线性离散周期系统研究综述

吕灵灵 [1] 段广仁 [2] 苏海滨 [1] 朱安福 [1]

摘 要 由于线性离散周期时变系统在理论和实践双重方面的重要意义, 因此成为控制领域研究的重要课题. 本文对目前线性离散周期系统的研究成果加以总结. 以系统分析和综合为线索, 着重介绍了线性离散周期系统的时不变重构、系统的结构属性、稳定性、零点、极点、模型降解及实现、故障诊断等问题所存在的典型方法. 并对线性离散周期系统领域仍存在的问题和未来的发展方向作了进一步的展望.

关键词 线性周期系统, 离散系统, 系统分析, 系统综合

引用格式 吕灵灵, 段广仁, 苏海滨, 朱安福. 线性离散周期系统研究综述. 自动化学报, 2013, **39**(7): 973−980

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00973

A Survey on Linear Discrete Periodic Systems

LV Ling-Ling[1] DUAN Guang-Ren[2] SU Hai-Bin[1] ZHU An-Fu[1]

Abstract Due to its high importance in theory and practice, the research on discrete linear periodic systems is one of the most important topic in the control field. The existing results on this type of systems are summarized, and the main methods about several hot spots are introduced. These hot spots include invariant reconstruction, structure properties, stability, zeros and poles, model reduction and realization, fault diagnosis, and so on. The problems to be solved and the research trend are prospected at the end of this paper.

Key words Linear periodic systems, discrete-time systems, system analysis, system synthesis

Citation Lv Ling-Ling, Duan Guang-Ren, Su Hai-Bin, Zhu An-Fu. A survey on linear discrete periodic systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 973−980

作为联系线性时不变系统和线性时变系统乃至一般的非线性系统的桥梁, 线性离散周期时变 (Linear discrete periodic varying, LDPV) 系统无论在理论上还是实践上都发挥着重要的作用. 人们对于周期系统的研究最早可以追溯到十九世纪六十年代数学家们对具有周期系数的微分方程的研究. 此后一百多年中, 仅有零星的报道, 没有系统地进行研究. 直到 1975 年, 时不变提升重构这一有力的工具诞生之后, 关于离散周期系统的研究成果开始呈指数级增长. LDPV 系统适用于绝大多数的具有周期属性的模型. 在工程实践中, 很多机械系统在周期策略驱动下的动态行为, 都可以建模为 “小扰动” 下的线性周期系统. 目前, LDPV 系统的各种不同控制策略已经广泛应用于卫星姿态控制[1−2]、硬盘驱动伺服系统[3]、风力涡轮机[4]、汽车发动机[5] 等. 尤其值得一提的是, 研究线性离散周期系统的一个重要的动机在于信号处理领域. 通过多级速度数字采样得到的系统往往能建模成线性离散周期系统. 而多级速度滤波器与滤波器组被广泛应用于天线系统、通讯系统、图像压缩系统、语音处理和保密系统以及数字音频领域[6−7]. 在理论层面, 除了被用于分析线性和非线性问题, 有不少学者还发现对于一些定常反馈控制律不能控制的系统, 周期控制律往往能够胜任, 而且对线性时不变系统采用周期控制律可以提高闭环系统的鲁棒性. 正是由于诸多应用需求的出现和不断增长, 促使 LDPV 系统不断发展, 国内外对该领域的研究也日益活跃.

本文在已有文献的基础上, 对 LDPV 系统的研究现状作了总体的回顾, 介绍了该类系统在系统分析与综合方面取得的重要成果. 其中 LDPV 系统的分析包括时不变重构、系统结构属性、稳定性分析、零点的分析和计算、系统的最小实现和模型降阶以及各类范数的计算等. LDPV 系统的综合则包括系统的镇定、极点配置、鲁棒极点配置、H_2/H_∞ 控制、故障诊断等问题的研究. 在本文最后, 对 LDPV 系统中有待解决的问题作了一些讨论, 展望了未来的发展方向和趋势.

收稿日期 2012-03-27 录用日期 2012-08-14
Manuscript received March 27, 2012; accepted August 14, 2012
国家自然科学基金 (11226239, U1204605), 河南省教育厅科学技术研究重点项目 (12B120007), 华北水利水电大学高层次人才科研启动项目 (201013) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11226239, U1204605), Scientific Research Key Project Fund of the Education Department of Henan Province (12B120007), and High-level Talent Research Program of North China University of Water Resources and Electric Power (201013)
本文责任编委 贾英民
Recommended by Associate Editor JIA Ying-Min
1. 华北水利水电大学电力学院 郑州 450011 2. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001
1. Institute of Electric Power, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450011 2. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

1 系统模型

一般而言, LDPV 系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C(t)\boldsymbol{x}(t) + D(t)\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $t \in \mathbf{Z}$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为输出变量, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ 为输入变量. $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 和 $D(t)$ 都是实矩阵, 且以 T 为周期. 关于 LDPV 系统的输入输出描述及其频域响应的相关研究成果, 在文献 [8] 中进行了详尽的阐述. 接下来将对 LDPV 系统在一些主要领域的研究进展进行分别讨论.

2 LDPV 系统的研究现状

2.1 系统分析

2.1.1 时不变重构

LDPV 系统由于其自身的线性周期特性, 很容易和线性离散时不变系统联系起来. 人们对系统的状态变量以及输入、输出变量按照某种规律进行重新排列和组合, 就会形成一个线性时不变系统, 而原来系统的一些特性也往往会反映在新生成的时不变系统中. 因此, 时不变重构是研究 LDPV 系统的一个非常重要的工具, 很多理论结果是基于两类提升技巧, 通过提升将周期系统中的控制问题转化为一个等价的高维时不变系统的相应问题. 提升方法导致的结果或是处理 T (T 是系统周期) 个矩阵的乘积矩阵, 或是处理一个具有稀疏和大结构的标准系统. 提升的数学本质是通过托普尼兹算子将原状态空间 l_2 等距同构到一个新的空间上.

时间提升重构或许是最经典的一类时不变重构, 它将一个周期上的输入输出信号打包成一个新的放大的信号, 而状态信号则是每隔一个周期取样一次. 这种思想最早起始于对多级速度反馈系统的研究. 文献 [9] 在对多级速度反馈系统的输入输出关系的分析中, 利用等价的单级速度系统重新表示了这类系统. 1959 年, Jury 等[10] 利用周期时变取样分析了取样数字控制系统. 随后, Rreidland 发现多级速度系统属于一般的离散周期时变系统[11]. 基于前人的成果, Meyer 等于 1975 年将多级速度和周期时变数字滤波器统一起来用线性时不变系统描述[12]. 一般地, 人们称 Meyer 等构建的提升系统为标准提升时不变系统. 自此以后, 时间提升重构在 LDPV 系统的分析和设计中常常被用到, 比如在周期零点的定义、能达性和能观性等结构属性、极点配置、优化控制器的设计中均能找到它的影子.

Park 等[13] 和 Flamm[14] 提出了 LDPV 系统的另外一种时不变表示, 即循环时不变重构. 循环操作是随时间推移, 每次挑选一个周期的信号取样, 而该取样信号是以一个增广向量的形式来表示的. 将这种操作应用到周期动态系统的外部变量, 得到一个时不变的动态过程. 在这种表示里, 重构的线性时不变模型保持了原始周期系统的步长. 循环重构算法相对于标准提升算法的优势在于原始离散周期系统的因果律被保留在重构后的线性时不变系统中, 而且二者的步长是一致的. 缺点是它不仅放大了输入空间和输出空间的维数, 而且放大了状态的维数. 循环重构算法也得到了广泛的应用, 人们在检验周期系统中的一些重要概念的合理性时, 往往会对比标准提升重构和循环提升重构各自所得结果是否一致, 如周期系统的零点、极点、L_2 范数、L_∞ 范数等都被证明是有意义的. 此外, LDPV 系统的模型匹配问题也是循环重构算法的一个重要用武之地[15].

以上两类重构都是基于状态空间描述的, 文献 [8] 从周期系统的输入输出描述角度出发, 首先提出了周期传递函数的概念, 并在此基础上给出了周期系统的频域响应. 该文还从输入输出角度讨论了四类重构: 时间提升重构、循环提升重构、频率重构、傅里叶重构, 并通过解析形式阐明了几种重构之间的相互关系. 由于该文是从周期传递函数方面来论述的, 使得人们对于线性周期系统的时不变重构的频域解释有了更深刻的认识. 这在传统的状态空间描述占主导地位的情形下构成了一个新的亮点.

2.1.2 系统的结构属性

系统的结构属性可分为能控性、能观性、能达性和能重构性. 能控性研究系统在外在控制作用下从任意非零状态达到零状态的可能性. 能达性的概念类似于能控性, 反映了系统在外在控制作用下能从零状态达到状态空间中任意非零状态的一种性能. 对于连续型的线性定常系统, 能达性和能控性是完全等价的, 两者的判别条件也相同. 只有在研究离散系统和线性时变系统时, 能达性和能控性的区别才变得有意义, 而且一般它们的判别条件也是不相同的. 并非所有状态变量都是可测量或有物理意义的, 因此提出能否通过可测量的输出量获得系统的状态量, 这便是系统的能观测性问题; 能否通过未来的观测输出量估计系统的当前状态量, 这便是系统的能重构性问题. 在周期系统的框架下, 这些属性也得到了充分的研究.

文献 [16] 根据这几个结构属性对系统进行了标准分解. 通过寻找结构子空间的相互关系来确立离散系统的对偶原理, 然后推导了标准分解存在的充分条件, 并给出了一个基于能达性和能重构性的标准分解. 对于离散周期系统而言, 能达性和能控性指标不再是固定的, 而是依赖于时间 t 的, 文献 [17] 对这个问题进行了探讨, 并指出时刻 t 和区间 $(t-\mu_{rt}T, t)$ 有共同的能达子空间, 和时间区间 $(t, t+\mu_{ct}T)$ 有共同的能控子空间.

文献 [18] 对能达性和能观性推导了一个非常简

单易行的秩判据, 给出了 t 时刻 k 步能达和能观测的充分必要条件.

在文献中, 能达性 Grammian 矩阵和能观性 Grammian 矩阵的概念也得到了充分的关注. 文献 [17, 19] 利用 Grannian 矩阵的概念讨论了能控性和能重构性, 并据此定义了相应的能控子空间, 不可控子空间, 能重构子空间, 不可重构子空间. 进而, 根据系统的不可控部分是否是稳定的, 将系统分为可稳的和不可稳的; 根据系统的不可重构部分是否是稳定的, 将系统分为可检测的和不可检测的.

2.1.3 稳定性分析

稳定性是一切动态系统所要解决的首要问题. 在离散周期系统中, 稳定性分析和综合得到了充分的研究, 取得了丰硕的成果. 系统 (1) 的稳定性取决于它的单值性矩阵 $\Phi_A(t) = A(t+T-1)A(t+T-2)\cdots A(t)$ 的所有极点是否位于单位圆内. 文献 [16] 中称这些极点为系统的特征乘子 (Characteristic multiplier), 并证明了它们与时间 t 无关.

在稳定性分析中, 一个最重要的方法自然是 Lyapunov 方法. 文献 [20] 分别对连续和离散周期系统给出了周期 Lyapunov 不等式与周期 Riccati 方程, 据此推导了线性周期系统稳定的充分必要条件. 文献 [21] 给出了 Lyapunov 引理的周期时变系统版本. 基于该引理, 并假设系统完全能观测, 将系统的渐近稳定性归结为与其相应的周期 Lyapunov 方程的正定解的存在性. 将能观性假设放松到系统能检测, 得到一个扩展版本的引理. 在这个扩展的引理中, 系统的稳定性取决于周期 Lyapunov 方程的周期半正定解的存在性. 文献 [22] 利用一个周期差分 Riccati 矩阵方程的解刻画了 LDPV 系统输出稳定的充分必要条件.

2.1.4 零点

对于线性时不变系统, 零点的重要性广为人知. 很多学者都讨论过, 定义了各种零点, 如不变零点、传输零点、输入和输出解耦零点, 并给出了不同零点概念之间的区别和联系, 如文献 [23−26] 等. 在线性周期系统领域, 对零点也进行了广泛深入的探讨, 很多学者们都做出了较大的贡献, 如 Bolzern P, Grasselli O M 和 Longhi S 等.

文献 [27] 考虑了 SISO 线性离散周期系统的零点, 将该类系统的零点与其提升 LTI (Linear time invariant) 系统的零点联系起来. 该文通过一个性质对零点进行刻画, 该性质是 LTI 传函块属性在周期系统中的延伸, 同时也是对周期系统的零点定义是否合理的验证. 文献 [28] 研究了 LDPV 系统的传输零点、不变零点和结构零点, 阐明了各自的含义, 解释了相互之间的关系. 该文证明了不变零点与结构零点是相同的, 且非零不变零点和非零传输零点是独立于时间的. 在推导过程中利用了系统的结构属性, 因此这些结果也可以看作是 LDPV 系统在几何理论方面的进一步深化. 文献 [29] 将输入和输出解耦零点的概念推广到了线性离散周期系统, 并对不变零点和传输零点引入了一种全新的、更简单的描述, 介绍了它们的结构指标的周期有序集. 该文证明了这几种类型的非零零点的结构指标有序集是不依赖时间的, 但是零不变零点、零传输零点、零输入和零输出解耦零点的结构指标有序集是随时间变化的, 该文进一步指出, 不能通过周期反馈来改变不变零点的有序集. 在时不变系统中, 不变零点具有如下的属性: 对于任何一个零点, 都存在一个适当的初始状态和一个指数类型的输入函数使得输出恒等于零. 文献 [18] 指出离散周期系统的零点也具有类似的粘附属性: 对于每一个不变零点, 都可以选择一个初始状态和一个周期输入函数使得系统的输出为零. 该初始状态和作为输入的指数周期信号都可以根据其提升系统的初始状态和输入构造出来. 文献 [30] 考虑了更为广泛的一类线性周期系统的零点. 对于状态空间维数也随时间周期系统变化的系统, 同样将零点定义为其提升 LTI 系统的零点. 通过一种数值可靠的反向算法对提升 LTI 系统的广义特征结构进行了计算. 该方法可同时计算系统的零点、解耦零点、极点和与其对应的 LTI 系统传函的左右零子空间.

2.1.5 系统实现和模型降阶

在现有的关于 LDPV 系统的理论成果中, 占绝对优势的是对具有定常状态维数的系统的研究. 对于状态维数可变的 LDPV 系统, 理论成果虽然不多, 但在最小系统实现和极点配置方面, 也取得了显著的成果. 在这部分, 主要总结一下模型降阶和系统实现方面的成果.

对于周期为 T 的 LDPV 系统, 文献 [31] 研究了如何根据一个传函矩阵构造系统的状态空间表述形式. 该文定义了 LDPV 系统的最小实现、准最小实现以及一致 T 实现, 以充要条件刻画了这些实现, 并提供了相应的算法. 该方法可以应用到具有时变维数的 LDPV 系统的实现问题. 文献 [32] 讨论了 LDPV 系统和其提升 LTI 系统在能达性和能观性等主要结构属性方面的关系, 指出当且仅当系统是完全能达且完全能观时, 该系统是最小的. 进一步, 该文还研究了两个最小 LDPV 系统的相似问题, 给出了充要条件. 文献 [33] 研究了状态 (输出) 维数时变情形下的 LDPV 系统的最小实现问题, 提出了两种数值可靠地计算方法. 其中一种可归结为平方根类型, 具有较高的精确度, 可得到系统的平衡最小实现. 第二种方法针对具有较差结构的原始 LDPV 系统, 计算最小实现时具有较强的计算优势. 在这两种方法中, 周期 Lyapunov 矩阵方程非负定解的求解是核心. 文献 [34] 采用正交分解的方法讨论了如何

得到一个传函矩阵的最小状态空间描述, 即 LDPV 系统的最小实现问题. 该文的特色之处在于利用所提出的方法所得到的周期系统的状态维数是可以随时间变化的, 从而更具一般性. 此外, 该方法的计算复杂度也不高.

文献 [35] 将 LTI 系统模型降阶的平衡截断方法延伸到 LDPV 系统中, 提出了两个数值可靠的算法来进行模型降阶, 并阐明了降阶后所得到的模型是稳定的. 该文算法的核心之处在于对周期 Gramian 矩阵进行 Cholesky 分解. 文献 [36] 区别于前述模型降阶方法, 并非着手于周期系统的状态空间实现本身, 而是通过对其提升 LTI 系统实施平衡截断技术, 来实现模型降阶. 该方法的优点是, 当 LDPV 系统的状态维数较高, 周期长度适中, 输入/输出维数较小时, 得到的误差上界会非常小.

2.2 系统综合

2.2.1 镇定

镇定综合领域的研究成果非常丰富. 能达性 Gramian 矩阵法是一种具有较长历史且很有理论意义的方法. 针对 LTI 系统, 文献 [37−38] 等都进行了深入的讨论. 文献 [39−40] 对线性时变系统进行过相关的讨论. 文献 [41] 指出在周期系统中, 镇定策略不仅有传统的逐点滚动方案, 还有逐段滚动镇定方案. 在此基础上, 文献 [42] 针对线性连续和离散周期系统, 设计出了一种时域的逐段滚动镇定方法, 在假设系统能控而不需要系统可逆的情况下, 通过能达性 Gramian 矩阵, 构造了系统的控制增益. 和经典的逐点滚动镇定策略相比, 该方法拥有更小的时间复杂度.

通过周期 Lyapunov 方程或者 Riccati 方程的解来构造镇定控制器也是一个常用的方法. 文献 [43] 求解了周期离散 Riccati 方程, 推导了周期半正定解存在和唯一的充要条件. 基于这些理论, 研究了周期预测控制问题, 设计了迭代线性化算法. 文献 [44] 采用周期 Schur 分解求解了一对周期差分 Lyapunov 方程, 进而将目标函数与梯度都用这对方程的解表示出来, 通过梯度搜索优化算法, 设计了周期输出反馈优化控制器. 文献 [45] 考虑了执行器饱和的线性离散周期系统的半全局镇定问题. 在系统的开环特征乘子全部位于闭单位圆内的假设下, 基于求解一个参数化离散周期 Lyapunov 方程, 提出了一种低增益状态反馈设计方法.

近些年, 线性矩阵不等式 (LMI) 技术的迅速发展, 在 LDPV 系统领域也得到了广泛的应用. 文献 [46] 采用线性矩阵不等式工具, 同时研究了状态反馈和输出反馈镇定的条件和设计方法. 在周期状态反馈中, 提出的镇定所要满足 LMI 条件是一个充要条件; 在周期输出反馈中, 提出的 LMI 条件仅仅是充分的. 进而, 根据这些条件, 综合了范数有界不确定周期系统的镇定控制器. 文献 [47] 考虑了具有区间参数不确定性的离散周期系统的反馈控制问题, 分别给出了基于 LMI 的渐近稳定条件和反馈镇定条件, 并进一步研究了 L_2 增益问题. 文献 [48] 考虑了输入饱和的线性离散周期系统的稳定性和镇定问题, 构建了一个饱和依赖的周期 Lyapunov 函数, 以 LMIs 的形式给出了系统局部稳定和全局稳定的充分条件, 并以此来降低设计保守性和设计控制器.

2.2.2 极点配置

在 LDPV 系统中, 时刻 τ 的极点被定义为该时刻的提升时不变系统的极点. 文献 [28−29] 分别从不同角度说明了非零极点是不会随时刻 τ 的改变而改变的, 也即是说非零极点是不依赖时间的. 和线性时不变系统相似, 极点是否位于开单位圆内, 直接决定了线性离散周期系统的稳定性. 因此, 极点配置问题得到了广泛的研究, 涌现出了多种设计方法.

文献 [49] 将文献 [50] 用来处理 LTI 系统极点配置的方法推广到线性离散周期系统中. 该方法可以同时处理状态或输入空间维数随时间变化的情况, 并进一步根据所设计的周期状态反馈律中的自由度, 设计了鲁棒控制器. 文献 [51] 利用酉变换提出了一种数值可靠算法, 解决了周期状态反馈极点配置问题. 该方法基于隐式特征分解, 推导了系统矩阵的标准 Schur 型. 通过依次更换极点来实现极点配置. 在给定的系统完全能达的前提下, 利用这种方法可以实现极点的任意配置. 采用这种方法的好处是只用更换一个 “不想要” 的极点, 保留 “想要” 的极点即可. 因此, 可以降低计算复杂度. 文献 [52] 考虑了 LDPV 系统和 LTI 系统极点配置问题之间的联系, 指出在系统能达的假设下, 线性离散周期系统的极点配置问题可归结为 LTI 系统的极点配置问题, 其中状态维数保持不变, 输入维数放大了 T 倍 (T 为线性离散周期系统的周期长度). 文献 [53] 利用扰动分析的方法, 阐明了存在周期输出反馈律能够对系统进行极点配置, 并通过求解一组代数方程, 给出了输出反馈增益的计算方法. 但是, 该方法不能配置零极点. 文献 [54] 考虑了 LDPV 系统的鲁棒极点配置问题. 首先将问题转化为周期 Sylvester 方程的求解问题, 然后根据该问题解的多样性, 采用和 LTI 系统相同的鲁棒性能指标, 设计了周期鲁棒控制器. 该方法虽然提供了较大的设计自由度, 但是对自由参数的选择有能观测性的要求. 进一步, 该方法要求系统欲配置的极点即闭环极点和开环系统的极点完全不相同, 此外, 该方法也不能配置零极点.

最近, 我们在文献 [55] 中提出了一种新的周期状态反馈极点配置算法, 该方法弥补了上述算法的缺点, 能够将系统的极点配置到复平面上任意想要的位置, 给出了能够实现极点配置的状态反馈控制器的参数化表达, 而且对自由参数的选择没有限制.

该文进一步考虑了鲁棒极点配置问题, 利用周期系统的特性, 推导了系统极点对潜在扰动的灵敏度指标, 设计了鲁棒控制器. 此外, 文献 [56] 考虑了鲁棒周期动态补偿器设计问题, 利用闭环系统单值性矩阵的特殊性, 经过适当的处理, 以参数化形式给出了离散时间线性周期系统极点配置问题的动态补偿器, 实现了完全的自由度. 进一步该文将鲁棒设计问题转化为了一个带约束的优化问题, 通过对优化问题的求解, 最终获得了理想的鲁棒控制器.

2.2.3 H_2 和 H_∞ 控制

学者们对于 H_2 和 H_∞ 范数的研究较早, 给出了有效的计算方法[18, 57−58], 但是对于设计 H_2 和 H_∞ 控制器的问题, 直到 2000 年以后才取得了一些成果. 这些设计方法几乎都是以线性矩阵不等式作为工具的.

文献 [59] 定义了 LDPV 系统的 H_2 范数, 以 LMI 的形式给出了 H_2 控制问题的充要条件, 并综合了一个周期反馈控制器. 文献 [60] 研究了多胞不确定性 LDPV 系统的鲁棒 H_2 控制问题, 引入了松弛变量, 利用参数依赖的周期 Lyapunov 函数, 归纳出鲁棒 H_2 控制的一个充分条件. 该方法的优点在于系统设计的保守性较低.

文献 [61] 研究了 LDPV 系统的鲁棒 H_2 控制问题, 通过对 LMI 条件, 进行降维处理, 很大程度上降低了计算量, 进而降低了系统设计中的保守性.

文献 [62] 研究了多胞不确定性 LDPV 系统的鲁棒控制问题, 提供了一个动态控制器的结构框架, 并以 LMI 的形式构造了镇定控制器, 进一步推导了鲁棒周期 H_2 和 H_∞ 控制器的存在条件. 在该方法中, 设计出来的控制器的周期是灵活可变的, 通过增加周期长度, 可以使得设计保守性降低并优化控制性能.

2.2.4 故障检测

和 LDPV 系统的其他研究领域相比, 人们对故障检测的关注较晚, 研究成果也基本上都出现在 2000 年以后.

文献 [63] 研究了 LDPV 系统的故障检测问题, 通过对其提升 LTI 系统的传函矩阵设计有限脉冲响应零化子, 使得系统对干扰输入具有较强的鲁棒性, 从而实现干扰抑制. 进一步, LDPV 系统在不同取样点处残差的加权阵可以通过这个零化子获得.

文献 [64] 也考虑了 LDPV 系统的故障检测问题, 给出了一种数值可靠的计算最小阶零化子的算法. 该方法没有对系统进行时不变提升处理, 而是通过对一个周期矩阵对进行正交变换, 化成一个类似周期 Kronecker 型, 从而可以得到故障检测滤波器的一个周期实现.

文献 [65] 同时考虑了鲁棒干扰抑制和故障检测, 提出了一种优化方法. 该文将 LTI 系统的比值型性能指标延伸到 LDPV 系统, 将设计周期残差生成器问题归结为一个优化问题, 其主要工作量在于对一个周期 Riccati 矩阵方程的求解.

同样考虑了 LDVP 系统的故障检测问题, 文献 [66] 以设计周期残差生成器为目标, 使得周期残差信号和外在干扰完全解耦. 该文首先设计了一个具有周期奇偶向量的周期残差生成器, 然后建立了该周期奇偶向量与基于观测器的周期残差生成器之间的关系. 该文指出基于观测器的周期解耦残差生成器完全可以从一个完全解耦的周期奇偶向量中得到.

文献 [67] 运用主元分析方法提出了线性离散周期系统的传感器故障诊断和孤立方案. 其中心思想是将线性离散周期系统建模成多模型主元分析, 其模型数等于周期长度. 通过将观测到的系统动态和期望的系统动态作比较, 检测出故障传感器. 并通过可变的重构方法孤立出故障的传感器.

在系统综合中, 除了上述几个研究成果比较集中的领域外, 研究者还在 LDPV 系统的最优控制、LQG 问题以及模型预测控制等其他方面取得了一些成绩, 如文献 [44, 68] 等.

3 总结和展望

综上所述, 经过几十年的发展, 线性离散周期系统虽然在系统分析、综合方面取得了一些成就, 在笔者看来, 仍存在如下几个方面的问题:

1) 和成熟的线性时不变系统理论相比, LDPV 系统中还有一些很重要的基础问题需要进一步研究, 如能控能观标准型的计算、关联的传递函数矩阵零点的计算以及谱分解等. 这里需要特别指出的是, 尽管在连续周期系统中 Floquet 理论的应用非常广泛, 但是在 LDPV 系统中 Floquet 理论并不成熟[69−71]. 现有的成果仅仅是弄清楚了离散 Floquet 变换存在的充分必要条件以及系统矩阵非奇异时推导出离散 Floquet 变换的方法. 因此, 离散 Floquet 理论并没有在系统综合中得到应有的关注.

2) LDPV 系统的约束控制存在挑战. 对于周期系统的约束控制问题, 仅有文献对 SISO 周期离散系统的局部镇定问题进行过讨论, 还有最近 Zhou B 等利用周期参量 Lyapunov 方程的解, 在控制器受限的情况下解决了半全局镇定问题. 但尚有一些其他问题如全局镇定, 鲁棒镇定等有待进一步研究. 由于周期系统本质上是时变系统, 受约束的系统本质上是非线性系统, 而对这两类系统的研究缺乏有效的数学工具, 导致了很多基础性的问题还没有人研究, 例如不变集的精确刻画、渐近零能控区域的精确刻画方法等.

3) 广义线性离散周期系统的研究成果较少. 相对于非奇异离散周期系统而言, 人们对广义周期系统的关注较晚. 研究广义周期系统的主要工具

是将系统矩阵对应的增广周期矩阵对化简成周期 Kronecker 型. 近几年来, 人们在系统的可解性、零极点的计算, 以及能达性、能观性等系统分析方面有了初步进展, 取得了一些成果, 但是还存在一些迫切需要解决的问题, 如故障诊断问题、周期模型匹配问题、H_2、H_∞ 优化问题等.

4) 具有时变状态和输入维数的 LDPV 系统期待深入的研究. 这类系统是由输入的不同步导致的, 因此在工程实践建模中更具代表性. 但是, 和固定维数的 LDPV 系统相比, 这类系统仅在系统实现、模型降阶、预测控制等方面取得了零星的的研究成果. 一些常见的综合问题, 如镇定、H_2 控制、H_∞ 控制、故障诊断等都没有有效的计算方法.

综上所述, 线性离散周期系统的研究虽然并不成熟, 遇到的挑战也很多, 但是随着理论研究的不断深入, 随着线性时不变系统、时变系统以及连续周期系统的进一步发展, 线性离散周期系统的理论必然会进一步完善, 也必将在实践中发挥更大的作用.

References

1 Zheng Yu-Hong, Wang Ping. A new approach to control satellite attitude via magnetorquers. *Journal of Astronautics*, 2000, **21**(3): 94−99
(郑育红, 王平. 一种用磁力矩器控制卫星姿态的新方法. 宇航学报, 2000, **21**(3): 94−99)

2 Cole J W, Calico R A. Nonlinear oscillations of a controlled periodic system. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1992, **15**(3): 627−633

3 Nie J B, Sheh E, Horowitz R. Optimal H_∞ control for hard disk drives with an irregular sampling rate. In: Proceedings of 2011 American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 2011. 5382−5387

4 Allen M S, Sracic M W, Chauhan S, Hansen M H. Output-only modal analysis of linear time-periodic systems with application to wind turbine simulation data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**(4): 1174−1191

5 Chauvin J, Corde G, Petit N, Rouchon P. Periodic input estimation for linear periodic systems: automotive engine applications. *Automatica*, 2007, **43**(6): 971−980

6 Vaidyanathan P P. Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 1990, **78**(1): 56−93

7 Wornell G W. Emerging applications of multirate signal processing and wavelets in digital communications. *Proceedings of the IEEE*, 1996, **84**(4): 586−603

8 Bittanti S, Colaneri P. Invariant representations of discrete-time periodic systems. *Automatica*, 2000, **36**(12): 1777−1793

9 Kranc G M. Input-output analysis of multirate feedback systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1957, **3**(1): 21−28

10 Jury E I, Mullin F J. The analysis of sampled-data control systems with a periodically time-varying sampling rate. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959, **AC-4**(1): 15−21

11 Rriedland B. Sampled-data control systems containing periodically varying members. In: Proceedings of the 1st IFAC Congress. Moscow, U.S.S.R., 1960. 361-368

12 Meyer R A, Burrus C S. A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1975, **22**(3): 162−168

13 Park B, Verriest E I. Canonical forms on discrete linear periodically time-varying systems and a control application. In: Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, USA: IEEE, 1989. 1220−1225

14 Flamm D S. A new shift-invariant representation for periodic linear systems. *Systems and Control Letters*, 1991, **17**(1): 9−14

15 Colaneri P, Kucera V. The model matching problem for periodic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(10): 1472−1476

16 Bittanti S, Bolzern P. On the structure theory of discrete-time linear systems. *International Journal of Systems Science*, 1986, **17**(1): 33−47

17 Bittanti S, Colaneri P, de Nicolao G. Discrete-time linear periodic systems: a note on the reachability and controllability interval length. *Systems & Control Letters*, 1986, **8**(1): 75−78

18 Bittanti S, Colaneri P. Analysis of discrete-time linear periodic systems. *Control and Dynamic Systems*, 1996, **78**: 313−339

19 Bittanti S, Colaneri P. Discrete-time linear periodic systems: gramian and modal criteria for reachability and controllability. *International Journal of Control*, 1985, **41**(4): 909−928

20 Bittanti S, Guardabassi G, Maffezzoni C, Silverman L. Periodic systems: controllability and the matrix Riccati equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1978, **16**(1): 37−40

21 Bittanti S, Bolzern P, Colaneri P. The extended periodic Lyapunov lemma. *Automatica*, 1985, **21**(5): 603−605

22 Colaneri P, Souza C D, Kucera V. Output stabilizability of periodic systems: necessary and sufficient conditions. In: Proceedings of the 1998 American Control Conference. Philadelphia, USA: IEEE, 1998. 2795−2796

23 Desoer C A, Schulman J O. Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1974, **21**(1): 3−8

24 Francis B A, Wonham W M. The role of transmission zeros in linear multivariable regulators. *International Journal of Control*, 1975, **22**(5): 657−681

25 Macfarlane A G J, Karcanias N. Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 1976, **24**(1): 33−74

26 Morse A S. Structural invariants of linear multivariable systems. *SIAM Journal on Control*, 1973, **11**(3): 446−465

27 Bolzern P, Colaneri P, Scattolini R. Zeros of discrete-time linear periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(11): 1057−1058

28 Grasselli O M, Longhi S. Zeros and poles of linear periodic multivariable discrete-time systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 1988, **7**(3): 361−380

29 Grasselli O M, Longhi S. Finite zero structure of linear periodic discrete-time systems. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(10): 1785−1806

30 Varga A, van Dooren P. On computing the zeros of periodic systems. In: Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA: IEEE, 2002. 2546−2551

31 Colaneri P, Longhi S. The realization problem for linear periodic systems. *Automatica*, 1995, **31**(5): 775−779

32 Gohberg I, Kaashoek M A, Lerer L. Minimality and realization of discrete time-varying systems. *Operator Theory: Advances and Applications*, 1992, **56**: 261−296

33 Varga A. Balancing related methods for minimal realization of periodic systems. *Systems & Control Letters*, 1999, **36**(5): 339−349

34 Varga A. Computation of minimal periodic realizations of transfer-function matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(1): 146−149

35 Varga A. Balanced truncation model reduction of periodic systems. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, NSW: IEEE, 2000. 2379−2384

36 Farhood M, Beck C L, Dullerud G E. Model reduction of periodic systems: a lifting approach. *Automatica*, 2005, **41**(6): 1085−1090

37 Kleinman D L. Stabilizing a discrete, constant, linear system with application to iterative methods for solving the Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, **19**(3): 252−254

38 Kwon W H, Pearson A E. On the stabilization of a discrete constant linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(6): 800−801

39 Kwon W H, Pearson A E. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(5): 838−842

40 de Nicolao G, Strada S. On the stability of receding-horizon LQ control with zero-state terminal constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(2): 257−260

41 de Nicolao G. Cyclomonotonicity and stabilizability properties of solutions of the difference periodic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(9): 1405−1410

42 de Nicolao G, Strada S. On the use of reachability Gramians for the stabilization of linear periodic systems. *Automatica*, 1997, **33**(4): 729−732

43 Bittanti S, Colaneri P, Nicolao G D. The difference periodic Riccati equation for the periodic prediction problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(8): 706−712

44 Varga A, Pieters S. Gradient-based approach to solve optimal periodic output feedback control problems. *Automatica*, 1998, **34**(4): 477−481

45 Zhou B, Duan G R, Lin Z L. A parametric periodic Lyapunov equation with application in semi-global stabilization of discrete-time periodic systems subject to actuator saturation. *Automatica*, 2011, **47**(2): 316−325

46 de Souza C E, Trofino A. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *International Journal of Control*, 2000, **73**(8): 696−703

47 Sun K, Xie G M. Analysis and control of a class of uncertain linear periodic discrete-time systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(4): 475−488

48 Zhou B, Zheng W X, Duan G R. Stability and stabilization of discrete-time periodic linear systems with actuator saturation. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1813−1820

49 Longhi S, Zulli R. A note on robust pole assignment for periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(10): 1493−1497

50 Longhi S, Zulli R. A robust periodic pole assignment algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(5): 890−894

51 Sreedhar J, van Dooren P. Pole placement via the periodic Schur decomposition. In: Proceedings of the American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 1993. 1563−1567

52 Hernández V, Urbano A M. Pole-placement problem for discrete-time linear periodic systems. *International Journal of Control*, 1989, **50**(1): 361−371

53 Aeyels D, Willems J L. Pole assignment for linear periodic systems by memoryless output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(4): 735−739

54 Varga A. Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(5): 1017−1022

55 Lv L L, Duan G R, Zhou B. Parametric pole assignment and robust pole assignment for discrete-time linear periodic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, **48**(6): 3975−3996

56 Lv L L, Duan G R, Su H B. Robust dynamical compensator design for discrete-time linear periodic systems. *Journal of Global Optimization*, 2012, **52**(2): 291−304

57 Varga A. Computation of L_∞ norm of linear discrete-time periodic systems. In: Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto, Japan, 2006

58 Sreedhar J, van Dooren P, Bamieh B. Computing H_∞-norm of discrete-time periodic systems-a quadratically convergent algorithm. In: Proceedings of the 1997 European Control Conference. Brussels, Belgium, 1997

59 Wisniewski R, Stoustrup J. Generalized H_2 control synthesis for periodic systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Arlington, VA: IEEE, 2001. 2600−2605

60 Farges C, Peaucelle D, Arzelier D, Daafouz J. Robust H_2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs. *Systems & Control Letters*, 2007, **56**(2): 159−166

61 Peaucelle D, Ebihara Y, Arzelier D. Robust H_2 perfomance of discrete-time periodic systems: LMIs with reduced dimensions. In: Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 1348−1353

62 Ebihara Y, Peacelle D, Arzelier D. Periodically time-varying dynamical controller synthesis for polytopic-type uncertain discrete-time linear systems. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun: IEEE, 2008. 5438−5443

63 Fadali M S, Gummuluri S. Robust observer-based fault detection for periodic systems. In: Proceedings of the 2001 American Control Conference. Arlington, VA: IEEE, 2001. 464−469

64 Varga A. Design of fault detection filters for periodic systems. In: Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Paradise Island, Bahamas: IEEE, 2004. 4800−4805

65 Zhang P, Ding S X, Wang G Z, Zhou D H. Fault detection of linear discrete-time periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 239−244

66 Zhang P, Ding S X. Disturbance decoupling in fault detection of linear periodic systems. *Automatica*, 2007, **43**(8): 1410−1417

67 Djemili I, Aitouche A, Bouamama B O. Sensors FDI scheme of linear discrete-time periodic systems using principal component analysis. In: Proceedings of 2010 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems. Nice, France: IEEE, 2010. 203−208

68 Gondhalekar R, Colin N J. MPC of constrained discrete-time linear periodic systems-A framework for asynchronous control: strong feasibility, stability and optimality via periodic invariance. *Automatica*, 2011, **47**(2): 326−333

69 van Paul D, Sreedhar J. When is a periodic discrete-time system equivalent to a time-invariant one? *Linear Algebra and its Applications*, 1994, **212−213**: 131−151

70 Hayakawa Y, Jimbo T. Floquet transformations for discrete-time systems: equivalence between periodic systems and time-invariant ones. In: Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008. 5140−5145

71 DaCunha J J, Davis J M. A unified Floquet theory for discrete, continuous, and hybrid periodic linear systems. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(11): 2987−3027



吕灵灵 华北水利水电大学副教授. 2010 年获哈尔滨工业大学博士学位. 主要研究方向为周期系统, 优化控制, 鲁棒控制. 本文通信作者.
E-mail: lingling_lv@163.com
(**LV Ling-Ling** Associate professor at North China University of Water Resources and Electric Power. She received her doctor′s degree from Harbin Institute of Technology in 2010. Her research interest covers periodic systems, optimal control and robust control. Corresponding author of this paper.)



段广仁 哈尔滨工业大学教授. 1983 年获得东北重型机械学院应用数学专业学士学位, 1986 年获得哈尔滨船舶工程学院现代控制理论专业硕士学位, 1989 年获得哈尔滨工业大学一般力学专业博士学位. 主要研究方向为鲁棒控制理论, 特征结构配置, 广义系统理论.
E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn
(**DUAN Guang-Ren** Professor at Harbin Institute of Technology. He received his bachelor degree in applied mathematics at Northeast Institute of Heavy Machinery in 1983, his master degree in modern control theory at Harbin Engineering University in 1986, and his Ph. D. degree in control systems theory at Harbin Institute of Technology in 1989. His research interest covers robust control, eigenstructure assignments, and descriptor systems.)



苏海滨 华北水利水电大学教授. 2007 年获得北京理工大学控制科学与工程专业博士学位. 主要研究方向为电力系统自动控制与保护.
E-mail: suhaibin@ncwu.edu.cn
(**SU Hai-Bin** Professor at North China University of Water Resources and Electric Power. He received his Ph. D. degree from Beijing Institute of Technology in 2007. His research interest covers automatic control and protection of power systems.)



朱安福 华北水利水电大学讲师. 2010 年获西北工业大学博士学位. 主要研究方向包括智能信号处理, 多传感器信息融合, 目标跟踪与识别等领域.
E-mail: zhuanfu@ncwu.edu.cn
(**ZHU An-Fu** Lecturer at North China University of Water Resources and Electric Power. He received his Ph. D. degree from Northwestern Polytechnical University in 2010. His research interest covers intelligent signal processing , multi-sensor, information fusion, target recognition and tracking.)