# 基于 EKF 的集中式融合估计研究

葛泉波1 李文斌1 孙若愚2 徐姿3

**摘 要** 以一类非线性多传感器动态系统为对象,基于扩展 Kalman 滤波器 (Extend Kalman filter, EKF) 介绍三种典型非 线性集中式融合算法,并以此为基础研究部分线性动态系统融合理论在非线性系统中的推广与完善.首先,利用 EKF 的一种 信息滤波器形式 (Extend information filter, EIF) 给出测量值扩维融合、测量值加权融合和顺序滤波融合算法公式,进而研 究三种非线性融合算法的估计性能比较以及测量值融合更新次序是否满足可交换性.结果表明:当各传感器的测量特性相同 时,集中式测量值扩维和测量值加权融合算法的估计精度功能等价;非线性顺序滤波融合与其他两种融合算法之间不再具备 线性多传感器系统中估计功能的完全等价特性;在融合精度不变前提下非线性顺序滤波融合中,各传感器观测更新次序不再 完全满足可交换性.4 个基于纯方位目标跟踪的数值仿真被用来验证文中所得结论的有效性和正确性.

关键词 非线性系统,扩展信息滤波,集中式融合,等价性,协方差阵

**引用格式** 葛泉波, 李文斌, 孙若愚, 徐姿. 基于 EKF 的集中式融合估计研究. 自动化学报, 2013, **39**(6): 816-825 **DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00816

# Centralized Fusion Algorithms Based on EKF for Multisensor

# Non-linear Systems

 $GE \ Quan-Bo^1 \qquad LI \ Wen-Bin^1 \qquad SUN \ Ruo-Yu^2 \qquad XU \ Zi^3$ 

Abstract Aiming at a kind of nonlinear multisensor systems, we study three classic nonlinear centralized fusion algorithms based on the extend Kalman filter (EKF) and extend some fusion theories for linear dynamic systems to nonlinear systems. On the basis of extend information filter (EIF), three kinds of fusion algorithms such as augmented measurements fusion, measurements weighted fusion and sequential filtering fusion are presented. Afterwards, we compare estimate accuracies of the three nonlinear fusion algorithms, and discuss the exchanging property of measurement's update order. The results are as follows. Firstly, when measurement properties are identical, the estimate of the augmented measurements fusion algorithm and the measurements weighted fusion algorithm are equivalent. Secondly, the estimate accuracy of the sequential filtering fusion does not hold completely functional equivalence in linear systems as the other two fusion methods. Thirdly, the exchanging property of the measurement's update order of nonlinear sequential filtering fusion can no longer be guaranteed. Four examples based on bearings-only tracking are shown to demonstrat the validity of the conclusions.

Key words Non-linear systems, extend information filter (EIF), centralized fusion, equivalence, covariance

Citation Ge Quan-Bo, Li Wen-Bin, Sun Ruo-Yu, Xu Zi. Centralized fusion algorithms based on EKF for multisensor non-linear systems. Acta Automatica Sinica, 2013, **39**(6): 816–825

现代科学技术的快速发展使得人们对大型复杂

系统的功能需求迅速提高,尤其是对系统状态的高 估计性能要求越来越迫切.由于单个传感器在测量 精度、范围、稳定性和可靠性方面存在明显不足,使 得人们对多传感器测量系统及其数据融合技术的 研究越来越重视.多传感器信息融合是指把多个相 同类型或不同类型的传感器所提供的局部信息在某 一准则下加以综合,利用信息互补并进行融合滤波 处理,最终形成统一的目标状态估计<sup>[1-4]</sup>.目前,多 传感器信息融合理论和方法得到了众多研究者的 关注,并已在众多民用和国防等领域得到了广泛应 用<sup>[5-18]</sup>.

从融合结构上说,多传感器融合可分为集中式 和分布式两大类.集中式融合具有精度高和计算复 杂等特点,而分布式融合在生存性和计算方面具有

收稿日期 2011-10-24 录用日期 2012-09-05

Manuscript received October 24, 2011; accepted September 5, 2012

国家自然科学基金 (61172133, 91016020, 60934009, 61273075, 61002018) 和浙江省自然科学基金 (LY12F03004) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61172133, 91016020, 60934009, 61273075, 61002018) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY12F03004) 本文责任编委 方海涛

Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao

杭州电子科技大学自动化学院系统科学与控制工程研究所 杭州 310018 中国
 明尼苏达大学电子与计算机工程系 明尼阿波利斯 55455 美国
 上海大学理学院 上海 200444 中国

Institute of Systems Science and Control Engineering, School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China
 Department of Electrical and Computer Engineering, University of Minnesota, Minneapolis 55455, USA
 College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China

一定优势,但精度有所降低.其中,集中式融合是指 将局部传感器获得的原始观测直接传送到中心进行 融合处理,其典型算法包括集中式测量值扩维融合、 测量值加权融合和顺序滤波融合三种.

对于线性多传感器动态系统,基于经典 Kalman 滤波的集中式和分布式融合理论研究已渐趋完 善<sup>[1-5]</sup>. 尤其是, 应用线性 Kalman 滤波的信息滤 波 (Information filter) 形式, 一些关于上述算法性 能的基本结论已经获得,即:1) 当各传感器测量矩 阵一致 (测量特性相同) 时, 基于融合估计误差协方 差矩阵可证明集中式测量值扩维融合与测量加权融 合在估计精度上功能等价; 2) 集中式测量值扩维融 合与顺序滤波融合具有一样的融合估计精度; 3) 三 种集中式融合估计算法中各传感器测量的融合(或 更新) 次序是可交换的; 4) 有反馈和无反馈分布式 融合算法与集中式测量扩维融合算法、顺序滤波融 合算法在估计精度上功能等价. 但是非线性系统的 融合算法结构和估计性能是与所采用的基本非线性 滤波器 (如扩展 Kalman 滤波 (Extend Kalman filter, EKF)<sup>[6]</sup>、无迹滤波 (Unscented Kalman filter, UKF)<sup>[7]</sup>、粒子滤波 (Particle filter, PF)<sup>[8-9]</sup> 和求容 积滤波 (Cubature Kalman filter, CKF)<sup>[10]</sup> 等) 有 着直接关系,即基于不同的非线性滤波器所获得同 类融合算法的性能也存在差别. 自然地, 会有如下疑 问: 对于非线性多传感器动态系统, 基于给定的具体 非线性滤波器,上述结论和性质1)~4)全部或部分 是否还保持? 或者会出现哪些不同之处? 这些问题 的解决对于非线性多传感器融合估计理论的完善有 着重要的意义.

近年来,非线性滤波器设计研究取得了一些新的成果,但对于非线性多传感器系统的集中式融合 理论与方法的研究进展较为缓慢<sup>[11-14]</sup>.

针对上述问题,本文以传统的 EKF 为基本滤波 器,研究三种集中式融合估计算法设计和性能比较 分析,并对前述线性系统中的性质1)~3)在非线性 系统中是否还成立进行深入讨论,并给出相应的定 理和解释性分析.论文主要研究工作和贡献包括:1) 基于一种扩展 Kalman 滤波 (EKF) 的信息滤波器 (Extend information filter, EIF) 形式, 给出三种典 型的集中式融合估计算法,即测量值扩维融合、测 量值加权融合和顺序滤波融合算法; 2) 结合信息矩 阵并利用归纳法证明集中式测量值扩维和集中式测 量值加权融合算法的估计精度功能等价性; 3) 研究 非线性顺序滤波融合与其他两种融合算法在估计精 度上是否还保持线性系统中的完全功能等价性问题; 4) 在融合估计精度不变条件下研究基于 EIF 的非 线性顺序滤波融合算法中各传感器观测的融合更新 次序不再满足完全可交换性问题: 5) 通过计算机数 值仿真来验证文中研究结论的正确性.

# 1 扩展卡尔曼滤波及信息形式

#### 1.1 系统描述

考虑如下离散时间非线性动态系统:

$$\boldsymbol{x}_{k} = \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k,k-1}$$
(1)

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \tag{2}$$

这里, k 为离散时间变量.  $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x \times 1}$  为系统状态,  $\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^{n_z}$  为状态测量, 且  $\boldsymbol{f}_k : \mathbf{R}^{n_x} \to \mathbf{R}^{n_x}$  和  $\boldsymbol{h}_k : \mathbf{R}^{n_x} \to \mathbf{R}^{n_z}$  均是可微函数<sup>[17]</sup>.  $n_x$  为系统 状态的维数,  $n_z$  为传感器的观测维数; { $\boldsymbol{w}_{k,k-1}$ }和 { $\boldsymbol{v}_k$ }均为零均值高斯白噪声序列, 且满足:

$$\mathbf{E}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_{k,k-1}\\\boldsymbol{v}_{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{k}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{Q}_{k,k-1} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{k}\end{array}\right] (3)$$

其中,  $Q_{k,k-1}$  为对称的非负定阵,  $R_k$  为对称正定 矩阵. 初始状态  $x_0$  为高斯随机向量, 其均值和方差 分别为  $E[x_0] = \hat{x}_{0|0}$ ,  $E[(x_0 - \hat{x}_{0|0})(x_0 - \hat{x}_{0|0})^T] = P_{0|0}$ , 且  $x_0$  与  $w_{k,k-1}$ ,  $v_k$  统计独立.

# 1.2 扩展卡尔曼滤波及信息形式

针对式(1)和(2)组成的动态估计系统,其扩展 卡尔曼滤波递推计算公式如下:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}(k)\gamma(k) \tag{4}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1|k-1})$$
 (5)

$$\boldsymbol{K}_{k} = \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{H}_{k} \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{k})^{-1} \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{P}_{k-1|k-1} \boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k,k-1} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k) \boldsymbol{P}_{k|k-1}$$
(8)

其中,  $\gamma(k) = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$  为新息向量.  $\mathbf{H}_k$  和  $\mathbf{F}_{k-1}$  为雅克比矩阵和线性化状态矩阵:

$$\boldsymbol{H}_{k} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{k}(\boldsymbol{x}_{k})}{\partial \boldsymbol{x}_{k}}|_{\boldsymbol{x}_{k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}}$$
$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_{k-1})}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}|_{\boldsymbol{x}_{k-1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}}$$
(9)

为描述扩展卡尔曼滤波的信息形式<sup>[12]</sup>,引入信息矩阵  $Y_{klk}$  和信息状态向量  $\hat{y}_{klk}$ ,并定义

$$\mathbf{Y}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k}^{-1}, \ \hat{\mathbf{y}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{Y}_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$
 (10)

应用矩阵求逆引理[1] 易得:

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1} + \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{k}^{-1} \boldsymbol{H}_{k})^{-1}$$
(11)

则可得信息矩阵的更新方程[12]:

$$\boldsymbol{Y}_{k|k} = \boldsymbol{P}_{k|k}^{-1} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1} + \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{k}^{-1} \boldsymbol{H}_{k} =$$
  
$$\boldsymbol{Y}_{k|k-1} + \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{k}^{-1} \boldsymbol{H}_{k}$$
(12)

由式 (7) 可知:

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1} = [\boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k,k-1}]^{-1} \quad (13)$$

设  $A_{k-1} = [F_{k-1}^{-1}]^{\mathrm{T}} P_{k-1|k-1}^{-1} F_{k-1}^{-1}$ ,则由矩阵求逆定 理可得信息矩阵的预测方程为

$$\boldsymbol{Y}_{k|k-1} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{k-1} [\boldsymbol{A}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_{k,k-1}^{-1}]] \boldsymbol{A}_{k-1} \quad (14)$$

信息状态向量的预测方程:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{k-1} [\boldsymbol{A}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_{k|k-1}^{-1}]^{-1}] (\boldsymbol{F}_{k-1}^{-1})^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}_{k-1|k-1}$$
(15)

信息状态向量的更新方程为

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1} + \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{k}^{-1} (\boldsymbol{z}_{k} - \boldsymbol{h}_{k}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{H}_{k} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})$$
(16)

从而,式(12)、式(14)~(16)构成了扩展信息滤波器(EIF)<sup>[12]</sup>. EIF 与 EKF 的估计精度等价.

# 2 问题描述

#### 2.1 多传感器系统描述

考虑如下由 N 个传感器组成的非线性多传感器动态目标跟踪系统,其状态方程如式 (1) 所示,观测方程为

$$\boldsymbol{z}_{i,k} = \boldsymbol{h}_{i,k}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_{i,k} \quad i = 1, \cdots, N \quad (17)$$

其中, i 表示传感器序号, N 为系统拥有的传感器 数目;  $\mathbf{z}_{i,k} \in \mathbf{R}^{n_{z_i}}$  为传感器 i 的测量向量;  $\mathbf{h}_{i,k}$  :  $\mathbf{R}^{n_x} \to \mathbf{R}^{n_{z_i}}$  为可微函数;  $\{\mathbf{v}_{i,k}\}$ 为零均值高斯白噪 声, 且满足如下统计特性:

$$\mathbf{E}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_{k,k-1}\\\boldsymbol{v}_{i,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{i,k}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{k,k-1} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{i,k}\end{bmatrix} (18)$$

其中,  $Q_{k,k-1}$  为对称的非负定阵,  $R_{i,k}$  为对称正定 矩阵. 系统的初始状态  $x_0$  与  $w_{k,k-1}$ ,  $v_{i,k}$  统计独立.

# 2.2 问题描述

针对由式 (1) 和 (17) 构成的非线性多传感器动 态系统, 基于 EIF 开展如下工作:

1) 给出三种非线性集中式融合估计算法;

 研究上述三种集中式融合算法是否依旧保持 线性系统中估计功能的完全等价性问题;

3)研究上述三种集中式融合算法在融合估计精 度不变前提下各传感器测量值的融合(更新)次序是 否依旧满足完全可交换特性.

### 3 非线性多传感器集中式融合估计算法

3.1 非线性集中式测量值扩维融合估计算法

算法 1. 非线性集中式测量值扩维融合算法

集中式测量值扩维融合<sup>[1,4]</sup>的核心思想是将多 个低维传感器量测扩维成单个高维的测量向量,然 后,对这个高维矢量进行一次滤波处理来实现多传 感器融合估计的目的.经扩维后的观测向量、观测 矩阵和观测误差可写为

$$\boldsymbol{z}_{k}^{(\mathrm{I})} = [\boldsymbol{z}_{1,k}, \cdots, \boldsymbol{z}_{N,k}], \ \boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{I})} = [\boldsymbol{h}_{1,k}, \cdots, \boldsymbol{h}_{N,k}] \ (19)$$

$$\boldsymbol{v}_{k}^{(1)} = [\boldsymbol{v}_{1,k}, \cdots, \boldsymbol{v}_{N,k}]$$
(20)

上式中, 记  $h_{i,k} = h_{i,k}(\boldsymbol{x}_k)$  和  $h_k^{(I)} = h_k^{(I)}(\boldsymbol{x}_k)$  (*i* = 1,2,…,*N*). 根据给定的条件易知:

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{v}_{k}^{(\mathrm{I})}] = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{R}_{k}^{(\mathrm{I})} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{R}_{1,k}, \cdots, \boldsymbol{R}_{N,k}\} \quad (21)$$

则扩维后的量测方程可写表示为

$$\boldsymbol{z}_{k}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{x}_{k}) + \boldsymbol{v}_{k}^{(\mathrm{I})}$$
 (22)

针对由式 (1) 和 (22) 构成的系统,应用第 1.2 节中 给出的扩展信息滤波器,即可得到基于 EIF 的非线 性集中式测量值扩维融合算法,并用 "(I)" 标识.

则集中式测量值扩维融合估计的信息矩阵为

$$\mathbf{Y}_{k|k}^{(1)} = \mathbf{Y}_{k|k-1}^{(1)} + [\mathbf{H}_{k}^{(1)}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{R}_{k}^{(1)}]^{-1} [\mathbf{H}_{k}^{(1)}] = \\
[\mathbf{P}_{k|k-1}^{(1)}]^{-1} + \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{H}_{i,k}^{(1)}]^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k}^{(1)}$$
(23)

$$\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{I})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{x}_{k})}{\partial \boldsymbol{x}_{k}} \bigg|_{\boldsymbol{x}_{k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(\mathrm{I})}}$$
(24)

$$\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{I})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{i,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \big|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(\mathrm{I})}}, \ i = 1, 2, \cdots, N \quad (25)$$

且  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(I)}$ ,  $\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{(I)}$ ,  $\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^{(I)}$  和  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{(I)}$  可分别根据式 (5)、(10)、(13) 和 (16) 计算获得.

# 3.2 非线性集中式测量值加权融合估计算法

#### 算法 2. 集中式测量值加权融合估计算法

集中式测量值加权融合<sup>[2-3]</sup> 是当各传感器测量 维数相同且对应分量意义也相同时,可通过加权方 法来获得融合后的统一观测,即有:

$$\boldsymbol{z}_{k}^{(\text{II})} = \left[\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{z}_{i,k} \qquad (26)$$

$$\boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{x}_{k}) = \left[\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{h}_{i,k} \qquad (27)$$

$$\mathbf{v}_{k}^{(\text{II})} = \left[\sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{i,k}^{-1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{v}_{i,k} \qquad (28)$$

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{v}_{k}^{(\mathrm{II})}] = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{R}_{k}^{(\mathrm{II})} = \left[\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1}\right]^{-1}$$
(29)

因此, 加权融合后的量测方程可表示为

$$\boldsymbol{z}_{k}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{x}_{k}) + \boldsymbol{v}_{k}^{(\mathrm{II})}$$
(30)

那么,针对式(1)和(30)构成的动态估计系统, 应用扩展信息滤波器,即可得到非线性集中式测量 值加权融合估计,并用"(II)"进行标识.其信息矩 阵为

$$\boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})} + [\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{R}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{-1} [\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{II})}] = [\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}]^{-1} + [\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{R}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{-1} [\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{II})}] \quad (31)$$

其中

$$\boldsymbol{H}_{k}^{(\mathrm{II})} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{h}_{k}^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{x}_{k})}{\partial \boldsymbol{x}_{k}} \right|_{\boldsymbol{x}_{k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}}$$
(32)

 $\hat{x}_{k|k-1}^{(\text{II})}$ ,  $P_{k|k-1}^{(\text{II})}$ ,  $\hat{y}_{k|k}^{(\text{II})}$  和  $\hat{x}_{k|k}^{(\text{II})}$ 的计算与第 3.1 节相同. 3.3 非线性集中式顺序滤波融合估计算法

**算法 3. 非线性集中式顺序滤波融合估计算法** 顺序滤波融合算法<sup>[1,5]</sup>的基本思想是:融合中 心首先利用先验信息和状态模型对当前时刻的状态 进行一步预测,当各传感器的量测到达融合中心时, 融合中心依次利用各传感器量测对当前状态一步预 测估计值进行顺序更新,从而可得到基于全局测量 信息的最优融合估计.这里,用"(III)"表示非线性 集中式顺序滤波融合估计算法.

下面给出基于 EKF 的集中式顺序滤波融合算 法<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{i,k|k}^{(\text{III})} = \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} + \boldsymbol{K}_{i,k}^{(\text{III})} \left[ \boldsymbol{z}_{i,k} - \boldsymbol{h}_{i}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1,k|k}^{(\text{III})}) \right] \\ \boldsymbol{P}_{i,k|k}^{(\text{III})} = \left[ \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{i,k}^{(\text{III})} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \right] \boldsymbol{P}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} \\ \boldsymbol{K}_{i,k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{P}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \times \\ \left[ \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \boldsymbol{P}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} \left[ \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \right]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_{i,k} \right]^{-1} \end{cases}$$
(33)

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 并且

$$\begin{pmatrix}
\hat{\boldsymbol{x}}_{0,k|k}^{(\text{III})} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(\text{III})} = \boldsymbol{f}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}^{(\text{III})}) \\
\boldsymbol{P}_{0,k|k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{(\text{III})} = \\
\boldsymbol{F}_{k-1}^{(\text{III})} \boldsymbol{P}_{k-1|k-1}^{(\text{III})} [\boldsymbol{F}_{k-1}^{(\text{III})}]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k,k-1}
\end{cases}$$
(34)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{III})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{i,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \Big|_{\boldsymbol{x}_k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1,k|k}^{(\mathrm{III})} \\ \boldsymbol{F}_{k-1}^{(\mathrm{III})} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \Big|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}^{(\mathrm{III})}}$$
(35)

则融合中心最终的状态估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}^{(\mathrm{III})} = \hat{\boldsymbol{x}}_{N,k|k}^{(\mathrm{III})}, \ \boldsymbol{P}_{k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{P}_{N,k|k}^{(\mathrm{III})}$$
 (36)

因此,可以得到基于 EIF 的非线性顺序滤波融 合估计器的递推计算公式为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{y}}_{i,k|k}^{(\text{III})} = \hat{\boldsymbol{y}}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} + [\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})}]^{\text{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \times \\ [\boldsymbol{z}_{i,k} - \boldsymbol{h}_{i,k}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1,k|k}^{(\text{III})}) + \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1,k|k}^{(\text{III})}] \\ \boldsymbol{Y}_{i,k|k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{Y}_{i-1,k|k}^{(\text{III})} + [\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})}]^{\text{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \end{cases}$$
(37)

其中

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{y}}_{0,k|k}^{(\text{III})} = \hat{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}^{(\text{III})} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{k-1}^{(\text{III})} [\boldsymbol{A}_{k-1}^{(\text{III})} + \boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}]^{-1}] [\boldsymbol{F}_{k-1}^{(\text{III})}]^{-\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{y}}_{k-1|k-1}^{(\text{III})} \\ \boldsymbol{Y}_{0,k|k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^{(\text{III})} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{k-1}^{(\text{III})} [\boldsymbol{A}_{k-1}^{(\text{III})} + \boldsymbol{Q}_{k,k-1}^{-1}]] \boldsymbol{A}_{k-1}^{(\text{III})} \end{cases}$$
(38)

其中,  $A_{k-1}^{(\text{III})} = [F_{k-1}^{(\text{III})}]^{-\text{T}} [P_{k-1|k-1}^{(\text{III})}]^{-1} [F_{k-1}^{(\text{III})}]^{-1}$ , 则基于 EIF 的顺序滤波融合的信息状态更新估计和信息 矩阵分别为

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{k|k}^{(\mathrm{III})} = \hat{\boldsymbol{y}}_{N,k|k}^{(\mathrm{III})}, \ \boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{III})} = \ \boldsymbol{Y}_{N,k|k}^{(\mathrm{III})}$$
(39)

定理 1. 顺序 EIF 融合的信息矩阵为

$$\boldsymbol{Y}_{k,k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{Y}_{N,k|k}^{(\text{III})} = \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^{(\text{III})} + \sum_{i=1}^{N} [\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\text{III})} \quad (40)$$

**证明.**首先,需要解释的是在顺序滤波融合中存 在两类状态方程:1)融合周期之间的状态演化方程 如式(1)所示;2)同一时刻不同传感器顺序更新时 隐含的状态关系方程,即

$$\mathbf{x}_{i,k} = \mathbf{x}_{i-1,k} = \mathbf{x}_k, \quad i = 2, 3, \cdots, N$$
 (41)

其中,  $x_{i,k}$  表示第 *i* 个观测向量对应的状态. 假设 k-1 时刻的基于 EIF 的全局非线性顺序滤波更新 估计  $\hat{y}_{k-1|k-1}^{(III)}$  和信息矩阵  $Y_{k-1|k-1}^{(III)}$  已经被获得,则 根据式 (10) 和 (14) 可得信息矩阵的预测值  $Y_{k|k-1}^{(III)}$ (实际上是基于融合周期之间的状态演化方程 (1)), 然后,应用顺序滤波思想可得定理 1 结论.

1) 当传感器个数为1时, 有:

$$\boldsymbol{Y}_{0,k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^{(\mathrm{III})}$$
(42)

$$\boldsymbol{Y}_{1,k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{Y}_{0,k|k}^{(\mathrm{III})} + [\boldsymbol{H}_{1,k}^{(\mathrm{III})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{1,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{1,k}^{(\mathrm{III})}$$
(43)

2) 当传感器数为2时,根据顺序滤波思想和式(41) 可得:

$$\boldsymbol{Y}_{2,k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{Y}_{1,k|k} + [\boldsymbol{H}_{2,k}^{(\mathrm{III})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{2,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{2,k}^{(\mathrm{III})} = \\ \boldsymbol{Y}_{k|k-1}^{(\mathrm{III})} + \sum_{i=1}^{2} [\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{III})}]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{III})}$$
(44)

(46)

3) 假设当传感器个数为 N-1 时,式 (40) 成立, 即

$$\begin{aligned}
 Y_{N-1,k|k}^{(\text{III})} &= Y_{N-2,k|k}^{(\text{III})} + [H_{N-1,k}^{(\text{III})}]^{\mathrm{T}} R_{N-1,k}^{-1} \times \\
 H_{N-1,k}^{(\text{III})} &= Y_{k|k-1}^{(\text{III})} + \sum_{i=1}^{N-1} [H_{i,k}^{(\text{III})}]^{\mathrm{T}} R_{i,k}^{-1} H_{i,k}^{(\text{III})} \quad (45) \\
 4) \hspace{0.5mm} \texttt{U} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{A} \hspace{0.5mm} \texttt{I} \\
 4) \hspace{0.5mm} \texttt{U} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{A} \hspace{0.5mm} \texttt{I} \\
 4) \hspace{0.5mm} \texttt{U} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{A} \hspace{0.5mm} \texttt{B} \hspace{0.5mm} \texttt{B$$

#### 4.1 集中式测量值扩维和测量值加权融合的等价性

基于文献 [2] 中关于线性融合系统的研究, 依然 可以得到如下关于非线性集中式测量值扩维和测量 值加权融合估计功能等价性定理.

**定理 2.** 考虑由式 (1) 和 (17) 构成的系统, 当 满足如下条件 (即各传感器测量特性一致):

$$H_{i,k}^{(I)} = H_{j,k}^{(I)} = H_{i,k}^{(II)} = H_{j,k}^{(II)} = H_k$$
 (47)

其中,  $i \neq j$   $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ ,  $\boldsymbol{H}_{i,k}^{(I)}$   $(i = 1, 2, \dots, N)$  可由式 (25) 计算, 且

$$\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{II})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{i,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \bigg|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$
(48)

则基于式 (23) 和式 (31) 可得非线性集中式测量值 扩维融合和测量值加权融合之间的估计精度功能等 价.

**证明.**根据式 (23) 可得集中式扩维融合估计的 信息矩阵为

$$\mathbf{Y}_{k|k}^{(\mathrm{I})} = \mathbf{Y}_{k|k-1}^{(\mathrm{I})} + [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{I})}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{R}_{k}^{(\mathrm{I})}]^{-1} [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{I})}] = \\
[\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{I})}]^{-1} + \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{H}_{i,k}^{(\mathrm{I})}]^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k}^{(\mathrm{I})}$$
(49)

基于式 (31) 可知测量值加权融合估计的信息矩阵为

$$\mathbf{Y}_{k|k}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{Y}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})} + [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{R}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{-1} [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{II})}] = [\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}]^{-1} + [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{R}_{k}^{(\mathrm{II})}]^{-1} [\mathbf{H}_{k}^{(\mathrm{II})}] = [\mathbf{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}]^{-1} + \left[ \left( \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \right)^{-1} \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k}^{(\mathrm{II})} \right]^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_{i,k}^{-1} \mathbf{H}_{i,k}^{(\mathrm{II})}$$
(50)

应用式 (47), 可得:

$$\boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{I})} = [\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{I})}]^{-1} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{k}$$
(51)

$$\boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{II})} = [\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{(\mathrm{II})}]^{-1} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{H}_{k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{k}$$
(52)

加之,两者算法的初始条件相同,即当 k = 1 时,有:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{1|0}^{(\mathrm{I})} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{1|0}^{(\mathrm{II})} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{1|0} = \boldsymbol{f}_0(\widehat{\boldsymbol{x}}_{0|0})$$
(53)

$$\boldsymbol{Y}_{1|0}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{Y}_{1|0}^{(\mathrm{II})} = [\boldsymbol{F}_{0}\boldsymbol{P}_{0|0}\boldsymbol{F}_{0}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{1,0}]^{-1} \qquad (54)$$

$$\boldsymbol{H}_{i,1}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{H}_{i,1}^{(\mathrm{II})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{i,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}_1} \bigg|_{\boldsymbol{x}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}_{1|0}}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$
(55)

因此, 根据数学归纳法易得对于任意的 k ≥ 1 有:

$$\boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{Y}_{k|k}^{(\mathrm{II})} \tag{56}$$

即两融合算法的估计功能等价结论成立. □ 定理 2 成立的条件是式 (47)成立,包含两方面 内容:

1)  $\boldsymbol{H}_{i,k}^{(I)} = \boldsymbol{H}_{j,k}^{(I)} \ (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, N)$  和  $\boldsymbol{H}_{i,k}^{(II)} = \boldsymbol{H}_{j,k}^{(II)} \ (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, N),$  即对于单 独算法 (I) 和 (II), 各方法中每个传感器的雅克比矩 阵相同.

2)  $\boldsymbol{H}_{i,k}^{(I)} = \boldsymbol{H}_{i,k}^{(II)}$   $(i = 1, 2, \dots, N)$ , 即算法 (I) 和 (II) 中对应传感器的雅克比矩阵相同.

其中,2) 成立的结论在定理2的证明过程中可得.而对于1) 成立的说明,如下引理是可用的.

引理 1. 当各传感器测量特性相同时,即  $h_{1,k}(x_k) = \cdots = h_{N,k}(x_k)$ ,有下式成立:

$$\boldsymbol{H}_{1,k} = \boldsymbol{H}_{2,k} = \dots = \boldsymbol{H}_{N,k} \tag{57}$$

**证明.** 对于任意两个非线性函数 **g**<sub>1,k</sub>(**x**), **g**<sub>2,k</sub>(**x**), 如果有:

$$\boldsymbol{g}_{1,k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}_{2,k}(\boldsymbol{x}) \tag{58}$$

那么,根据泰勒展开原理可知 **g**<sub>1,k</sub>(**x**), **g**<sub>2,k</sub>(**x**) 在时 刻 k 关于同一点的一阶泰勒展开也相等,即:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_{1,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\boldsymbol{x}_k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_{2,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\boldsymbol{x}_k}$$
(59)

由于对于算法 (I) 和 (II), 计算雅克比矩阵时, 其泰勒展开点均为各自一步全局预测估计  $\hat{x}_{k|k-1}^{(I)}$  与  $\hat{x}_{k|k-1}^{(II)}$ .因此,根据引理1可知,算法 (I) 和算法 (II) 中各自传感器的雅克比矩阵均相同,即有:

$$\boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{H}_{j,k}^{(\mathrm{I})}, \, \boldsymbol{H}_{i,k}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{H}_{j,k}^{(\mathrm{II})}, \, \, i, j = 1, 2, \cdots, N, i \neq j$$
(60)

从而可得,当 $h_{1,k}(x_k) = \cdots = h_{N,k}(x_k)$ 时,式(47) 成立,即定理2成立的条件是存在的.

### 注1.

1) 当  $\boldsymbol{h}_{1,k}(\boldsymbol{x}_k) \neq \boldsymbol{h}_{2,k}(\boldsymbol{x}_k) \neq \cdots \neq \boldsymbol{h}_{N,k}(\boldsymbol{x}_k)$  时, 未必有式  $\boldsymbol{H}_{1,k} \neq \boldsymbol{H}_{2,k} \neq \cdots \neq \boldsymbol{H}_{N,k}$  成立, 见例 1.

**例 1.** 考虑 N = 2 且  $x_k$  为标量情形,  $h_{1,k}(x_k) = x_k^3$ ,  $h_{2,k}(x_k) = x_k^2$ , 且  $x_1 = 1$  和  $x_2 = 3/2$ ,则  $H_{1,k} = 3x_k^2|_{x_k=x_1}$ 和  $H_{2,k} = 2x_k|_{x_k=x_2}$ , 显然有  $H_{1,k} = H_{2,k} = 3$ .

2) 定理 2 的条件 (47) 只是充分的, 其必要性是 否成立还有待于进一步研究.

3) 当各传感器测量维数不同或对应分量意义不同时,算法 (II) 将不再适用.

4) 在满足各传感器测量特性一致条件时, 集中 式测量值扩维与测量值加权融合估计的上述功能在 等价性、在线性和非线性系统中都成立.

# 4.2 集中式测量值扩维和顺序滤波融合估计的关系

对于线性多传感器系统,基于线性 Kalman 滤 波信息表示形式可以严格证明集中式测量值扩维和 顺序滤波融合算法的估计功能完全等价.对于非线 性多传感器系统,以 EIF 为基本滤波器的集中式测 量值扩维和顺序滤波融合算法之间是否能一定严格 保持估计功能的完全等价特性?答案是否定的.

这是因为基于 EIF 的集中式顺序滤波融合 中每一次顺序更新时的雅克比矩阵  $H_{i,k}^{(III)}$  (*i* = 1,2,…,*N*) 需要重新实时计算,而集中式测量值 扩维融合的雅克比矩阵均在同一预测点展开计算, 从而导致在雅克比矩阵某一元素具备单调性条件下, 两者对应的雅克比矩阵不能保证完全对应一致 (进 一步具体分析参见第 4.3 节).因此,基于 EIF 的集 中式测量值扩维和顺序滤波融合估计功能的等价性 不再完全成立,计算机仿真将验证该结论的正确性.

**推论 1.** 当系统状态模型为非线性而多传感器 测量方程为线性时, 三种基于 EIF 的集中式融合算 法的估计精度等价.

**证明.**由于多传感器测量方程为线性,即对于任何一个时刻 *k* (*k* = 1,2,3,...) 均有:

$$\boldsymbol{H}_{l,k}^{(\mathrm{I})} = \boldsymbol{H}_{l,k}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{H}_{l,k}^{(\mathrm{III})}, \quad l = 1, 2, \cdots, N$$
 (61)

加之, 三种算法的初始状态估计和估计误差方差阵 一致, 并结合式 (23)、(31) 和 (40) 可得:

$$\begin{split} \mathbf{Y}_{k|k}^{(\mathrm{I})} &= \mathbf{Y}_{k|k}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{Y}_{k|k}^{(\mathrm{III})}, \ \widehat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\mathrm{I})} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\mathrm{III})} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k}^{(\mathrm{III})} \quad (62) \\ & \text{thtick} \ \text{total} \ . \end{split}$$

### 4.3 融合算法中测量值更新次序的交换性分析

对于线性多传感器动态系统,在融合估计精度 不变条件下,三种集中式融合算法中各测量值的 更新顺序满足可交换性,即各传感器测量对状态 估计的贡献是独立不相关的.但对于非线性多传 感器系统,三种集中式融合算法测量值更新次序 是否依旧满足完全自由可交换性?本质上,测量 值更新顺序是否会对整体融合估计精度产生影响 的核心是各传感器 i ( $i = 1, 2, \dots, N$ )的雅克比 矩阵之间的计算是否存在前后依赖性,即传感器 i+1 ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ )的雅克比矩阵计算是否 与传感器 i ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ )的更新估计有关, 则:

1) 对于集中式测量值扩维融合和测量值加权融合,由于两者的测量雅克比矩阵均是在其全局一步状态预测  $\hat{x}_{k|k-1}^{(I)} = \hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1}$  点上进行泰勒展开获得的,因此,各传感器对应的雅克比矩阵 $H_{i,k}^{(I)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )的计算之间 (或与其他传感器更新估计)是互不相关 (互不依赖)的,即式(23)和(31)中求和公式的各传感器信息公式的顺序可自由交换,不会对最后融合结果产生影响.

2) 在集中式顺序滤波融合算法中, 第一个传感 器测量值更新时雅克比矩阵  $H_{i,k}^{(III)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 是在  $\hat{x}_{k|k-1}^{(III)}$  点泰勒展开获得的, 其余传感器 i ( $i = 2, \dots, N$ ) 的雅克比矩阵均是在前一个传感器测量 更新后的全局估计  $\hat{x}_{i-1,k|k}^{(III)}$  处计算获得的.显然, 第 2 个传感器及其之后的雅克比矩阵的计算均是与之 前的传感器更新估计有着紧密的关系, 因此, 不同 的测量值更新顺序必然产生不同的雅克比矩阵序列  $H_{1,k}^{(III)} \longrightarrow H_{N,k}^{(III)}$ .根据式 (40) 可知, 不同的雅克 比矩阵序列可能导致多个不同的融合估计结果产生. 因此,基于 EIF 的集中式顺序滤波融合算法中, 改 变传感器测量融合更新次序将不再能够保证所获得 融合估计结果具备完全功能等价性.下面用带有两 个传感器的例子进行简单说明.

**例 2.** 假设有两个传感器标号分别为 a 和 b, 第 一种顺序滤波方法采用  $a \rightarrow b$  的滤波顺序, 第二种采 用  $b \rightarrow a$  方式. 在  $a \rightarrow b$  的滤波方法中, 记经传感器 a更新后, 所得到的估计结果为  $Y_{a,a-b,k|k}^{(III)}$ ;  $b \rightarrow a$  的滤 波方法中, 经传感器 b 更新后, 所得到的估计结果记 为  $Y_{b,b-a,k|k}^{(III)}$ . 那么, 对于两种顺序更新过程有:

$$\boldsymbol{H}_{a,a-b,k}^{(\mathrm{III})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{a,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \bigg|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{a-b,k|k-1}^{(\mathrm{III})}}$$
(63)

$$\boldsymbol{H}_{b,a-b,k}^{(\mathrm{III})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{b,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \bigg|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{a,a-b,k|k}^{(\mathrm{III})}}$$
(64)

$$\boldsymbol{H}_{b,b-a,k}^{(\mathrm{III})} = \frac{\partial \boldsymbol{h}_{b,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \bigg|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{b-a,k}^{(\mathrm{III})}}$$
(65)

$$\boldsymbol{H}_{a,b-a,k}^{(\mathrm{III})} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{h}_{a,k}(\boldsymbol{x}_k)}{\partial \boldsymbol{x}_k} \right|_{\boldsymbol{x}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{b,b-a,k|k}^{(\mathrm{III})}} \tag{66}$$

因此,自然可得:

$$\boldsymbol{Y}_{a-b,k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{Y}_{a-b,k|k-1}^{(\mathrm{III})} + \sum_{i=a,b} \left[\boldsymbol{H}_{i,a-b,k}^{(\mathrm{III})}\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{i,a-b,k}^{(\mathrm{III})}$$
(67)

$$\boldsymbol{Y}_{b-a,k|k}^{(\mathrm{III})} = \boldsymbol{Y}_{b-a,k|k-1}^{(\mathrm{III})} + \sum_{i=b,a} \left[ \boldsymbol{H}_{i,b-a,k}^{(\mathrm{III})} \right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}_{i,k}^{-1} \boldsymbol{H}_{i,b-a,k}^{(\mathrm{III})}$$
(68)

显然,  $H_{a,a-b,k}^{(\text{III})}$  与  $H_{a,b-a,k}^{(\text{III})}$ ,  $H_{b,a-b,k}^{(\text{III})}$  与  $H_{b,b-a,k}^{(\text{III})}$ 或交叉对不再完全功能等价 (基于雅克比矩阵中某 一元素具备单调性的条件). 从而,结合式 (67) 和 (68) 可知  $Y_{a-b,k|k}^{(\text{III})}$  和  $Y_{b-a,k|k}^{(\text{III})}$  之间的等号已难以完 全成立, 即当测量更新顺序变化后,已不再能够完全 保证两者估计精度的功能等价性.

因此,对于三种基于 EIF 的非线性集中式融合 算法,关于测量值更新顺序与融合估计之间有如下 结论成立:

 对于非线性集中式测量值扩维融合和测量值 加权融合,其测量值更新顺序的变化不会对整体融 合估计精度产生影响,即两者的测量值融合更新次 序完全满足可交换性;

2) 基于 EIF 的集中式顺序滤波融合算法中,改 变传感器测量融合更新次序将不再能够保证所获得 融合估计结果具备完全功能等价性.

# 5 简要分析

在线性多传感器系统的集中式融合算法设计与 性能分析研究中,线性 Kalman 滤波的信息计算形 式 (即信息滤波器) 被有效地用来证明三种融合算法 估计精度的功能等价性问题<sup>[2,5]</sup>.因此,本文以一类 非线性多传感器同步融合系统为对象,基于经典扩 展 Kalman 滤波的一种信息表示形式— 扩展信息 滤波器 (EIF),研究三种典型非线性融合算法的精度 是否还保持估计功能的完全等价性,以及在估计精 度不变前提下,三种融合算法的测量值更新顺序是 否还保持完全可交换性等问题,验证和推广了部分 线性动态系统中的融合理论.

本文研究所获得的主要结论如下:

1) 当式 (47) 所示的条件成立时, 基于 EIF 的 非线性集中式测量值扩维融合和测量值加权融合算 法在估计精度上是功能等价的 (定理 2).

2) 当传感器数目 N ≥ 2 时,本文中的多传感器 非线性集中式测量值扩维融合与顺序滤波融合算法 之间不再具备线性多传感器系统中估计功能的完全 等价特性 (第 4.2 节).同理,非线性测量值加权融合 与顺序滤波融合算法之间也不再具备估计功能的完 全等价特性.

3) 对于非线性集中式测量值扩维和测量值加权 融合算法,在估计精度不变情况下测量值更新顺序 满足可交换特性;而对于本文给出的非线性集中式 顺序滤波融合算法,其测量值更新顺序的改变将难 以保证前后融合估计精度的不变性(第4.3节).

此外, 推论 1 显示当系统状态模型为非线性而 测量方程为线性时, 三种集中式融合估计算法的精度是一样的. 自然地, 有 EKF 与 EIF 估计精度等价.

本文的三种非线性融合估计算法除了因自身非 线性特性所具备的一些功能特点之外,依然保持着 传统 (线性)集中式测量值扩维融合、测量值加权融 合和顺序滤波融合结构的特性.同时,本文给出的非 线性顺序滤波融合算法采用了线性顺序滤波融合的 基本思想,但却产生了一些线性系统中不存在的新 问题,给融合估计精度的等价性分析带来了一些新 的困难.从而,将非线性集中式扩维融合的递推计算 形式作为非线性系统顺序滤波融合的另外一种方式 也是一种可利用的选择,但与文中给出的非线性集 中式顺序滤波融合算法的理论性能差异及其原理研 究有待于进一步开展.

需要提及的是,无论对于 EKF 或是其变形 EIF, 其滤波 (融合) 的效果都与滤波初值和方差的选取密 切相关.因此,不同的滤波初始值会对三种滤波融合 效果产生影响,但不会影响本文研究所得结论的有 效性.

# 6 计算机仿真

本节主要以非线性纯方位跟踪系统为背景,开 展如下研究结论的计算机仿真算例验证:

 1) 当式 (47) 的条件成立时 (即各传感器测量特 性相同),非线性集中式测量值扩维融合和测量值加 权融合算法在估计精度上的功能等价性;

 非线性集中式测量值扩维融合和顺序滤波融 合算法在估计精度上的不等价性 (测量特性相同或 不同两种情形);

3) 在精度不变前提下非线性顺序滤波融合中测量值更新次序的不可交换性(测量特性相同).

#### 6.1 纯方位跟踪模型

记目标状态  $\mathbf{x}(k) = [x(k), \nu^x(k), y(k), \nu^y(k)]^T$ , 其中, x(k) 和 y(k) 是目标正东和正北方向的位移 量,  $\nu^x(k)$  和  $\nu^y(k)$  分别表示目标正东和正北方向的 速度分量. 假设目标运动特性用匀速 CV (Chan & Vese) 模型进行建模, 则系统方程 (1) 为线性模型, 即

$$\boldsymbol{x}_{k} = \boldsymbol{F}_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k,k-1} \tag{69}$$

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(70)

过程噪声方差阵为 **Q**<sub>k,k-1</sub>, 且系统跟踪周期 T = 1s. 最基本的纯方位跟踪系统是指两平台两传感器 跟踪模型, 即在两平台 A 和 B 上分别各装一个传感 器, 平台两者之间的距离为 D. 这两传感器分别可 获得关于目标的方位角量测 α 与 β, 并可交叉构成 平面坐标的一个非线性量测. 需要注意的是, 纯方位 跟踪中两传感器方位测量只构成一个非线性量测点, 因此, 前述中的"传感器"在纯方位跟踪系统中对应 地是指"传感器组", 即不同平台上的两传感器构成 一个传感器组, 每个传感器组获得一个非线性量测.

根据两方位交叉成一点的原理<sup>[16]</sup>,可建立单个 传感器组的纯方位角测量方程 (2),即有:

$$\boldsymbol{h}_{k}(x_{k}) = \begin{bmatrix} \arccos\left[\frac{x_{k}}{\sqrt{x_{k}^{2} + y_{k}^{2}}}\right] \\ \arccos\left[\frac{x_{k} - D}{\sqrt{(x_{k} - D)^{2} + y_{k}^{2}}}\right] \end{bmatrix}$$
(71)

测量噪声方差为 **R**<sub>k</sub>. 实际上该纯方位跟踪满足雅克 比矩阵元素的单调性条件.

1) 场景 1: 两平台四传感器单目标跟踪模型

本场景中每个平台上各有两个传感器,即*A*平 台上装有传感器  $A_1$ 和  $A_2$ , *B*平台上装有传感器  $B_1$ 和  $B_2$ .那么,  $A_1$ 和  $B_1$ 构成第一个传感器组 (角度 测量为  $\alpha_1(k)$ 与  $\beta_1(k)$ ),  $A_2$ 和  $B_2$ 构成第二个传感 器组 (方位测量为  $\alpha_2(k)$ 与  $\beta_2(k)$ ),则测量方程为

$$\boldsymbol{z}_{i,k} = \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_{i,k}, \quad i = 1, 2$$
(72)

其中, **v**<sub>i,k</sub> 是方差为 **R**<sub>i,k</sub> 的零均值高斯白噪声.上 式表明该场景中两个非线性测量特性相同,即能满 足定理 2 的条件.本场景将在例 1~3 中使用,目的 是验证当多源量测具有相同量测特性时结论 1)~3) 的正确性.

2) 场景 2: 四平台四传感器单目标跟踪模型

本场景中共有 4 个传感器平台, 分别装有  $A_1$  与  $B_1$ 、 $A_2$  与  $B_2$  两组 (四个) 传感器, 各平台传感器间 的距离均为  $D = 1\,000\,\text{m}$ .则多平台多传感器纯方 位跟踪系统的非线性测量方程为



图 1 四平台四传感器单目标纯方位跟踪系统

$$\boldsymbol{z}_{i,k} = \begin{bmatrix} \arccos\left[\frac{x_k - (2 \cdot i - 2)D}{\sqrt{(x_k - (2 \cdot i - 2)D)^2 + y_k^2}}\right] \\ \arccos\left[\frac{x_k - (2 \cdot i - 1)D}{\sqrt{(x_k - (2 \cdot i - 1)D)^2 + y_k^2}}\right] \end{bmatrix} + v_{i,k}$$
(73)

这里 i = 1, 2. 因此可知,本场景中两个非线性量测的测量特性不同,即  $h_{1,k}(x_k) \neq h_{2,k}(x_k)$ .

本场景是用来验证各非线性测量特性不同时结论 2)的正确性,见例 4.

# 6.2 例 1. 验证结论 1) 的正确性

本例中, 仿真参数选取如下:

$$\boldsymbol{Q}_{k,k-1} = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0\\ \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2}\\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \times 0.5 \quad (74)$$

初始状态估计  $\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0} = [100, 9.62, 100, 5.63]^{\mathrm{T}}$  和方差  $\boldsymbol{P}_{0|0} = \mathrm{diag}\{7, 0.01, 7, 0.01\}.$ 

$$\boldsymbol{R}_{1,k} = \boldsymbol{R}_{2,k} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0\\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \times \frac{\pi}{180} \quad (75)$$

仿真结果如表 1 所示,其中算法 1 和 2 分别表 示非线性集中式测量值扩维融合和测量值加权融合. 结果显示,当两组非线性观测方程测量特性相同情 况下,结论 1) (定理 2) 成立.

表 1 集中式扩维和测量值加权融合估计的误差绝对均值 Table 1 Absolute means of estimate errors of

Algorithms 1 and 2

估计误差绝对均值 (m)	算法 1	算法 2
X 方向位置	2.37	2.37
Y 方向位置	1.84	1.84

6.3

# 例 2. 验证当测量特性相同时结论 2) 的正确性

本例参数选取与例 1 一致,结果如图 2 和表 2 所示.图 2 中算法 3 表示顺序滤波融合算法.仿真 结果显示,当两非线性测量具有相同特性时,基于 EIF 的非线性集中式测量值扩维融合与顺序滤波融 合的估计精度不等价.



图 2 两种融合算法估计误差方差阵的迹曲线

Fig. 2 Trace curves of covariances of estimate errors

表 2 集中式扩维和顺序滤波融合的估计误差绝对均值 Table 2 Absolute means of estimate errors of Algorithms 1 and 3

估计误差绝对均值 (m)	算法 1	算法 3
X 方向位置	1.20	2.93
Y 方向位置	2.57	8.27

6.4 例 3. 验证当测量特性相同时结论 3) 的正确性

本例中,  $Q_{k,k-1}$  和  $\hat{x}_{0|0}$  选取与前一仿真相同.

$$\boldsymbol{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$
(76)

$$\boldsymbol{R}_{1,k} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0\\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \times \frac{\pi}{180}$$
(77)

$$\mathbf{R}_{2,k} = 100 \times \begin{bmatrix} 0.001 & 0\\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \times \frac{\pi}{180}$$
(78)

仿真结果如表 3 所示.显然,当各观测方程的测量特性相同时,基于 EIF 的非线性顺序滤波融合不再保证测量值更新次序交换前后估计效果的等价性,即结论 3) 正确.实际上,当测量特性不同时,结论 3) 也成立.

# 表 3 两种不同滤波顺序的估计误差绝对均值

 Table 3 Absolute means of estimate errors of two

 filtering sequences

估计误差绝对均值 (m)	$a \longrightarrow b$	$b \longrightarrow a$
X 方向位置	4.14	7.60
Y 方向位置	4.70	9.03

# 6.5 例 4. 验证当测量特性不同时结论 2) 的正确性

本例中,  $Q_{k,k-1}$ ,  $\hat{x}_{0|0}$ ,  $P_{0|0}$  和  $R_{i,k}$  (i = 1, 2) 与 例 2 一致, 结果如表 4 所示. 显然当测量特性不同 时结论 2) 也成立.

表 4 集中式扩维和顺序滤波融合估计的误差绝对均值 Table 4 Absolute means of estimate errors of

Algorithms 1 and 3

估计误差绝对均值 (m)	算法 1	算法 3
X 方向位置	5.40	9.58
Y 方向位置	4.94	6.93

# 7 结论

本文以一类非线性多传感器同步系统为对象, 基于扩展信息滤波器 (EIF),研究三种典型非线性融 合算法的性能比较与分析.未来可继续研究的工作 包括:非线性集中式扩维和测量值加权融合算法等 价的充分必要性;非线性顺序滤波融合算法估计性 能的进一步评价与分析;噪声相关多传感器系统基 于扩展信息滤波的集中式融合与估计性能分析,以 及基于 UKF 和 CKF 等其他非线性滤波器的集中 式融合估计研究等;研究不同滤波初始条件基于不 同非线性滤波器的融合算法的性能定量优劣关系等.

# 致谢

本文作者非常感谢文成林教授在论文撰写和修 改过程中给予的指导和建议,感谢李超在论文撰写 过程中给予的帮助.

#### References

- Han Chong-Zhao, Zhu Hong-Yan, Duan Zhan-Sheng, Han De-Qiang, Liu Wei-Feng, Yu Xin. Multi-source Information Fusion (Second Edition). Beijing: Tsinghua University Press, 2010: 252-256 (韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜, 韩德强, 刘伟峰, 于昕. 多源信息融合 (第 二版). 北京:清华大学出版社, 2010: 252-256)
- 2 Gan Q, Harris C J. Comparison of two measurement fusion methods for Kalman-filter-based multisensor data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, **37**(1): 273–279
- 3 Roecker J A, McGillem C D. Comparison of two-sensor tracking methods based on state vector fusion and measurement fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1988, **24**(4): 447–449

4 Yu An-Xi, Hu Wei-Dong, Zhou Wen-Hui. Performance comparison of multisensor measurement fusion algorithms. *Journal of National University of Defense Technology*, 2003, 25(6): 39-44

(余安喜, 胡卫东, 周文辉. 多传感器量测融合算法的性能比较. 国防 科技大学学报, 2003, 25(6): 39-44)

- 5 Wen C L, Ge Q B. Asynchronous multisensor sequential data fusion based on transmission delay. In: Proceedings of the 2006 International Conference on Software and Computer Applications (ICSCA). Chongqing, China: DCDIS-B, 2006. 1386-1391
- 6 Wen C L, Ge Q B. A data fusion algorithm of the nonlinear system based on filtering step by step. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2006, 4(2): 165–171
- 7 Wang Xiao-Xu, Liang Yan, Pan Quan, Zhao Chun-Hui, Li Han-Zhou. Unscented Kalman filter for nonlinear systems with colored measurement noise. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(6): 986-998 (王小旭, 梁彦, 潘泉, 赵春晖, 李汉舟. 带有色量测噪声的非线

性系统 Unscented 卡尔曼滤波器. 自动化学报, 2012, 38(6): 986-998)

- Zuo Jun-Yi, Zhang Yi-Zhe, Liang Yan. Particle filter based on adaptive part resampling. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(4): 647-652 (左军毅, 张怡哲, 梁彦. 自适应不完全重采样粒子滤波器. 自动化学 报, 2012, 38(4): 647-652)
- 9 Gong Yi-Song, Gui Qing-Ming, Li Bao-Li, Wang Jun-Jiang. Adaptive fading extended Kalman particle filtering applied to integrated navigation. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2010, **30**(1): 99–103 (宫铁松, 归庆明, 李保利, 王军江. 自适应渐消扩展 Kalman 粒 子滤波方法在组合导航中的应用. 大地测量与地球动力学, 2010, **30**(1): 99–103)
- 10 Pakki K, Chandra B, Gu D W, Postlethwaite I. Cubature information filter and its applications. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, USA: IEEE, 2011. 3609-3614
- 11 Wang Z S, Zhen Z Y. Theory of nonlinear information fusion estimation. Journal of Astronautics, 2009, 30(1): 8–12
- 12 Lee D J. Nonlinear estimation and multiple sensor fusion using unscented information filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, **15**: 861–864
- 13 Tuna G, Gungor V C, Gulez K. GPS aided Extended Kalman filter based localization for unmanned vehicles. In: Proceedings of the 20th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU). Mugla, Turkey: IEEE, 2012. 1–4
- 14 Hao Gang, Ye Xiu-Fen, Chen Ting. Weighted measurement fusion algorithm for nonlinear unscented Kalman filter. Control Theory & Applications, 2011, 28(6): 753-758 (郝钢, 叶秀芬, 陈亭. 加权观测融合非线性无迹卡尔曼滤波算法. 控 制理论与应用, 2011, 28(6): 753-758)
- 15 Li H P, Xu D M, Zhang F B, Yao Y. Consistency analysis of EKF-based SLAM by measurement noise and observation times. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(9): 1177-1184
- 16 Ge Q B, Li W B, Wen C L. SCKF-STF-CN: a universal nonlinear filter for maneuver target tracking. *Journal of Zhejiang University* — *Science C*, 2011, **12**(8): 678-686
- 17 Cao L, Yang W W, Chen X Q, Huang Y Y. Application of multi-sensors data fusion based on improved federal filtering in micro-satellite attitude determination. In: Proceedings of the 2001 International Workshop on Multi-platform/ Multi-sensor Remote Sensing and Mapping. Xiamen, China: IEEE, 2011. 66-71

18 Fang J C, Gong X L. Predictive iterated Kalman filter for INS/GPS integration and its application to SAR motion compensation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2010, **59**(4): 909–915



**葛泉波** 杭州电子科技大学自动化学 院系统科学与控制工程研究所副教授. 2008 年获得上海海事大学电力电子与电 力传动专业博士学位.主要研究方向为 信息融合,非线性滤波,目标跟踪和海上 智能交通系统.本文通信作者. E-mail: gbge@hdu.edu.cn

(GE Quan-Bo Associate professor

at the Institute of Systems Science and Control Engineering of School of Automation, Hangzhou Dianzi University. He received his Ph. D. degree from Shanghai Maritime University in 2008. His research interest covers information fusion, nonlinear filter, target tracking, and marine intelligent traffic system. Corresponding author of this paper.)



**李文斌** 杭州电子科技大学自动化学院 系统科学与控制工程研究所硕士研究生. 2007 年于河南大学数学与信息科学学院 获学士学位.主要研究方向为非线性滤 波,融合与目标跟踪.

E-mail: wenwu686@163.com

(LI Wen-Bin Master student at the School of Automation, Hangzhou Di-

anzi University. He received his bachelor degree from the School of Mathematics and Information Sciences, Henan University in 2007. His research interest covers nonlinear filtering, fusion and target tracking.)



**孙若愚** 美国明尼苏达大学电子与计算 机工程系博士研究生. 2009 年获得北京 大学数学科学学院学士学位. 主要研究 方向为干扰控制和矩阵填充.

E-mail: sunxx394@umn.edu

(SUN Ruo-Yu Ph. D. candidate in the Department of Electrical and Computer Engineering, University of Min-

nesota, USA. He received his bachelor degree from Beijing University in 2009. His research interest covers interference alignment and matrix completion.)



徐 姿 上海大学理学院副教授. 2008 年于中国科学院数学与系统科学研究院 获博士学位. 主要研究方向为最优化理 论与算法. E-mail: xuzi82@gmail.com

(XU Zi Associate professor at the College of Sciences, Shanghai University. She received her Ph. D. degree from Academy of Mathematics and Sys-

tems Science, Chinese Academy of Sciences in 2008. Her research interest covers optimization theory and algorithms.)