别信息. 2DMFA 虽然可以较好地提取出邻域内不同类数据之间的判别信息, 但忽略了邻域内类数据之间的多样性几何属性, 导致几何结构描述不稳定. 如上所述, IED-2DLDPP 不仅较好地保持了邻域内数据之间的多样性几何属性, 而且可较好地提取出邻域内不同类数据之间的判别信息.

4) 对比图 3～5 知, 在相同投影向量个数下, IED-2DLDPP 的识别率总体上比 2DPCA 好, 表明, 和 2DPCA 相比, IED-2DLDPP 对表情、姿势以及时间变化具有较好的鲁棒性. IED-2DLDPP 的性能最好, 表明数据的局部多样性几何属性对模式分析同样具有重要的作用.

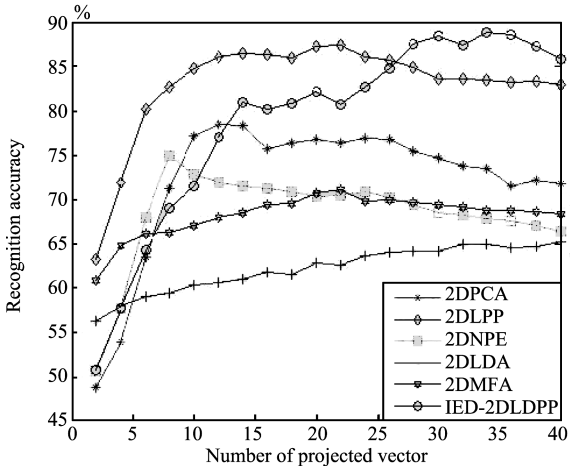


图 5 六种算法在 PIE 库上的识别曲线

Fig. 5 The curves of recognition accuracy of six methods in PIE database

5) IED-2DLDPP 虽然和经典的二维流形学习算法 2DLPP 在形式上非常类似, 目的都是保持数据的局部几何结构, 但本质上他们完全不同. 2DLPP 利用最小化距离目标函数, 使得邻域内数据点投影后仍然相距较近, 在理想情况下, 邻域内所有点都投影成一个点, 因此 2DLPP 仅刻画了数据的相似几何属性, 忽略了数据的多样性几何属性. 与 2DLPP 不同, IED-2DLDPP 利用最大化距离目标函数, 使得邻域内相距相对比较远的点, 投影后仍然相距比较远. 因此 IED-2DLDPP 较好地保持了数据的多样性几何属性. 另外一个优点是 IED-2DLDPP 利用图像欧氏距离代替传统的欧氏距离, 较好地考虑了图像像素之间的相互关系, 使得几何结构描述对模式形变具有好的鲁棒性;

4 结论

本文提出了一种新的基于图像欧氏距离的二维局部多样性保持投影 (IED-2DLDPP), 该方法有效地保持了邻域数据间的多样性几何属性, 且考虑了图像像素间的相互关系, 有利于增加邻域内不同类图像之间的距离, 同时减小邻域内同类图像之间的距离, 可较好地挖掘出局部判别信息, 同时也较好地保持了局部数据的多样性几何属性. 此外, 所提方法避免了将图像矩阵转换成向量, 有效地避免了小样本问题. 在 Yale、AR 和 PIE 数据库上的实验结果证实了所提方法的有效性.

IED-2DLDPP 主要保持了局部数据间的多样性, 忽略了非局部数据间的相互关系, 而非局部数据之间的变化对模式分析同样具有重要的作用, 因此, 如何较好地度量非局部数据间的几何变化关系, 并和局部多样性几何属性相结合, 是今后需要研究的重点.

附录. 推论1的证明

证明. 由矩阵 G 的定义知, 对称矩阵 G 可分解成

$$G = G_1 \otimes G_2 \tag{A1}$$

其中 G_1 和 G_2 分别是大小为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 的矩阵, 定义如下:

$$\begin{aligned} &G_1(i,i') = \left(\tfrac{1}{2}\pi\right)^{1/2} \exp\left\{-\tfrac{(i-i')^2}{2}\right\}, \\ &\quad i,i' = 1,\cdots,m \\ &G_2(j,j') = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\tfrac{(j-j')^2}{2}\right\}, \\ &\quad j,j' = 1,\cdots,n \end{aligned}$$

通过简单的数学变换, 图像欧氏距离, 即式 (5), 可写成

$$\begin{aligned} &d_{IED}(X_j, X_l) = \\ &\quad Vec(X_j - X_l)^{\mathrm{T}} G^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} Vec(X_j - X_l) = \\ &\quad (G^{\frac{1}{2}} Vec(X_j - X_l))^{\mathrm{T}} (G^{\frac{1}{2}} Vec(X_j - X_l)) \end{aligned} \tag{A2}$$

令 $\boldsymbol{z} = \overline{Vec}(Z) = (G_1 \otimes G_2)^{\frac{1}{2}} Vec(X_j - X_l)$, 根据定理 1 有:

$$Z = G_1^{\frac{1}{2}} (X_j - X_l) (G_2^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}} \tag{A3}$$

将式 (A3) 代入 (A2) 有

$$\begin{aligned} & d_{IED}(X_j, X_l) = \\ & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \\ & \|Z\|_{\mathrm{F}} = \\ & \|G_1^{\frac{1}{2}} X_j (G_2^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}} - G_1^{\frac{1}{2}} X_l (G_2^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{F}} = \\ & \|\hat{X}_j - \hat{X}_l\|_{\mathrm{F}} \end{aligned} \tag{A4}$$

其中, $\hat{X}_j = G_1^{1/2} X_j (G_2^{1/2})^{\mathrm{T}}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 代表矩阵的 F 范数. □

References

1 Yan S C, Xu D, Zhang B Y, Zhang H J. Graph embedding and extensions: a general framework for dimensionality reduction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, **29**(1): 40−51

2 Fukunaga K. *Introduction to statistical Pattern Recognition* (Second edition). New York: Academic Press, 1990

3 Turk M A, Pentland A P. Face recognition using eigenfaces. In: Proceedings of the 1991 IEEE Computer Society Conferences on Computer Vision and Pattern Recognition. Maui, HI: IEEE, 1991. 586−591

4 Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(7): 711−720

5 Yang J, Zhang D, Frangi A F, Yang J Y. Two-dimensional PCA: a new approach to appearance-based face representation and recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, **26**(1): 131−137

6 Gao Quan-Xue, Liang Yan, Pan Quan, Cheng Yong-Mei. Face recognition based on expressive features. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(3): 386−392
(高全学, 梁彦, 潘泉, 程咏梅. 基于描述特征的人脸识别研究. 自动化学报, 2006, **32**(3): 386−392)

7 He R, Hu B G, Zheng W S, Kong X W. Robust principal component analysis based on maximum correntropy criterion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(6): 1485−1494

8 Fang Wei-Tao, Ma Peng, Cheng Zheng-Bin, Yang Dan, Zhang Xiao-Hong. 2-dimensional projective non-negative matrix factorization and its application to face recognition. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(9): 1503−1512
(方蔚涛, 马鹏, 成正斌, 杨丹, 张小洪. 二维投影非负矩阵分解算法及其在人脸识别中的应用. 自动化学报, 2012, **38**(9): 1503−1512)

9 Roweis S T, Saul L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 2000, **290**(5500): 2323−2326

10 Kong D G, Ding C H Q, Huang H, Nie F P. An iterative locally linear embedding algorithm. In: Proceeding of the 29th International Conference on Machine Learning (ICML), Edinburgh, Scotland, 2012. 1647−1654

11 Tenenbaum J B, de Silva V, Langford J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 2000, **290**(5500): 2319−2323

12 You D, Hamsici O C, Martinez A M. Kernel optimization in discriminant analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(3): 631−638

13 Scholkopf B, Smola A, Muller K R. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. *Neural Computation*, 1998, **15**(5): 1299−1319

14 He X F, Yan S C, Hu Y X, Niyogi P, Zhang H J. Face recognition using laplacianfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(3): 328−340

15 He X F, Cai D, Yan S C, Zhang H J. Neighborhood preserving embedding. In: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision. Beijing, China: IEEE, 2005. 1208−1213

16 Fan Z Z, Xu Y, Zhang D. Local linear discriminant analysis framework using sample neighbors. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(7): 1119−1132

17 Huang Y, Xu D, Nie F P. Semi-supervised dimension reduction using trace ratio criterion. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **23**(3): 519−526

18 Gao Quan-Xue, Xie De-Yan, Xu Hui, Li Yuan-Zheng, Gao Xi-Quan. Supervised feature extraction based on information fusion of local structure and diversity information. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(8): 1107−1114
(高全学, 谢德燕, 徐辉, 李远征, 高西全. 融合局部结构和差异信息的监督特征提取算法. 自动化学报, 2010, **36**(8): 1107−1114)

19 Hu D W, Feng G Y, Zhou Z T. Two-dimensional locality preserving projections (2DLPP) with its application to palmprint recognition. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(1): 339−342

20 Gao Q X, Xu H, Li Y Y, Xie D Y. Two-dimensional supervised local similarity and diversity projection. *Pattern Recognition*, 2010, **43**(10): 3359−3363

21 Gao Q X, Liu J J, Zhang H J, Hou J, Yang X J. Enhanced fisher discriminant criterion for image recognition. *Pattern Recognition*, 2012, **45**(10): 3717−3724

22 Gao Q X, Zhang H J, Liu J J. Two-dimensional margin, similarity and variation embedding. *Neurocomputing*, 2012, **86**: 179−183

23 Postnikov M M. *Lectures in Geometry, Semester I: Analytic Geometry*. Moscow: Mir Publishers, 1982

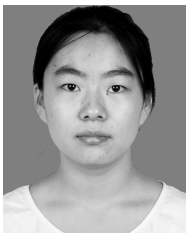
24 Wang L W, Zhang Y, Feng J F. On the Euclidean distance of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, **27**(8): 1334−1339

25 Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations* (Third edition). Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996

高全学 西安电子科技大学副教授. 2005 年获西北工业大学自动化学院博士学位. 主要研究方向为统计模式识别, 机器学习, 人脸识别, 数字信号处理. 本文通信作者.
E-mail: qxgao@xidian.edu.cn
(**GAO Quan-Xue** Associate professor at the School of Communication Engineering, Xidian University. He received his Ph. D. degree in the College of Automation, Northwestern Polytechnical University in 2005. His research interest covers statistical pattern recognition, machine learning, face recognition, and digital signal processing. Corresponding author of this paper.)

高菲菲 西安电子科技大学硕士研究生. 2009 年获西安邮电大学学士学位. 主要研究方向为统计模式识别, 机器学习, 人脸识别.
E-mail: feifeicop86@yahoo.com.cn
(**GAO Fei-Fei** Master student at Xidian University. She received her bachelor degree from Xi′an University of Post and Telecommunications in 2009. Her research interest covers statistical pattern recognition, machine learning, and face recognition.)

郝秀娟 西安电子科技大学硕士研究生. 主要研究方向为统计模式识别, 机器学习, 人脸识别.
E-mail: HXJ0824@163.com
(**Hao Xiu-Juan** Master student at Xidian University. Her research interest covers statistical pattern recognition, machine learning, and face recognition.)



程 洁 西安电子科技大学硕士研究生. 2010 年获西安电子科技大学学士学位. 主要研究方向为统计模式识别, 机器学习, 人脸识别.
E-mail: fairy_0609@yahoo.com.cn
(**CHENG Jie** Master student at Xidian University. She received her bachelor degree from Xidian University in 2010. Her research interest covers statistical pattern recognition, machine learning, and face recognition.)