# 非奇异终端滑模控制系统 相轨迹和暂态分析

余星火 1,3

摘 要 对于采用非奇异终端滑模控制的二阶系统, 考虑到不同的初始 状态, 研究了其相轨迹的分布规律, 给出了临界曲面的概念和解析表达. 基于相轨迹的分布, 考虑了系统初始状态与到达滑模面时间的关系, 探讨 了到达时间最大值的估计算法,并给出了非奇异终端滑模控制系统的收 敛时间的数学表达. 通过仿真验证了相轨迹的分布规律和临界曲面的正 确性, 以及根据系统初值估计到达时间的有效性.

关键词 非奇异终端滑模,相轨迹分析,到达时间,收敛性

引用格式 穆朝絮, 余星火, 孙长银. 非奇异终端滑模控制系统相轨迹和 暂态分析. 自动化学报, 2013, 39(6): 902-908

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00902

## Phase Trajectory and Transient Analysis for Nonsingular Terminal Sliding Mode Control Systems

YU Xing-Huo<sup>1, 3</sup> MU Chao-Xu<sup>1, 2</sup> SUN Chang-Yin<sup>1</sup>

Abstract In this paper, for second order nonlinear systems with nonsingular terminal sliding mode (NTSM) control, phase trajectory patterns and critical surfaces are studied. The relationship between the initial state and the sliding mode reaching time is explored and a reaching time estimation algorithm is given. Simulations are presented to show the effectiveness of the analysis and algorithm.

Key words Nonsingular terminal sliding mode (NTSM), phase plane portraits, reaching time, convergence

Citation Mu Chao-Xu, Yu Xing-Huo, Sun Chang-Yin. Phase trajectory and transient analysis for nonsingular terminal sliding mode control systems. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(6):

滑模变结构控制是一类特殊的非线性控制方法, 它通过 设计系统到达的滑模动态,来保证系统的动态性能. 因其对 参数不确定和外界干扰不灵敏、鲁棒性好、物理实现简单,已 被广泛应用于各类非线性系统控制中[1-2]. 传统滑模控制方 法设计的线性滑模面, 当系统状态到达滑模面后, 将渐近收 敛到系统的平衡点, 而不是有限时间收敛的.

终端滑模 (Terminal sliding mode) 控制方法, 实现了系 统状态的有限时间收敛, 获得了比传统滑模控制方法更好的

录用日期 2012-11-30 收稿日期 2012-07-18

Manuscript July 18, 2012; accepted November 30, 2012 国家自然科学基金 (61125306, 91016004, 61034002), 教育部博士点基金 (20110092110020) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61125306, 91016004, 61034002) and Dotoral Programs Foundation of Ministry of Education of China (20110092110020)

本文责任编委 刘允刚

Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang

1. 东南大学自动化学院 南京 210096 中国 2. 天津大学电气与自动化工程学院 天津 300072 中国 3. 皇家墨尔本理工大学工业技术研究院 墨尔本 3001 澳 大利亚

1. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China 2. Department of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China 3. Platform Technologies Research Institute, Royal Melbourne Institute of Technology University, Melbourne 3001, Australia

收敛性能. 文献 [3-6] 提出了终端滑模控制方法, 已被应用到 机械臂等二阶非线性系统的控制问题中[3,6]. 但是终端滑模 控制方法存在奇异区域, 在奇异区域控制作用将趋于无穷大. 通常的解决方法是间接的,如文献[7] 采用了两阶段控制策 略, 文献 [8] 采用了在奇异区域将终端滑模面切换成线性滑模 面的方法. 文献 [9-10] 提出了非奇异终端滑模 (Nonsingular terminal sliding mode, NTSM) 的控制方法, 直接克服了终 端滑模的奇异性问题,并具有和终端滑模相似的特性,可以实 现系统状态的有限时间到达,并获得更高的收敛精度等. 由 于非奇异终端滑模控制方法具有较好的控制性能,得到了广 泛的认可, 在机械臂、电机控制等领域的应用也很多[11-14].

本文对非奇异终端滑模控制方法的相轨迹和稳定时间进 行研究. 对于采用非奇异终端滑模控制器的二阶非线性系统, 从任意初始状态出发,其系统状态有限时间到达滑模面,并 在有限时间到达平衡点. 本文给出了系统状态相轨迹分布规 律, 描述了相平面中的临界曲面的概念并给出了其解析表达. 进一步, 本文考虑了系统初始状态与到达时间的关系, 给出 了系统状态从初始位置到达滑模面所需最大时间的估计. 仿 真证明了相轨迹的分布规律和临界曲面的描述是正确的,对 于到达时间的估计是有效的.

## 终端滑模控制的基本理论

### 1.1 传统终端滑模控制

考虑如下一个二阶非线性系统:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \tag{1}$$

这里  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$  表示系统的状态,  $f(\boldsymbol{x})$  和  $b(\boldsymbol{x})$  是状态  $\boldsymbol{x}$ 的光滑非线性函数, 且  $|b(\mathbf{x})| \neq 0$ , u 是控制输入.  $g(\mathbf{x})$  是有 界干扰, 且  $|g(\mathbf{x})| \leq l_q$ . 为了获得更好的收敛性能, 在滑模面 的设计中引入了非线性函数,设计了如下形式的终端滑模面:

$$s = x_2 + \lambda x_1^{\frac{q}{p}} \tag{2}$$

其中,  $\lambda > 0$  是待设计的滑模面参数, q 和 p 是正奇数且满足

为满足 s=0 附近滑模存在性条件  $s\dot{s}<0$ , 取控制  $u = -b^{-1}(\boldsymbol{x})(f(\boldsymbol{x}) + \lambda \frac{q}{n} x_1^{\frac{q}{p}-1} x_2 + \kappa \operatorname{sgn}(s)), \kappa$  是滑模增益, 且  $\kappa > l_q$ ,  $\kappa = l_q + \eta$ ,  $\eta > 0$ , 则:

$$s\dot{s} = s\left(\dot{x}_2 + \lambda \frac{q}{p} x_1^{\frac{q}{p} - 1} \dot{x}_1\right) =$$

$$s\left(g(\mathbf{x}) - \kappa \operatorname{sgn}(s)\right) \le -\eta |s| < 0 \tag{3}$$

终端滑模是存在的.

为了便于研究,给出终端滑模控制中关于时间的定义.

**定义 1.** 系统状态从初始位置  $(x_1(0), x_2(0))$  到达滑模面 s=0 的时间, 定义为到达时间, 记为  $t_r$ , 滑模面上到达点的 坐标记为  $(x_1(t_r), x_2(t_r))$ .

**定义 2.** 系统状态从到达点  $(x_1(t_r), x_2(t_r))$  沿滑模面 s=0 运动到状态零点 (0,0) 所用的时间, 定义为收敛时间, 记为  $t_c$ .

**定义 3.** 系统状态从任意非零初始位置  $(x_1(0), x_2(0))$  出 发, 到达状态零点 (0,0) 所用的时间, 定义为稳定时间, 记为  $t_s, t_s = t_r + t_c.$ 

当系统状态到达滑模面后, 滑模动态方程为

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1^{\frac{q}{p}} \tag{4}$$

定义的终端滑模具有如下属性:系统状态在 $t_r$ 时刻进入滑模面后,沿滑模面经有限时间 $t_c$ 收敛至状态零点.依据滑模动态微分方程(4),收敛时间 $t_c$ 的表达式为

$$t_c = \frac{p}{\lambda(p-q)} \left| x_1(t_r) \right|^{\frac{p-q}{p}} \tag{5}$$

上述终端滑模的设计实现了有限时间收敛的目标, 但由于控制 u 中包含了  $x_1^{\frac{q}{p}-1}x_2$ , 当  $x_1 \to 0, x_2 \neq 0$  时, 控制量会趋于无穷, 所以传统的终端滑模存在奇异性问题.

#### 1.2 非奇异终端滑模控制

对于系统 (1), 文献 [9] 定义的非奇异终端滑模面如下:

$$s = x_1 + \frac{1}{\lambda} x_2^{\frac{p}{q}} \tag{6}$$

其中,  $\lambda > 0$ , 正奇数 p, q 满足 q . 为了满足在 <math>s = 0 附近滑模存在性条件  $s\dot{s} < 0$ , 设计控制量为

$$u = -b^{-1}(\boldsymbol{x}) \left( f(\boldsymbol{x}) + \lambda \frac{q}{p} x_2^{2 - \frac{p}{q}} + \kappa \operatorname{sgn}(s) \right)$$
 (7)

其中,  $\kappa > l_g$ ,  $\kappa = l_g + \eta$ ,  $\eta > 0$ . 非奇异终端滑模面存在性条件为

$$s\dot{s} = s\left(\dot{x}_1 + \frac{1}{\lambda} \frac{p}{q} x_2^{\frac{p}{q} - 1} \dot{x}_2\right) = s\left[x_2 + \frac{1}{\lambda} \frac{p}{q} x_2^{\frac{p}{q} - 1} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u)\right]$$
(8)

故:

$$s\dot{s} \le -s \left( \frac{1}{\lambda} \frac{p}{a} x_2^{\frac{p}{q}-1} \eta \operatorname{sgn}(s) \right) = -\frac{\eta}{\lambda} \frac{p}{a} x_2^{\frac{p}{q}-1} |s| \qquad (9)$$

由于  $x_2^{\frac{p}{q}-1}$  在  $x_2 \neq 0$  时, 总是大于 0 的, 故  $s\dot{s} < 0$  成立.

## 2 非奇异终端滑模分析

对于有界干扰和不确定的处理, 滑模控制方法是使用较大的滑模增益来抵消干扰的作用. 因此, 为分析方便, 暂且忽略系统 (1) 中的干扰项  $g(\boldsymbol{x})$ , 考虑如下简单的非线性二阶系统:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \tag{10}$$

系统的终端滑模控制量取为  $u=-b^{-1}(\boldsymbol{x})(f(\boldsymbol{x})+\lambda_p^q x_2^{2-\frac{p}{q}}+\eta \mathrm{sgn}(s)),$   $\eta>0.$  那么采用非奇异终端滑模控制方法的闭环系统为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda \frac{q}{p} x_2^{2 - \frac{p}{q}} - \eta \operatorname{sgn}(s)$$
(11)

下面研究这个闭环系统的相轨迹分布和一些时间特性.

#### 2.1 非奇异终端滑模相轨迹分析

设在  $\dot{x}_2 = 0$  之前,系统状态已经到达滑模面.图 1 给出了非奇异终端滑模方法控制下的闭环系统初始状态在相空间的可能位置.我们来研究在不同初始位置时系统状态收敛到平衡点 (0,0) 的相轨迹.

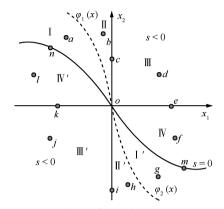


图 1 非奇异终端滑模闭环系统相平面初始位置图

Fig. 1 Different initial points in the phase space for the NTSM control system

首先, 看 s > 0 情况, 闭环系统的动态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 
\dot{x}_2 = -\lambda \frac{q}{n} x_2^{2-\frac{p}{q}} - \eta$$
(12)

系统可能的初始位置包括 a, b, c, d, e, f 这 6 种情况.

定理 1. 相平面中初始值位于区域 I 中的状态 a, 不会穿越临界曲面  $\varphi_1(\mathbf{x})$ , 直接到达滑模面 s=0, 并沿滑模面到达平衡点. 临界曲面  $\varphi_1(\mathbf{x})$  的初始位置 (0,0), 微分方程为

$$\dot{x}_1 = -x_2 
\dot{x}_2 = \lambda \frac{q}{n} x_2^{2 - \frac{p}{q}} + \eta$$
(13)

证明. 初始值位于区域 I 中的状态 a, 由于  $\dot{x}_1=x_2>0$ ,  $\dot{x}_2<-\eta$ , 相轨迹将沿  $x_1$  轴的正方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 区域 I 存在状态点 a', 在沿  $x_1$  轴的正方向和  $x_2$  轴的负方向运动一段时间后直接到达原点, 状态点 a' 构成的曲面, 就是临界曲面  $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ . 状态点 a' 满足微分方程 (12), 但是点 a' 是未知的. 构造从 (0,0) 点出发的微分方程 (13), 其方向与点 a' 构成的曲面相反, 但是微分方程 (13) 给出了点 a' 构成的临界曲面方程. 位于临界曲面上的点 a' 沿临界曲面到达滑模面, 到达点即是平衡点.

对于位于区域 I 中的任意状态 a, 设其坐标为  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ , 设其邻域内另一点的坐标为  $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ , 根据李普希兹条件, 对于微分方程 (12), 有  $\|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\| \le \iota \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ ,

$$\Delta = \|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\|_{1} = |x_{2} - y_{2}| + \left| \left( -\lambda \frac{q}{p} x_{2}^{2 - \frac{p}{q}} - \eta \right) - \left( -\lambda \frac{q}{p} y_{2}^{2 - \frac{p}{q}} - \eta \right) \right| = |x_{2} - y_{2}| + \lambda \frac{q}{p} \left| x_{2}^{2 - \frac{p}{q}} - y_{2}^{2 - \frac{p}{q}} \right|$$

$$(14)$$

在 I 中,  $\exists \xi > 0$ , 使得  $z(x) = x^{2-\frac{p}{q}}$  在  $[x_2 - \xi, x_2 + \xi]$  上连续, 在  $(x_2 - \xi, x_2 + \xi)$  上存在有限导数 z'(x), 即  $x_2^{2-\frac{p}{q}}$  和  $y_2^{2-\frac{p}{q}}$ 

存在有限导数, 那么在  $[x_2-\xi,x_2+\xi]$  上必存在一点  $\zeta$  满足:

$$\Delta \leq |x_2 - y_2| + \lambda \frac{q}{p} z'(\zeta) |x_2 - y_2| \leq$$

$$\left(1 + \lambda \frac{q}{p} z'(\zeta)\right) (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) =$$

$$\iota ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_1 \tag{15}$$

所以对位于区域 I 中的任意一点 a 的邻域来说, F(x) 在这个邻域内是满足李普希兹条件的. 假设初始值位于区域 I 中的状态 a 的相轨迹可以穿越临界曲面, 那么从点 a 出发必存在两条轨线, 可以到达平衡点. 微分方程的解不唯一, 这与 I 中的 F(x) 在点 a 的邻域满足李普希兹条件矛盾. 故假设不成立. 所以初始值位于区域 I 中的状态 a 不会穿越临界曲面. 参见图 2.

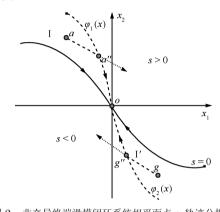


图 2 非奇异终端滑模闭环系统相平面点 a 轨迹分析图 Fig. 2 Trajectories analysis of point a in the phase space for the NTSM control system

相平面中初始值位于区域 I 中的状态 a, 由于  $\dot{x}_1 > 0$ ,  $\dot{x}_2 < -\eta$ , 状态 a 沿  $x_1$  轴的正方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 但不会穿越临界曲面  $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ , 直接到达滑模面 s=0, 并沿滑模面到达平衡点.

相平面中初始值位于区域 II 中的状态 b, 由于  $\dot{x}_1 > 0$ ,  $\dot{x}_2 < -\eta$ , 状态 b 沿  $x_1$  轴的正方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 并将穿越  $x_2$  轴正半轴和  $x_1$  轴正半轴一次, 之后由于  $\dot{x}_1 < 0$ ,  $\dot{x}_2 < -l\eta$ , 0 < l < 1, 状态 b 沿  $x_1$  轴的负方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 到达滑模面 s = 0, 并沿滑模面到达平衡点.

相平面中初始值位于区域 III 中的状态 d, 沿  $x_1$  轴的正方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 并将穿越  $x_1$  轴正半轴一次, 之后状态 d 沿  $x_1$  轴的负方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 到达滑模面 s=0, 并沿滑模面到达平衡点.

相平面中初始值位于区域 IV 中的状态 f, 沿  $x_1$  轴的负方向和  $x_2$  轴的负方向运动, 直接到达滑模面 s=0, 并沿滑模面到达平衡点.

相平面中初始值  $x_2$  轴正半轴上的状态 c, 其相轨迹运动情况与状态点 d 相同.

相平面中初始值位于  $x_1$  轴正半轴上的状态 e, 其相轨迹运动情况与状态点 f 相同.

当 s<0 时,系统可能的初始位置包括从 g,h,i,j,k,l 这 6 种情况.

定理 2. 相平面中初始值位于区域 I' 中的状态 g, 不会穿越临界曲面  $\varphi_2(\boldsymbol{x})$ , 直接到达滑模面 s=0, 并沿滑模面到达

平衡点. 临界曲面  $\varphi_2(\boldsymbol{x})$  的初始位置 (0,0), 微分方程为

$$\dot{x}_1 = -x_2 
\dot{x}_2 = \lambda \frac{q}{p} x_2^{2 - \frac{p}{q}} - \eta$$
(16)

证明. 同定理 1, 略.

相平面中初始值位于区域 I', II', III', IV' 中的状态 g, h, j, l, 其相轨迹分别与 I, II, III, IV 中状态 a, b, d, f 的相轨迹关于原点对称.

相平面中初始值位于  $x_2$  轴负半轴上的状态 i, 其相轨迹运动情况与状态点 i 相同.

相平面中初始值位于  $x_1$  轴负半轴上的状态 k, 其相轨迹运动情况与状态点 l 相同.

当 s = 0 时, 系统所有可能的初始位置包括 m, n 两种情况, 其相轨迹沿滑模面到达平衡点.

#### 2.2 非奇异终端滑模暂态时间分析

对于采用非奇异终端滑模控制的闭环系统 (11), 选择李亚普诺夫函数  $V=s^2/2$ , 其导数为

$$\dot{V} = s\dot{s} = -\frac{1}{\lambda} \frac{p}{q} x_2^{\frac{p}{q} - 1} \eta |s| = -\sqrt{2} \frac{p\eta}{\lambda q} x_2^{\frac{p}{q} - 1} V^{\frac{1}{2}} = -\rho(x_2) V^{\frac{1}{2}}$$
(17)

其中,  $\rho(x_2) = \sqrt{2} \frac{pn}{\lambda_q} x_2^{\frac{p}{q}-1}$ . 由此可得, 当  $x_2 \neq 0$  时, 系统将在有限时间  $t_r$  内到达滑模面 s=0.

现在讨论  $x_2 = 0$  的情况, 到达时间  $t_r$  是否有限. 由于  $\dot{x}_2 = f(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$ , 代入控制量 u 的表达式, 可以得到关于  $x_2$  的微分方程:

$$\dot{x}_2 = -\lambda \frac{q}{p} x_2^{2 - \frac{p}{q}} - \eta \operatorname{sgn}(s) \tag{18}$$

由于  $x_2^{2-\frac{p}{q}}$  与  $x_2$  同号,可以看出,当 s>0 时, $\dot{x}_2\leq -\eta$ ;当 s<0 时, $\dot{x}_2\geq \eta$ .

假设在  $x_2=0$  附近存在一个  $\delta$  ( $\delta>0$ ) 邻域,有  $|x_2|\leq\delta$ , 在此邻域内,有 s>0 时,  $\dot{x}_2\leq-\eta$ , s<0 时,  $\dot{x}_2\geq\eta$ , 所以状态轨迹不可能停留在  $(x_1\neq0,x_2=0)$ , 必将穿过  $x_2=0^{[12]}$ . 当 s>0 时,状态轨线从  $x_2<\delta$  邻域进入  $x_2\geq-\delta$  邻域;当 s<0 时,状态轨线从  $x_2>-\delta$  邻域进入  $x_2\leq\delta$  邻域.由于  $x_2\neq0$  时,系统状态将在有限时间内到达滑模面 s=0. 因此,可以得到,在  $x_1-x_2$  的相平面内任意一点,都可以在有限时间  $t_r$  内到达滑模面 s=0.

当系统状态到达滑模面 s=0 时,由滑模面方程  $s=x_1+\frac{1}{\lambda}{\rm sgn}(x_2)|x_2|^{\frac{p}{q}}=0$ ,可以得到系统动态将在有限时间内收敛到状态原点,收敛时间  $t_c$  的表达式如下:

$$t_c = \frac{p\lambda^{-\frac{q}{p}}}{p-q} |x_1(t_r)|^{\frac{p-q}{p}}$$
 (19)

滑模面是关于原点对称的,关于原点对称的相空间的点 到达时间和收敛时间都是相等的.

## 2.3 到达时间的估计算法

在已知初值的情况下,给出到达时间  $t_r$  的估计算法. 图 3 给出了估计算法中系统状态相轨迹示意图.

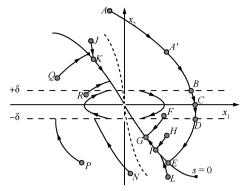


图 3 估计算法中系统状态相轨迹示意图

Fig. 3 Trajectories of states in the estimating algorithm

考察 s>0 的情况,系统状态所有可能的状态初始点包括 A, A', F, H, J. 从初始点 A, 穿越  $x_1=0$  到达 A', 继续沿  $x_1$  轴正方向前行过点 B 进入  $+\delta$  邻域,直至到达  $x_2=0$  的点 C, 穿越  $x_1$  轴并沿  $x_1$  轴负方向前行进入  $-\delta$  邻域运行至点 D, 继续运动直至到达滑模面上的点 E, 完成一个到达过程.

上述过程中, 依据  $x_2$  的微分方程  $\dot{x}_2 = -\lambda_p^q x_2^{2-\frac{p}{q}} - \eta_{\rm sgn}(s)$ , 1 < p/q < 2,  $\lambda > 0$ , 故  $\lambda_p^q x_2^{2-\frac{p}{q}}$  始终保持与  $x_2$  同号

从点 A 至点 C,  $x_2 \ge 0$  使得  $\dot{x}_2 \le -\eta$ , 故从点 A 到点 C 所花费的时间  $t_{AC}$  满足下面的不等式:

$$t_{AC} \le \frac{x_2(0)}{\eta} \tag{20}$$

从点 C 至点 D,  $-\delta \le x_2 < 0$  使得  $\dot{x}_2 \le -k\eta$ , 0 < k < 1, 所以从点 A 到点 D 的运行时间  $t_{AD}$  满足:

$$t_{AD} \le t_{AC} + \frac{\delta}{kn} \tag{21}$$

依据关系式  $-\lambda \frac{q}{p} x_2^{2-\frac{p}{q}} - \eta \le -k\eta$ , 当  $x_2 = -\delta$  时, 等号成立, 得到  $\delta$  与 k 存在如下关系:

$$\delta = \left(\frac{(1-k)p\eta}{\lambda q}\right)^{\frac{q}{2q-p}}$$

从点 D 至点 E,  $x_2 < -\delta$ , 在式 (17) 中, 记  $\rho(x_2) = \sqrt{2}\frac{1}{\lambda}\frac{p}{q}\eta x_2^{\frac{p}{q}-1}$ ,  $\rho'(x_2) = \frac{1}{\lambda}\frac{p}{q}\eta x_2^{\frac{p}{q}-1}$ , 由于  $x_2^{\frac{p}{q}-1}$  始终为正值, 点  $Dx_2^{\frac{p}{q}-1}$  值记为  $x_2^{\frac{p}{q}-1}(t_{AD})$ , 点 E 值记为  $x_2^{\frac{p}{q}-1}(t_{AE})$ , 则  $\rho(x_2(t_{AD})) < \rho(x_2(t_{AE}))$ . 所以从点 D 到点 E 过程中,李雅普诺夫函数满足下面的不等式:

$$\dot{V} \le -\rho(x_2(t_{AD}))V^{\frac{1}{2}}$$
 (22)

在  $t_{AD}$  时刻,

$$V^{\frac{1}{2}}(t_{AD}) = \frac{\sqrt{2}|s(t_{AD})|}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(x_1(t_{AD}) + \frac{1}{\lambda}x_2^{\frac{p}{q}}(t_{AD})\right)}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left|x_1(t_{AC}) - \frac{1}{\lambda}\delta^{\frac{p}{q}}\right|$$
(23)

由于  $t_{AC}$  时刻,  $\ddot{x}_1 = -\eta$ , 通过适当选取参数  $a \geq |x_2(0)|$ , 可以得到:

$$x_1(t_{AC}) = x_1(0) - \frac{\eta}{2}t_{AC}^2 + a * t_{AC} \le$$

$$x_1(0) - \frac{x_2^2(0)}{2\eta} + \frac{ax_2(0)}{\eta} \tag{24}$$

在  $t_{AE}$  时刻,  $V(t_{AE}) = 0$ , 故:

$$t_{AE} \le t_{AD} + \frac{2}{\rho(x_2(t_{AD}))} V^{\frac{1}{2}}(t_{AD}) = t_{AD} + \frac{1}{\rho'(x_2(t_{AD}))} \left| x_1(0) - \frac{x_2^2(0)}{2\eta} + \frac{ax_2(0)}{\eta} - \frac{\delta^{\frac{p}{q}}}{\lambda} \right|$$
(25)

可以得到, 从 A, A' 出发的状态到达滑模面所需时间  $t_r^{(1)}$  的估计式为

$$t_r^{(1)} \le \frac{x_2(0)}{\eta} + \frac{\delta}{k\eta} + \frac{\lambda q \delta^{\frac{q-p}{q}}}{p\eta} \left| x_1(0) - \frac{x_2^2(0)}{2\eta} + \frac{ax_2(0)}{\eta} - \frac{\delta^{\frac{p}{q}}}{\lambda} \right|$$
(26)

从点 F、点 H、点 J 出发的状态,不需要穿越  $x_2$  轴和  $x_1$  轴,直接到达滑模面,到达时间的计算方法是相同的. 根据李亚普诺夫方程 (17),可以得到:

$$t_r^{(2)} \le \frac{\sqrt{2V(0)}}{\rho'(x_2(0))} = \frac{qx_2^{\frac{q-p}{q}}(0)}{p\eta} \left| \lambda x_1(0) + x_2^{\frac{p}{q}}(0) \right|$$
(27)

对 s < 0 的情况推导类似.

由于滑模面是关于原点对称的,在上面的讨论中,实际上空间中的所有点被分为两种情况,分别是 A, A', N, P 和 F, H, J, L, Q, R. 其中, A, A', F, H, J 与其关于原点对称的点  $A^*, A'^*, F^*, H^*, J^*$  到达滑模面的时间是相等的.

注 1. 对于一个存在有界干扰的系统:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u$$
(28)

干扰  $g(\mathbf{x})$  满足有界性条件  $\parallel g(\mathbf{x}) \parallel \leq l_g$ ,通过增大滑模增益来抑制干扰,选取适当的  $\kappa$ ,上述公式仍然适用.

## 3 仿真举例

我们考察如下简单的二阶系统:

$$\dot{x}_1 = x_2 
\dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2) + 0.1\cos(y) + u$$
(29)

其中,  $y \in [-2\pi, 2\pi]$  之间的随机数,  $0.1\cos(y)$  为干扰项, 且  $\parallel 0.1\cos(y) \parallel \le 0.1$ . 在 p = 5, q = 3,  $\lambda = 2$ ,  $\kappa = 5.0$  的情况下, 非奇异终端滑模面的形式如式 (6), 控制量设计为

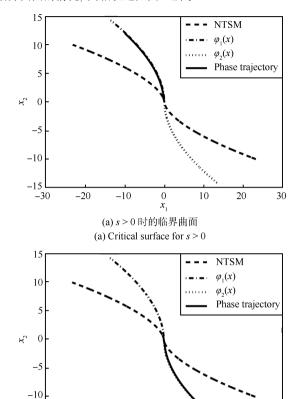
$$u = -\left(\sin(x_1 + x_2) + 1.2x_2^{\frac{1}{3}} + 5\operatorname{sgn}(s)\right)$$
 (30)

系统初值如表 1.

表 1 系统状态初始值 Table 1 Initial values of states

$(x_1, x_2)$	1	2	3
1	(-15, 10)	(-10, 10)	(-5, 10)
2	(0, 10)	(5, 10)	(15, 10)
3	(15, -10)	(10, -10)	(5, -10)
4	(0, -10)	(-5, -10)	(-15, -10)
5	(25, -2)	(-25, 2)	(20, 0)
6	(-20, 0)	(10, -12)	(-10, 12)

初始点 (10,-12) 和 (-10,12) 验证了非线性系统存在临界曲面的情况,其相轨迹如图 4 所示.



(b) Critical surface for *s* < 0 图 4 非奇异终端滑模控制的临界曲面仿真图

-15

-20

图 5 给出了不同初始状态下非奇异终端滑模控制下闭环系统的相轨迹图.

Fig. 4 The critical surfaces of NTSM control

(b) s < 0 时的临界曲面

0

10

30

初始点在 (-15,10)、(-10,10)、(15,-10)、(10,-10)的系统状态,不穿越临界轨线,不穿越 $x_1$ 和 $x_2$ 轴,直接到达滑模面,系统的状态轨线如图 5 (a)  $\sim$  (d) 所示;初始点在 (0,10)、(5,10)、(15,10) 的系统状态将穿越一次 $x_1$ 正半轴,(0,-10)、(-5,-10)、(-15,-10) 将穿越一次 $x_1$ 负半轴,系统的状态轨线如图 5 (e)  $\sim$  (j) 所示;初始点在 (25,-2)、(-25,2)、(20,0)、(-20,0) 不穿越 $x_1$ 和 $x_2$ 轴,系统的状态轨线如图 5 (k)  $\sim$  (n) 所示;初始点在 (-5,10)和(5,-10)系统状态,将穿越 $x_1$ 和 $x_2$ 轴到达滑模面,系统状态轨线如图 5 (o), (p) 所示.

表 2 给出了系统状态到达滑模面的位置及到达时间最大值的估计. 表 2 中  $(x_1(t_r),x_2(t_r))$  表示系统状态到达滑模面点的坐标;  $t_{r_{(est)}}$  表示到达时间的最大估计值  $(k=0.6,a=2|x_2(0)|),t_{r_{(sim)}}$  是仿真中获得的到达时间,  $t_c$  是系统状态的收敛时间. 表 2 中,和计算机获得的到达时间比较,在仅仅已知初值的情况下给出了到达时间的最大值,但到达时间上界的估计与 k、 $\delta$  的选取有关.  $t_c$  给出了按式 (17) 计算的系统状态的收敛时间. 这样,我们就可以估计出系统从初始状态开始,将在不超过  $t_{r_{(est)}}+t_c$  的时间内到达平衡点.

表 2 系统状态到达点位置及到达时间最大值估计
Table 2 Reaching points and the largest reaching
time estimation

初值	到达点	$t_{r_{(\mathrm{est})}}$	$t_{r_{(sim)}}$	$t_c$
(-15, 10)	(-11.47, 6.88)	2.82	0.42	4.37
(-10, 10)	(-4.34, 4.14)	3.08	0.80	2.96
(-5, 10)	(1.74, -1.27)	5.14	1.76	2.05
(0, 10)	(5.11, -3.54)	5.57	2.43	3.16
(5, 10)	(8.17, -4.95)	6.01	2.89	3.82
(15, 10)	(13.80, -7.00)	6.87	3.62	4.71
(15, -10)	(11.47, -6.88)	2.82	0.41	4.37
(10, -10)	(4.34, -4.14)	3.08	0.80	2.96
(5, -10)	(-1.74, 1.27)	5.14	1.76	2.05
(0, -10)	(-5.11, 3.54)	5.57	2.43	3.16
(-5, -10)	(-8.17, 4.95)	6.01	2.89	3.82
(-15, -10)	(-13.80, 7.00)	6.87	3.62	4.71
(25, -2)	(15.60, -7.58)	3.05	1.88	4.96
(-25, 2)	(-15.61, 7.58)	3.05	1.88	4.96
(20, 0)	(12.74, -6.65)	2.71	2.04	4.56
(-20, 0)	(-12.74, 6.65)	2.71	2.04	4.56
(10, -12)	(0.48, -1.91)	3.86	1.39	1.21
(-10, 12)	(-0.47, 1.91)	3.86	1.39	1.22

表 3 给出了不同 k 值条件下系统到达时间最大值的估计.  $t_{r_{(\text{sim})}}$  表示了由仿真给出的到达时间, 不同的 k 值对应了不同的  $\delta$ , 与估计的到达时间是非线性函数关系. 从表 3 中可以观察到, k 取 0.6 时可以获得较好的最大值估计. 初始状态点 (-15,10)、(-10,10)、(15,-10)、(10,-10)、(25,-2)、(-25,2)、(10,-12)、(-10,12) 的到达时间最大值估计与  $\delta$  邻域无关, 故保持不变.

表 3 不同 k 值下系统状态的到达时间最大值估计 Table 3 The largest reaching time estimation in different k value

-							
初值	$t_{r_{(\mathrm{sim})}}$	k					
		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
(-15, 10)	0.42	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82
(-10, 10)	0.80	3.08	3.08	3.08	3.08	3.08	3.08
(-5, 10)	1.76	20.81	10.72	5.91	5.14	6.16	10.71
(0, 10)	2.43	20.67	10.53	6.19	5.57	6.93	12.44
(5, 10)	2.89	20.53	10.34	6.46	6.01	7.69	14.17
(15, 10)	3.62	20.24	9.95	7.02	6.87	9.23	17.62
(15, -10)	0.42	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82	2.82
(10, -10)	0.80	3.08	3.08	3.08	3.08	3.08	3.08
(5, -10)	1.76	20.81	10.72	5.91	5.14	6.16	10.71
(0, -10)	2.43	20.67	10.53	6.19	5.57	6.93	12.44
(-5, -10)	2.89	20.53	10.34	6.46	6.01	7.69	14.17
(-15, -10)	3.62	20.24	9.95	7.02	6.87	9.23	17.62
(25, -2)	1.88	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05
(-25, 2)	1.88	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05
(20, 0)	2.04	18.95	8.91	3.63	2.71	3.39	6.98
(-20, 0)	2.04	18.95	8.91	3.63	2.71	3.39	6.98
(10, -12)	1.39	3.86	3.86	3.86	3.86	3.86	3.86
(-10, 12)	1.39	3.86	3.86	3.86	3.86	3.86	3.86

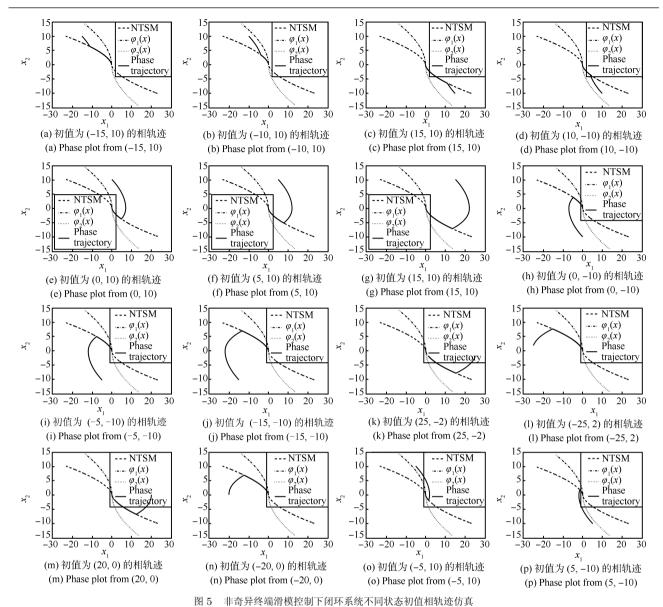


Fig. 5 The phase trajectories of a dynamic system using NTSM control with different initial state values

## 4 结论

本文给出了非奇异终端滑模控制的闭环系统的相轨迹分析,在初值已知的条件下,对系统状态的到达时间进行了初步的估计.仿真证明了相轨迹的运行和系统的初始状态相关,当初始状态一定时,相轨迹将按一定规律进行,并验证了相轨迹中临界曲面的存在性和正确性.同时对系统状态到达滑模面时间的最大值进行了估计,分析了干扰和滑模增益对系统相轨迹的影响.这样,在已知系统初始状态的条件下,可以预测系统状态的运行轨迹,并估计到达时间上界,最终可以获得系统到达平衡点的稳定时间的估计.

#### References

- 1 Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes: a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **22**(2): 212–222
- 2 Sabanovic A. Variable structure systems with sliding modes in motion control — a survey. *IEEE Transactions on Indus*-

trial Informatics, 2011, 7(2): 212-223

- 3 Man Z H, Paplinski A P, Wu H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2464–2469
- 4 Yu X H, Man Z H. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes. *International Journal of Control*, 1996, **66**(6): 1165–1176
- 5 Yu X H, Man Z H. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, **49**(2): 261–264
- 6 Man Z H, Yu X H. Adaptive terminal sliding mode tracking control for rigid robotic manipulators with uncertain dynamics. JSME International Journal Series C-Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, 1997, 40(3): 493-502

- 7 Wu Y Q, Yu X H, Man Z H. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems. Systems and Control Letters, 1998, 34(5): 281–288
- 8 Man Z H, Yu X H. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, **44**(11): 1065–1070
- 9 Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167
- 10 Feng Yong, Bao Sheng, Yu Xing-Huo. Design method of nonsingular terminal sliding mode control systems. *Control and Decision*, 2002, **17**(2): 194–198 (冯勇, 鲍晟, 余星火. 非奇异终端滑模控制系统的设计方法. 控制与 决策, 2002, **17**(2): 194–198)
- 11 Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, Man Z H. Continuous finitetime control for robotic manipulators with terminal sliding mode. Automatica, 2005, 41(11): 1957–1964
- 12 Li Shi-Hua, Ding Shi-Hong, Tian Yu-Ping. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 101–104 (李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法. 自动化学报, 2007, **33**(1): 101–104)
- 13 Wang Y N, Zhang X Z, Yuan X F. Hybrid non-singular terminal sliding-mode controller design for an electric vehicle system with a brushless DC motor. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2010, 224(5): 493-508
- 14 Nekoukar V, Erfanian A. Adaptive fuzzy terminal sliding mode control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 179(1): 34-49

穆朝絮 博士, 天津大学电气与自动化工程学院讲师. 主要研究方向为变结构与非线性控制理论与应用, 飞行控制.

E-mail: mcx@seu.edu.cn

(MU Chao-Xu Ph.D., lecturer in the Department of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University. Her research interest covers variable structure and nonlinear control theory and application, and flight control.)

**余星火** 皇家墨尔本理工大学工业技术研究院院长, 东南大学长江讲座 教授. 主要研究方向为变结构控制理论, 复杂网络与系统理论智能系统与 控制工程. E-mail: x.yu@rmit.edu.au

(YU Xing-Huo Founding director of the Platform Technologies Research Institute of RMIT University, Chang Jiang Chair Professor at Southeast University. His research interest covers variable structure theory, complex systems and networks, intelligent systems and control engineering.)

**孙长银** 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为非线性系统分析与优化, 智能控制控制, 模式识别. 本文通信作者.

E-mail: cvsun@seu.edu.cn

(SUN Chang-Yin Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear systems analysis and optimization, intelligent control, and pattern recognization. Corresponding author of this paper.)