动态输出反馈鲁棒模型预测控制离线算法

平续斌 [1] 丁宝苍 [1]

摘 要 研究具有多包不确定性和有界噪声系统的动态输出反馈鲁棒模型预测控制 (Robust model predictive control, RMPC) 的离线方法. 先前的在线方法中, 在估计状态和估计误差集合已知的情况下, 在每一采样时刻通过近似最优算法求解控制器参数. 本文采用先前的方法计算离线控制器参数和吸引域. 首先, 选定一系列估计状态, 其中, 每个估计状态对应同样一组嵌套的估计误差集合. 然后, 针对每一估计状态和每一估计误差集合的组合, 离线计算唯一的控制器参数和对应的吸引域. 这些控制器参数和对应的吸引域存储在表中. 如果离线确定的吸引域包含实时的扩展状态, 则该离线控制器参数是实时可行的. 在线时, 根据实时估计状态和选取实时估计误差集合, 在表中搜索包含实时扩展状态且优化性能指标最小的吸引域所对应的控制器参数. 通过连续搅拌釜式反应器控制系统验证了该方法的有效性.

关键词 动态输出反馈, 模型预测控制, 不确定系统, 离线方法

引用格式 平续斌, 丁宝苍. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制离线算法. 自动化学报, 2013, **39**(6): 790−798

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00790

An Off-line Approach to Dynamic Output Feedback Robust Model Predictive Control

PING Xu-Bin[1] DING Bao-Cang[1]

Abstract This paper presents an off-line approach to dynamic output feedback robust model predictive control (RMPC) for a system with both polytopic uncertainty and bounded disturbance. In the previous on-line approach, with the pre-specified estimated state and estimation error set, at each sampling time, a near-optimal optimization algorithm is used to calculate the control parameters. In this paper, the previous approach is invoked to calculate the off-line control parameters and the regions of attraction. First, a sequence of estimated states, each corresponding to the same set of nested estimation error sets, are selected. Then, a unique set of control parameters and the corresponding region of attraction are calculated for each combination of the estimated state and the estimation error set. These control parameters and the corresponding regions of attraction are stored in a table. If an off-line specified region of attraction contains the real-time augmented state, then the corresponding off-line control parameters are real-time feasible. Based on the real-time estimated state and the selected real-time estimation error set, the real-time control parameters are searched in this table, which correspond to the region of attraction containing the real-time augmented state and having the minimal performance index. A continuously stirred tank reactor control system is utilized to illustrate the effectiveness of the approach.

Key words Dynamic output feedback, model predictive control (MPC), uncertain systems, off-line approach

Citation Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang. An off-line approach to dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 790−798

鲁棒模型预测控制 (Robust model predictive control, RMPC) 因在线优化时计算量大而限制了其在实际系统中的应用, 而通过将在线优化转移到离线优化可降低在线的计算量. 对状态可测的情况, 文献 [1] 提出了离线状态反馈 RMPC, 通过将文献 [2] 的优化问题离线求解, 建立一系列嵌套的渐近稳定不变集, 每一渐近稳定不变集对应不同的控制器参数. 在线时, 搜索最紧凑地包含当前量测状态的渐近稳定不变集, 通过对离线控制器参数进行线性插值求取在线控制器参数. 对状态不可测情形, 对应的离线方法已经提出[3−6], 其中, 文献 [3−4] 未考虑噪声, 文献 [5−6] 考虑了有界噪声.

对输出反馈鲁棒模型预测控制 (Output feedback RMPC, OFRMPC), 关键问题是如何在鲁棒稳定性、约束处理中考虑状态估计误差的影响. 文献 [3] 中, 估计器和控制器分离设计, 其中, 估计器基于标称系统模型设计. 但在处理输入/输出约束时, 未

收稿日期 2012-01-04 录用日期 2012-04-25
Manuscript received January 4, 2012; accepted April 25, 2012
国家自然科学基金 (60934007, 61174095) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60934007, 61174095)
本文责任编委 李少远
Recommended by Associate Editor LI Shao-Yuan
1. 西安交通大学电子信息与工程学院自动化系 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室 西安 710049
1. Key Laboratory of Ministry of Education for Intelligent Networks and Network Security (MOE KLINNS Lab), Department of Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049

考虑估计误差的影响. 此不足已经在文献 [4] 中得到弥补, 方法是让估计误差、估计状态和真实状态都位于同样的椭圆内部. 文献 [6] 则在优化问题中加入估计误差约束, 使得下个采样时刻估计误差还在同样的界内. 文献 [5] 研究了动态输出反馈鲁棒模型预测控制 (Dynamic OFRMPC, DOFRMPC) 的离线方法, 其控制器状态类似于状态估计器的估值. 由于在优化问题中考虑了估计误差不变性约束, 使得文献 [4−6] 的方法在有些情况下难以满足实际过程对可行性和最优性的要求.

文献 [5−6] 离线优化中估计误差是固定的, 因此, 在线搜索控制器参数时, 所设计的控制器参数保证了在线实施时, 估计误差约束总是满足的, 因此未涉及到估计误差更新. 去掉估计误差约束可以改进可行性、增强最优性, 但必须在线更新估计误差. 文献 [7] 提出了 DOFRMPC 的在线方法. 假定当前时刻的模型参数精确已知, 但将来时刻未知且为多包不确定性. 在线主优化中未考虑估计误差约束, 而是让估计误差在独立的在线辅助优化中进行更新. 采用二次有界方法[8−9] 刻画了系统的鲁棒稳定性. 文献 [10] 改进了文献 [7] 的在线辅助优化方法, 降低了在线计算量, 且提高了控制性能.

本文研究了 DOFRMPC 的离线方法, 系统中考虑了模型不确定性和有界噪声. 在离线优化阶段, 采用文献 [11] 的近似最优方法计算控制器参数和对应的吸引域. 因此, 本文的主要创新在于根据文献 [11] 中的方法, 构建 DOFRMPC 的离线方法. 离线阶段, 选定一系列的估计状态和估计误差集合, 并针对每一估计状态和每一估计误差集合的组合, 计算唯一的控制器参数和对应的吸引域. 在线时, 确定实时的估计状态和选取实时估计误差集合, 并搜索包含实时扩展状态且优化性能指标最小的吸引域所对应的控制器参数.

离线预测控制中, 离线吸引域原有两种方法. 一种是每个控制器参数对应一个吸引域[1, 3−6], 这些吸引域互有重合, 往往是嵌套的; 另一种是每个控制器参数对应一个区域, 所有区域只有边缘互有重合, 所有区域的并集为整个吸引域[12−13]. 离线预测控制方法已经得到了大量的研究, 但大多数只针对状态可测的系统. 针对离线 OFRMPC 的综合方法中吸引域的分类, 本文方法属于第二种. 本文除采用的优化问题与文献 [4−6] 不同外, 还有其他明显的区别, 即这三篇文献只离线选择估计状态, 而本文不仅离线选择估计状态, 而且离线定义估计误差集合. 这样, 本文在线搜索控制器参数时有更多的自由度, 因此, 能够改进控制性能.

对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 和正定矩阵 W, $\|\boldsymbol{x}\|_W^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}W\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}(i|k)$ 表示在当前时刻 k 对未来 $k+i$ 时刻的 $\boldsymbol{x}$ 的预测值; I 为具有适当维数的单位矩阵; $\varepsilon_M = \{\boldsymbol{\xi}:\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{\xi} \le 1\}$ 表示关于正定对称矩阵 M 的椭圆; $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ 表示以 $\{\cdot\}$ 中的所有元素为顶点组成的凸集合; 某元素包含于 $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ 表示该元素可由 $\{\cdot\}$ 中的所有元素以凸组合表示, 其中组合系数非负, 且加和为 1; 矩阵中 $\star$ 表示对称矩阵中其对称项的转置; 优化的最优解用上角标 $*$ 表示; 为了简便, 对时间依赖的决策变量, 时间项常省略.

1 问题描述

考虑如下不确定线性时变离散时间系统:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) =& A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) + D(k)\boldsymbol{w}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) =& C(k)\boldsymbol{x}(k) + E(k)\boldsymbol{w}(k)\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{u} \in \Re^{n_u}$、$\boldsymbol{x} \in \Re^{n_x}$、$\boldsymbol{y} \in \Re^{n_y}$ 和 $\boldsymbol{w} \in \Re^{n_w}$ 分别表示输入、状态、输出和噪声. 系统噪声是持续的, 且满足 $\boldsymbol{w}(k) \in \varepsilon_{P_w}$. 输入和输出约束为

$$-\bar{\boldsymbol{u}} \le \boldsymbol{u}(k) \le \bar{\boldsymbol{u}},\ -\bar{\boldsymbol{\psi}} \le \Psi\boldsymbol{y}(k+1) \le \bar{\boldsymbol{\psi}} \tag{2}$$

其中, $\bar{u}_j > 0$, $j \in \{1,\cdots,n_u\}$; $\bar{\psi}_j > 0$, $j \in \{1,\cdots,q\}$; $\Psi \in \Re^{q\times n_y}$. 此外, 假定 $[A(k)|B(k)|C(k)|D(k)|E(k)] \in \Omega$, $\Omega = \mathrm{Co}\{[A_l|B_l|C_l|D_l|E_l]|l \in \{1,\cdots,L\}\}$.

对于上述系统 (1) 和 (2), 动态输出反馈控制器[11] 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_c(i+1|k) =& A_c(k)\boldsymbol{x}_c(i|k) + L_c(k)\boldsymbol{y}(i|k)\\ \boldsymbol{u}(i|k) =& F_x(k)\boldsymbol{x}_c(i|k) + F_y(k)\boldsymbol{y}(i|k)\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{x}_c \in \Re^{n_x}$ 为估计状态 (或称为控制器状态). $\{A_c(k), L_c(k)\}$ 为控制器增益矩阵; $\{F_x(k), F_y(k)\}$ 为反馈增益矩阵. 根据式 (3) 和 (1), 获得如下扩展的闭环系统:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}(i+1|k) = \Phi(i,k)\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k) + \Gamma(i,k)\boldsymbol{w}(k+i),\\ \forall i \ge 0,\ \tilde{\boldsymbol{x}}(0|k) = \tilde{\boldsymbol{x}}(k)\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k),\ \boldsymbol{x}_c{}^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$$

$$\Phi(i,k) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & B(k+i)F_x(k) \\ L_c(k)C(k+i) & A_c(k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = A(k+i) + B(k+i)F_y(k)C(k+i)$$

$$\Gamma(i,k) = \begin{bmatrix} B(k+i)F_y(k)E(k+i) + D(k+i) \\ L_c(k)E(k+i) \end{bmatrix}$$

在每个时刻更新 $\{A_c, L_c, F_x, F_y\}(k)$ 时, 可采用文献 [11] 的在线方法. 本文为降低计算量, 根据文献 [11] 中方法离线计算控制器参数和吸引域. 但为

了提出有效的离线方法, 对文献 [11] 的在线方法进行了一些改进, 以适应离线算法的需求.

2 输出反馈鲁棒预测控制在线方法以及改进

2.1 主优化问题和约束处理

根据文献 [11] 中的 DOFRMPC 在线综合方法, 在每一时刻 k, 考虑如下优化问题:

$$\min_{\gamma,Q,A_c,L_c,F_x,F_y}\ \max_{[A|B|C|D|E](k+i)\in\Omega,w(k+i)\in\varepsilon_{P_w}} \gamma \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & \|\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)\|^2_{Q^{-1}}\geq 1 \Rightarrow \|\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)\|^2_{Q^{-1}}-\\ & \|\tilde{\boldsymbol{x}}(i+1|k)\|^2_{Q^{-1}}\geq \frac{1}{\gamma}\|\boldsymbol{y}(i|k)\|^2_{\mathscr{Q}}+\\ & \frac{1}{\gamma}\|\boldsymbol{u}(i|k)\|^2_{\mathscr{R}},\ \forall i\geq 0\end{aligned} \tag{6}$$

$$-\bar{\boldsymbol{u}}\leq \boldsymbol{u}(i|k)\leq \bar{\boldsymbol{u}},\ -\bar{\boldsymbol{\psi}}\leq \Psi\boldsymbol{y}(i+1|k)\leq \bar{\boldsymbol{\psi}},\quad \forall i\geq 0 \tag{7}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\in \varepsilon_{Q^{-1}} \tag{8}$$

$$|\boldsymbol{e}(i+1|k)|\leq \bar{\Theta}\bar{\boldsymbol{e}},\quad \forall i\geq 0 \tag{9}$$

其中, $\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x_c}(k)$; $\mathscr{Q},\mathscr{R}$ 为对称正定加权矩阵; $\bar{\Theta}=\mathrm{diag}\{\bar{\sigma}_1,\cdots,\bar{\sigma}_{n_x}\}$ 为预先定义的对角矩阵, 其中, $\bar{\sigma}_p>0$; $\bar{\boldsymbol{e}}=[\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_{n_x}]^{\mathrm{T}}$, $\bar{e}_p>0$ 预先设定, $p\in\{1,\cdots,n_x\}$; 其他符号意义参考文献 [11]. 此外, 令 $Q=M^{-1}$, 其中

$$M=\begin{bmatrix} M_1 & M_2^{\mathrm{T}}\\ M_2 & M_3\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^{\mathrm{T}}\\ Q_2 & Q_3\end{bmatrix}$$

为数值方便, 令 $M_2=-M_1$[7], 因此

$$Q=\begin{bmatrix} Q_1 & Q_3\\ Q_3 & Q_3\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix} M_1 & -M_1\\ -M_1 & M_3\end{bmatrix} \tag{10}$$

每一时刻 k, 若问题 (5) ∼ (9) 有解, 则 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)\in\varepsilon_{Q^{-1}}$, 且式 (4) 关于公共 Lyapunov 矩阵 Q^{-1} 二次有界. 文献 [11] 中估计误差为椭圆形, 本文则采用凸多面体来表示. 此外, 在优化问题中添加了估计误差约束 (9). 在当前时刻 k, 增加该约束具有不利影响, 但在滚动时域控制中, 通过适当选取矩阵 $\bar{\Theta}$, 可提高控制性能.

2.2 稳定性条件以及约束处理

引理 1. 文献 [11] 的二次有界性条件 (6) 由如下线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 保证:

$$\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\Upsilon^{QB}_{lj}\geq 0 \tag{11}$$

其中

$$\Upsilon^{QB}_{lj}=\begin{bmatrix} (1-\alpha)M_1 & \star & \star & \star & \star & \star & \star\\ -(1-\alpha)M_1 & (1-\alpha)M_3 & \star & \star & \star & \star & \star\\ 0 & 0 & \alpha P_w & \star & \star & \star & \star\\ \Delta_1' & B_lF_x & \Delta_2' & Q_1 & \star & \star & \star\\ L_cC_j & A_c & L_cE_j & Q_3 & Q_3 & \star & \star\\ \mathscr{Q}^{\frac{1}{2}}C_j & 0 & \mathscr{Q}^{\frac{1}{2}}E_j & 0 & 0 & \gamma I & \star\\ \mathscr{R}^{\frac{1}{2}}F_yC_j & \mathscr{R}^{\frac{1}{2}}F_x & \Delta_3 & 0 & 0 & 0 & \gamma I\end{bmatrix}$$

$\Delta_1'=A_l+B_lF_yC_j$, $\Delta_2'=B_lF_yE_j+D_l$, $\Delta_3=\mathscr{R}^{\frac{1}{2}}F_yE_j$

引理 2. (见文献 [11]) 输入/输出约束 (7) 的充分条件为, 存在对称矩阵 $\{M,Z,\Xi\}$, 使式 (8)、式 (11) 和如下条件满足:

$$\begin{bmatrix} M & \star & \star\\ 0 & P_w & \star\\ [F_yC_j\ \ F_x] & F_yE_j & Z\end{bmatrix}\geq 0 \tag{12}$$

$$Z_{ss}\leq \frac{1}{2}\bar{u}_s^2,\ s\in\{1,\cdots,n_u\} \tag{13}$$

$$\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\Upsilon^{y}_{hlj}\geq 0,\ h\in\{1,\cdots,L\} \tag{14}$$

$$\Xi_{ss}\leq \frac{1}{3}\bar{\psi}_s^2,\ s\in\{1,\cdots,q\} \tag{15}$$

其中

$$\Upsilon^{y}_{hlj}=\begin{bmatrix} M & \star & \star & \star\\ 0 & P_w & \star & \star\\ 0 & 0 & P_w & \star\\ \Psi C_h\,[A_l+B_lF_yC_j\ \ B_lF_x] & \Psi C_h(B_lF_yE_j+D_l) & \Psi E_h & \Xi\end{bmatrix}$$

Z_{ss} 和 Ξ_{ss} 分别为 Z 和 Ξ 的第 s 个对角元素.

在每个时刻 k, 估计状态 $\boldsymbol{x}_c(k)$ 已知, 真实状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 不可测. 当估计误差界已知时, 真实状态的界可知, 因此, 可以利用真实状态的界代替 $\boldsymbol{x}(k)$. 假定 k 时刻, $\boldsymbol{e}(k)\in\mathcal{E}(k)$, $\mathcal{E}(k)$ 定义为

$$\mathcal{E}(k)\triangleq \mathrm{Co}\{\boldsymbol{\epsilon}_1(k),\boldsymbol{\epsilon}_2(k),\cdots,\boldsymbol{\epsilon}_{2^{n_x}}(k)\} \tag{16}$$

其中, $\boldsymbol{\epsilon}_r(k)$, $r\in\{1,\cdots,2^{n_x}\}$ 为估计误差集合的顶点. 因此, 满足扩展状态 (8) 的条件为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_c(k)+\boldsymbol{\epsilon}_r(k)\\ \boldsymbol{x}_c(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} M\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_c(k)+\boldsymbol{\epsilon}_r(k)\\ \boldsymbol{x}_c(k)\end{bmatrix}\leq 1,\quad r\in\{1,\cdots,2^{n_x}\} \tag{17}$$

估计误差约束 (9) 考虑了当前时刻 k 之后所有的模型和噪声的不确定性, 对此有下述的结论:

引理 3. 假定在时刻 k, 约束 (11) 和 (17) 满足, 且存在对称矩阵 Λ, 使得如下条件满足:

$$\sum_{l=1}^{L}\lambda_l(k+i)\sum_{j=1}^{L}\lambda_j(k+i)\Upsilon_{lj}^{EC}\geq 0$$

$$\Upsilon_{lj}^{EC}=\begin{bmatrix} M & \star & \star \\ 0 & P_w & \star \\ \Delta_4 & \Delta_5 & \frac{1}{2}\Lambda \end{bmatrix}, l,j\in\{1,\cdots,L\}$$

$$\Delta_4=[A_l+B_lF_yC_j-L_cC_j \quad B_lF_x-A_c]$$

$$\Delta_5=B_lF_yE_j+D_l-L_cE_j \tag{18}$$

$$\Lambda_{pp}\leq(\bar{\sigma}_p\bar{e}_p)^2,\quad p\in\{1,\cdots,n_x\} \tag{19}$$

其中, Λ_{pp} 为矩阵 Λ 的第 p 个对角元素. 则式 (9) 满足.

证明. 因式 (11) 和 (17) 满足, 可知 $\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)\in\varepsilon_{Q^{-1}},\forall i\geq 0$. 定义 ξ_p 为 n_x 维单位矩阵的第 p 行, 则:

$$\max_{i\geq 0}\mid\xi_p\boldsymbol{e}(i+1|k)\mid^2=\max_{i\geq 0}\Big|\xi_p[I,-I][\Phi(i,k),\Gamma(i,k)]\times \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)\\ \boldsymbol{w}(k+i)\end{bmatrix}\Big|^2\leq\max_{i\geq 0}\Big\|\xi_p[I,-I][\Phi(i,k),\Gamma(i,k)]\times \begin{bmatrix}Q^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & P_w^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\Big\|^2\Big\|\begin{bmatrix}Q^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & P_w^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k)\\ \boldsymbol{w}(k+i)\end{bmatrix}\Big\|^2\leq 2\max_{i\geq 0}\Big\|\xi_p[I,-I][\Phi(i,k),\Gamma(i,k)]\begin{bmatrix}Q^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & P_w^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\Big\|^2$$

若存在对称矩阵 Λ 和对角矩阵 $\bar{\Theta}$, 满足 $\Lambda_{pp}\leq(\bar{\sigma}_p\bar{e}_p)^2$, 使得:

$$\Lambda-2[I,-I][\Phi(i,k),\Gamma(i,k)]\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & P_w^{-1}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Phi(i,k)^{\mathrm{T}}\\ \Gamma(i,k)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -I\end{bmatrix}\geq 0 \tag{20}$$

则 $\mid\boldsymbol{e}(i+1|k)\mid\leq\bar{\Theta}\bar{\boldsymbol{e}}$, 对任意 $i\geq 0$. 通过利用 Schur 补引理以及系统的多包描述, 可知式 (20) 等价于式 (18). □

注 1. 式 (9) 考虑到 k 时刻之后, 在当前控制器参数固定时的估计误差约束. 对任意 $p\in\{1,\cdots,n_x\}$, 当 $\bar{\sigma}_p$ 越大, k 时刻之后的估计误差的不确定性越大, 而较小的 $\bar{\sigma}_p$ 可能导致优化问题 (21) 不可行. 在文献 [6] 中, 为计算离线控制器参数, 选取 $\bar{\Theta}=I$. 文献 [7] 中, 在线主优化问题中未考虑到 k 时刻之后的估计误差约束, 其等价于 $\bar{\sigma}_p=\infty$, 对任意 $p\in\{1,\cdots,n_x\}$, 而在线的辅助优化能够更新实时的估计误差.

通过上述推导, 在线优化问题 (5) ∼ (9) 可转化为

$$\begin{aligned}&\min_{\alpha,\gamma,A_c,L_c,F_x,F_y,Q_1,Q_3,M_1,M_3,Z,\Xi,\Lambda}\ \gamma\\ &\text{s.t.}\quad \text{式}(10)\sim(15),\text{式}(17)\sim(19),M=Q^{-1}\end{aligned} \tag{21}$$

对优化问题 (21) 的求解, 可采用文献 [11] 中的方法 (见附录 A).

3 DOFRMPC 离线算法

3.1 离线计算控制器参数

由式 (21) 得到的任何一组控制器参数, 都能够保证扩展状态收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}}=0$ 附近的区域 (见附录 B). 当远离 $\tilde{\boldsymbol{x}}=0$ 的扩展状态向 $\tilde{\boldsymbol{x}}=0$ 附近收敛时, 采用固定的控制器参数是保守的. 为此, 本文提出的算法在一系列离线计算的控制器参数中进行切换.

本文通过离线求解优化问题 (21) 计算离线控制器参数, 构建一系列的吸引域. 以 n_x 维状态空间中均匀分布在原点周围的有限离散点为选定估计状态, 且假定真实状态均匀地分布在选定的估计状态周围, 不同真实状态的界通过估计误差集合的界限定. 本文采用类似文献 [12] 中的方法, 将 n_x 维状态空间原点附近的区域进行正交等体积分割获得的交叉点为选定估计状态. T_d, $d\in\{1,\cdots,n_x\}$ 为在此分割区域内每一维正交坐标轴上的分割间距. 此分割方法将被分割区域包含的每一维正交坐标轴分割为 $2N_p$ 个分割段, 获得 $(2N_p)^{n_x}$ 个分割元以及 $(2N_p+1)^{n_x}$ 个交叉点, 以这些交叉点为选定的估计状态. 对每一分割元, 采用 $\mathscr{S}_f$ 表示, 其中, $f\in\{1,\cdots,(2N_p)^{n_x}\}$ 表示分割元序号; $\mathscr{V}(\mathscr{S}_f)=\{\boldsymbol{v}_f^1,\boldsymbol{v}_f^2,\cdots,\boldsymbol{v}_f^{2^{n_x}}\}$ 表示与分割元 $\mathscr{S}_f$ 对应的顶点集合, 其中, $\boldsymbol{v}_f^m\in\mathfrak{R}^{n_x},m\in\{1,\cdots,2^{n_x}\}$. 图 1 (a) 为 $n_x=2$ 时, 对分割区域进行正交等体积分割, 其中, $N_p=3$. 图 1 (b) 为以分割元顶点为估计状态, 针对每一顶点和不同的估计误差集合, 以估计状态结合估计误差集合的顶点表示不同真实状态的界, 构建扩展状态. 其中, 图 1 (b) 中的粗黑线的矩形对应分割区域中的粗黑线表示的分割元.

定义一组嵌套的凸集合 $\mathcal{E}^n=\{\boldsymbol{\xi}\in\mathfrak{R}^{n_x}\mid-\eta_n\bar{\boldsymbol{e}}\leq\boldsymbol{\xi}\leq\eta_n\bar{\boldsymbol{e}}\}$ 为估计误差集合, 其中, $\eta_n\in(0\ 1]$, $n\in\{1,\cdots,N\}$ 预先选定, 且满足 $\eta_n<\eta_{n+1}$, $n\in\{1,\cdots,N-1\}$. 当 $\eta_N=1$ 时, 对应最大的估计误差集合 $\mathcal{E}^N$. $\mathcal{E}^n$ 中的每一集合为具有 2^{n_x} 个顶点的多面体, 其顶点表示为 $\eta_nS_r\bar{\boldsymbol{e}}$, 其中, $S_r,r\in\{1,\cdots,2^{n_x}\}$ 的每个对角元素为 1 或者 -1, 非对角元素为 0. 当 $r\neq m$ 时, $S_r\neq S_m$. 每一预先定义的估计误差集合的中心点为选定的估计状态. 针对每

一估计状态和每一估计误差集合的组合, 离线最小化优化性能指标 $\{\gamma_{(\boldsymbol{v}_f^m,\,n)}\}$, $f\in\{1,\cdots,(2N_p)^{n_x}\}$, $m\in\{1,\cdots,2^{n_x}\}$, $n\in\{1,\cdots,N\}$, 获得对应的控制器参数和吸引域.

算法 1 (离线计算控制器参数和吸引域).

将 $\boldsymbol{x}_c(k)$ 用分割元的顶点 $\{\boldsymbol{v}_f^m\}$ 代替, $f\in\{1,\cdots,(2N_p)^{n_x}\}$, $m\in\{1,\cdots,2^{n_x}\}$, 而估计误差集合逐一取 $\mathcal{E}^n, n\in\{1,\cdots,N\}$, 代入式 (17) 中. 利用算法 3 (见附录 A) 求解优化问题 (21). 针对分割元中的每一顶点和每一估计误差集合, 离线计算获得 $\{\{\gamma,A_c,L_c,F_x,\ F_y,Q_1,Q_3,M_1,M_3\}_{(\boldsymbol{v}_f^m,\,n)}\}$ 和对应的吸引域 $\{\{\varepsilon_{Q^{-1}}\}_{(\boldsymbol{v}_f^m,\,n)}\}$.

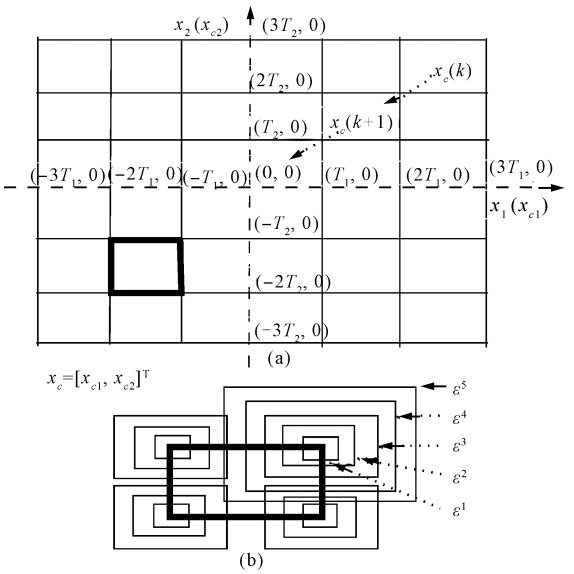


图 1 $n_x=2$ 时离线确定估计状态和构建扩展状态

Fig. 1 Off-line specifying the estimated states and constructing the augmented states when $n_x=2$

3.2 在线更新估计误差

定义 $k'\triangleq k+1$, $\mathscr{P}_w\triangleq \mathrm{Co}\{\boldsymbol{\varpi}_1,\boldsymbol{\varpi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varpi}_{n_p^w}\}$ 为有界噪声集合 ε_{P_w} 的外包集[7]. 在每一 $k\geq 0$ 时刻, 实时的一步向前估计误差集合为 $\mathcal{P}(k)$; 实时估计误差集合的矩形外包近似集合为 $\mathcal{E}(k)$, 其定义为 $\mathcal{E}(k)\triangleq\{\xi\in\Re^{n_x}|-\Theta(k)\bar{\boldsymbol{e}}\leq\xi\leq\Theta(k)\bar{\boldsymbol{e}}\}$, 其中, $\Theta(k)=\mathrm{diag}\{\sigma_1(k),\cdots,\sigma_{n_x}(k)\}$, $p\in\{1,\cdots,n_x\}$.

在当前时刻 k, 如果 $\boldsymbol{e}(k)\in\mathcal{P}(k)\subseteq\mathcal{E}(k)$, 根据式 (4) 和 $\mathscr{P}_w$ 的定义, 得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}(k')\in\mathcal{P}(k')=\mathrm{Co}\{\boldsymbol{\vartheta}_{ljrs}(k')|l,j\in\{1,\cdots,L\},\\&r\in\{1,\cdots,2^{n_x}\},s\in\{1,\cdots,n_p^w\}\}\\&\boldsymbol{\vartheta}_{ljrs}(k')=\{(A_l+B_lF_y(k)C_j-L_c(k)C_j)S_r\Theta(k)\bar{\boldsymbol{e}}+\\&(A_l-L_c(k)C_j+B_lF_y(k)C_j+B_lF_x(k)-A_c(k))\times\\&\boldsymbol{x}_c(k)+(B_lF_y(k)E_j+D_l-L_c(k)E_j)\boldsymbol{\varpi}_s\}\end{aligned}\tag{22}$$

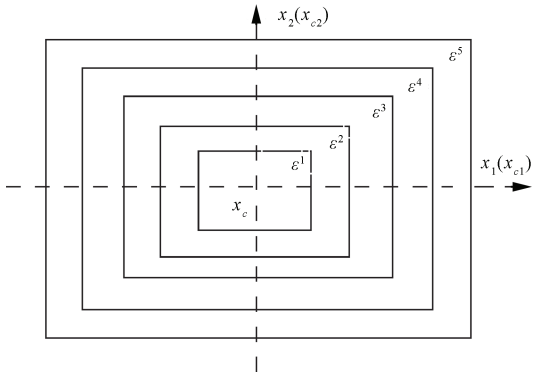


图 2 $n_x=2$ 时嵌套的矩形表示估计误差集合

Fig. 2 The estimation error sets represented by the nested rectangle when $n_x=2$

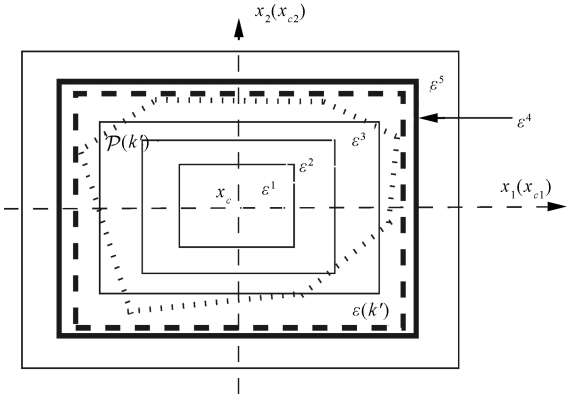


图 3 $n_x=2$ 时在线更新估计误差集合

Fig. 3 On-line refreshing the estimation error set when $n_x=2$

通过上述的 $\boldsymbol{\vartheta}_{ljrs}(k')$, $\mathcal{E}(k')$ ($\mathcal{P}(k')$ 的矩形外包近似) 计算如下:

$$\begin{aligned}&\min_{\sigma_1(k')>0,\cdots,\sigma_{n_x}(k')>0}\sum_{p=1}^{n_x}\sigma_p(k')\\&\text{s.t.}-\Theta'(k')\bar{\boldsymbol{e}}\leq\boldsymbol{\vartheta}_{ljrs}(k')\leq\Theta'(k')\bar{\boldsymbol{e}},l,j\in\{1,\cdots,L\},\\&\quad r\in\{1,\cdots,2^{n_x}\},s\in\{1,\cdots,n_p^w\}\end{aligned}\tag{23}$$

其中, $\Theta'(k')=\mathrm{diag}\{\sigma_1'(k'),\cdots,\sigma_{n_x}'(k')\}$. 在每一时刻 k, 通过求解优化问题 (23), 实时的一步向前估计误差集合 $\mathcal{P}(k')$ 的外包近似为 $\mathcal{E}(k')$, 其中 $\sigma_p(k')=\min\{\sigma_p'(k'),\bar{\sigma}_p\}$, $p\in\{1,\ldots,n_x\}$. 如果 $\sigma_p(k')\leq 1,\forall p\in\{1,\cdots,n_x\}$, 则能够搜索到 $v(k')\in\{1,\cdots,V\}$, 使得 $\boldsymbol{e}(k')\in\mathcal{P}(k')\subseteq\mathcal{E}(k')\subseteq\mathcal{E}^{v(k')}$, 其中 $\mathcal{E}^{v(k')}$ 为离线定义的估计误差集合, 且紧凑地包含 $\mathcal{E}(k')$. 如果 $\sigma_p(k')>1,\exists p\in\{1,\cdots,n_x\}$, 则 $\mathcal{E}(k')$ 不能包含于离线定义的最大估计误差集合, 在此情况下, 采取上一时刻的控制器参数, 并且用 $\mathcal{E}(k')$ 的顶点, 在 k' 时刻计算一步向前估计误差集合. 当前模型参数精确已知时, 一步向前估计误差集

合计算还可参考文献 [7]. 图 3 表示了当 $n_x = 2$ 和 $N = 5$ 时, 如果 $\mathcal{P}(k')$ (点线多边形) 的矩形外包近似集合 $\mathcal{E}(k')$ (断线矩形) 被离线定义的 $\mathcal{E}^4$ (粗黑实线矩形) 最紧凑地包含, 则实时的一步向前估计误差集合可通过 $\mathcal{E}(k')$ 近似, 而 $\mathcal{E}^4$ 为在线选取的估计误差集合.

3.3　在线搜索控制器参数

假定在 $k \geq 0$ 时, 实时估计状态位于某个分割元, 即满足 $\boldsymbol{x}_c(k) \in \mathscr{S}_{\hat{f}}$, 存在 $\hat{f} \in \{1, \cdots, (2N_p)^{n_x}\}$, 且实时估计误差集合 $\mathcal{P}(k) \subseteq \mathcal{E}(k) \subseteq \mathcal{E}^{n(k)}$, 存在 $n(k) \in \{1, \cdots, N\}$. 则对分割元 $\mathscr{S}_{\hat{f}}$, 存在 2^{n_x} 个相关的吸引域, 记为 $\{\{\varepsilon_{Q^{-1}}\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}$. 实时扩展状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 能够被 $\{\{\varepsilon_{Q^{-1}}\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}$ 中的某些吸引域所包含, 因此, 至多搜索到 2^{n_x} 组可行的控制器参数, 记为 $\{\{A_c, L_c, F_x, F_y\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}$, $m \in \mathcal{M}(k)$, 而 $\mathcal{M}(k)$ 表示可行的 m 的集合. 因为 $\{\gamma_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}$ 在估计误差集合 $\mathcal{E}^{n(k)}$ 选定时, 对应于分割元 $\mathscr{S}_{\hat{f}}$ 的至多 2^{n_x} 个优化性能指标, 因此, 最优的控制器参数对应于包含当前实时扩展状态且优化性能指标最小的吸引域, 且记为 $\gamma^*(k) = \min\{\gamma_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}, m \in \mathcal{M}(k)$, 并且采用对应于 $\gamma^*(k)$ 的控制器参数 $\{A_c, L_c, F_x, F_y\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}$.

利用二次有界性方法, 则扩展状态能够收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近, 且优化性能指标是单调不增的[11]. 在本文中, 实时切换控制器参数需要保证搜索到的吸引域所对应的优化性能指标是单调不增的, 因此, 需要在每个采样时刻比较优化性能指标. 在下一采样时刻 k', 控制器参数的搜索方法同 k 时刻, 但需要进行采样时刻之间优化性能指标的比较. 如果 $\gamma^*(k') < \gamma^*(k)$, 则采用 k' 时刻搜索到的控制器参数, 否则采取上一时刻的控制器参数.

3.4　在线搜索总算法和稳定性证明

算法 2 (在线搜索控制器参数和更新估计误差). 选取初始估计状态 $\boldsymbol{x}_c(0)$, 初始估计误差集合 $\mathcal{P}(0) \subseteq \mathcal{E}(0) \subseteq \mathcal{E}^N$, $\gamma^0 = \infty$, $p_{ro} = 1$. 在每一时刻 $k \geq 0$, 算法如下:

1) 如果 $p_{ro} = 1$

a) 选取包含 $\mathcal{E}(k)$ 的离线估计误差集合 $\mathcal{E}^{n(k)}$, 存在 $n(k) \in \{1, \cdots, N\}$. 搜索实时估计状态 $\boldsymbol{x}_c(k)$ 所在的分割元 $\mathscr{S}_{\hat{f}}$, $\hat{f} \in \{1, \cdots, (2N_p)^{n_x}\}$.

b) 搜索 $\{\{\varepsilon_{Q^{-1}}\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}, m \in \{1, \cdots, 2^{n_x}\}$ 中的某一吸引域, 其包含实时扩展状态 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 且优化性能指标最小, 记 $\gamma^*(k) = \min\{\gamma_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}\}$.

c) 如果 $\gamma^*(k) < \gamma^0$, 令 $\gamma^0 = \gamma^*(k)$, 且采用对应于 $\gamma^*(k)$ 的控制器参数 $\{A_c, L_c, F_x, F_y\}(k) = \{A_c, L_c, F_x, F_y\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n(k))}$; 否则, 令 $p_{ro} = 0$.

2) 如果 $p_{ro} = 0$, 则采取上一时刻的控制器参数.

3) 实施 $\boldsymbol{u}(k) = F_x(k)\boldsymbol{x}_c(k) + F_y(k)\boldsymbol{y}(k)$, 计算 $\boldsymbol{x_c}(k') = A_c(k)\boldsymbol{x}_c(k) + L_c(k)\boldsymbol{y}(k)$.

4) 由式 (23) 计算 $\mathcal{P}(k')$ 的矩形外包集合 $\mathcal{E}(k')$. 如果 $\sigma_p(k') \leq 1$, 对任意 $p \in \{1, \cdots, n_x\}$, 则令 $p_{ro} = 1$, 否则令 $p_{ro} = 0$, 返回步骤 1).

注 2. 对系统状态维数高、状态空间的分割元多以及定义的嵌套的估计误差集合多时, 采用本文提出的方法会使离线计算量迅速增加, 并且需要大量的存储空间和涉及增加的在线计算量. 因此, 本文提出的算法仅适用于系统状态维数低的系统.

定理 1. 对系统 (1) 和 (2), 动态输出反馈控制参数 $\{\{A_c, L_c, F_x, F_y\}_{(\boldsymbol{v}_{\hat{f}}^m, n)}\}, f \in \{1, \cdots, (2N_p)^{n_x}\}$, $m \in \{1, \cdots, 2^{n_x}\}$, $n \in \{1, \cdots, N\}$ 和对应的吸引域通过算法 1 离线计算, 且结合算法 2 在线搜索. 假定在 $k = 0$ 时, 可通过算法 2 搜索到控制器参数, 则 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 将收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近, 且约束 (7) 得到满足.

证明. 如果在 $k = 0$ 时, 搜索到控制器参数, 则根据算法 2, 在所有 $k > 0$ 时也能搜索到可行的控制器参数. 考虑所有 $k \geq 0$, $\gamma^*(k)$ 将不随时间 k 的增加而增加, $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 将收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近. 式 (12) ~ (15) 确保输入/输出约束 (7) 在所有 $k \geq 0$ 时刻得到满足. □

4　数值算例

考虑连续搅拌釜式反应器 (Continuous stirred tank reactor, CSTR) 模型. 反应釜中为 $A \rightarrow B$ 的不可逆放热化学反应. 根据反应物 A 的物料平衡和能量平衡条件, 可得以下动态模型[7, 10]:

$$\begin{aligned}\dot{C}_A &= \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT}\Big)C_A + N_c w \\ \dot{T} &= \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{-\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT}\Big)C_A + \\ &\quad \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T) + N_T w \end{aligned} \tag{24}$$

其中, C_A 为反应釜中 A 物质浓度, T 为反应釜的反应温度, T_c 为冷却剂的温度. 目标是通过操控 T_c 来调节 T, 并且满足约束 $T_c^l \leq T_c \leq T_c^u$, $T^l \leq T \leq T^u$, $C_A^l \leq C_A \leq C_A^u$. 给定平衡点为 $\{C_A^{eq}, T^{eq}, T_c^{eq}\}$. 定义状态变量为 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}} = [C_A - C_A^{eq},\ T - T^{eq}]^{\mathrm{T}}$, 输入为 $u = T_c - T_c^{eq}$ 以及 $y = x_2 + N_y w$. 状态 x_2 满足约束 $\underline{x}_2 \leq x_2 \leq \overline{x}_2$ ($\underline{x}_2 = T^1 - T^{eq}$, $\overline{x}_2 = T^u - T^{eq}$). 其中, $\varphi_1(x_2) = k_0 \exp(-\frac{E/R}{x_2 + T^{eq}})$ 和 $\varphi_2(x_2) = k_0[\exp(-\frac{E/R}{x_2 + T^{eq}}) - \exp(-\frac{E/R}{x_2})]$. 令

$\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(x_2)-\varphi_1(\underline{x}_2))}{\varphi_1(\bar{x}_2)-\varphi_1(\underline{x}_2))}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_1(\bar{x}_2)-\varphi_1(x_2))}{\varphi_1(\bar{x}_2)-\varphi_1(\underline{x}_2))}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_2(x_2)-\varphi_2(\underline{x}_2))}{\varphi_2(\bar{x}_2)-\varphi_2(\underline{x}_2))}$, $\lambda_4 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_2(\bar{x}_2)-\varphi_2(x_2))}{\varphi_2(\bar{x}_2)-\varphi_2(\underline{x}_2))}$.

选择 $T_c^1 = 328\,\mathrm{K}$, $T_c^u = 348\,\mathrm{K}$, $T^1 = 340\,\mathrm{K}$, $T^u = 360\,\mathrm{K}$, $C_A^1 = 0\,\mathrm{mol/L}$, $C_A^u = 1\,\mathrm{mol/L}$, $C_A^{eq} = 0.5\,\mathrm{mol/L}$, $T^{eq} = 350\,\mathrm{K}$, $T_c^{eq} = 338\,\mathrm{K}$, $q = 100\,\mathrm{L/min}$, $C_{Af} = 1\,\mathrm{mol/L}$, $T_f = 350\,\mathrm{K}$, $V = 100\,\mathrm{L}$, $\rho = 1\,000\,\mathrm{g/L}$, $C_p = 0.239\,\mathrm{J/(g{\cdot}K)}$, $\Delta H = -1.2\times 10^4\ \mathrm{J/(min{\cdot}K)}$, $E/R = 8\,750\,\mathrm{K}$, $k_0 = 7.2\times 10^{10}\,\mathrm{min}^{-1}$, $UA = 5\times 10^4\,\mathrm{J/(min{\cdot}K)}$, $N_c = 0.05\,\mathrm{mol/(L{\cdot}min)}$, $N_T = 1\,\mathrm{K/min}$, $N_y = 1\,\mathrm{K}$. 上述的动态系统 (24) 对应的连续时间线性时变模型的顶点为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.7642 & -0.0381 \\ 138.7889 & -1.1800 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.7177 & -0.0381 \\ -14.1716 & -1.1800 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2.2410 & -0.0622 \\ 62.3086 & 0.0299 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2.2410 & -0.0140 \\ 62.3086 & -2.3900 \end{bmatrix}$$

$$B_l = \begin{bmatrix} 0 & 2.0921 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ C_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_l = \begin{bmatrix} 0.05 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ E_l = 1,\ l \in \{1,2,3,4\}$$

针对采样时间 T_s 离散化各个子模型得到需要的离散模型.

对离线算法 1, 选取采样时间 $T_s = 0.05\,\mathrm{s}$, $P_w = 100$, $\mathscr{Q} = 1$, $\mathscr{R} = 1$, $\alpha = 0.001$, $\eta_n = 0.55 + 0.05(n-1), n \in \{1,\cdots,10\}$ $(N = 10)$, $\bar{\boldsymbol{e}} = [0.08,\ 1.5]^{\mathrm{T}}$, $\Theta(k) = \mathrm{diag}\{\sqrt{3.8}, \sqrt{3.4}\}$, $\kappa = 0.98$, $N_0 = 200$. 选取原点周围的正交区域 $(n_x = 2)$, 其 4 个顶点为: $\{[-0.12,-2.4]^{\mathrm{T}},\ [-0.12,2.4]^{\mathrm{T}},\ [0.12,2.4]^{\mathrm{T}},\ [0.12,-2.4]^{\mathrm{T}}\}$. 在 x_1 (x_{c1}) 轴上的分割间距 $T_1 = 0.015$, x_2 (x_{c2}) 轴上的分割间距 $T_2 = 0.3$. 在算法 2 中, 选取初始状态估计状态 $\boldsymbol{x}_c(0) = [0.115, 2.15]^{\mathrm{T}}$, 估计误差集合被 $\mathcal{E}^{10}$ 所包含. 仿真中 w 统一取为 $[-0.1, 0.1]$ 区间上的相同的有界噪声序列. 仿真采用 Matlab 7.6 中的 LMI 工具箱, 所用计算机配置为 Pentium 4 CPU 2.40 GHz、内存 1 GB. 10 次仿真结果如图 4 ~ 6 所示, 其中, 图 4 表示闭环系统能够收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近; 图 5 所示的控制输入约束总是满足的; 图 6 表明了优化性能指标的单调不增性. 离线阶段, 计算一组控制器参数所需时间约为 10 min, 10 次在线搜索仿真平均时间为 6.52 s.

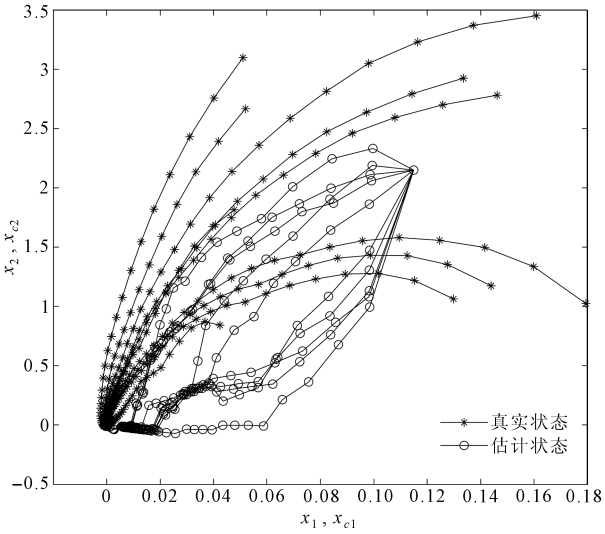


图 4 闭环系统状态轨迹图

Fig. 4 The state trajectories of the closed-loop system

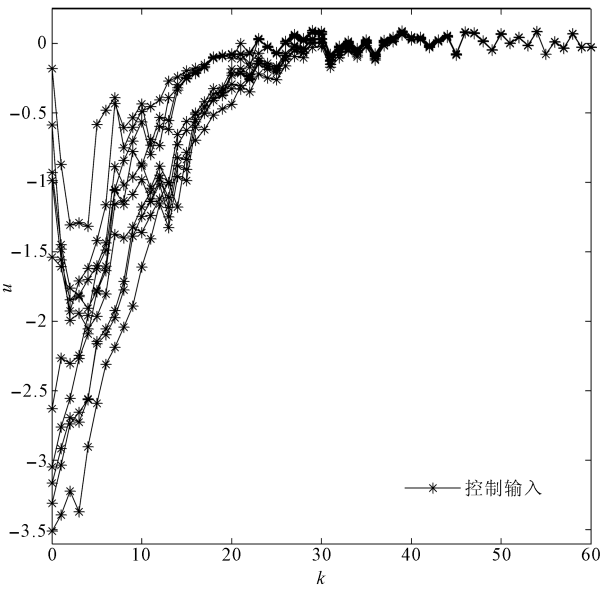


图 5 控制输入信号

Fig. 5 Control input signals

5 结论

本文考虑了存在多包不确定性和有界噪声的系统的 DOFRMPC 离线算法. 通过离线阶段建立表并进行在线搜索, 本文提出的算法能够保证扩展状态收敛到 $\tilde{\boldsymbol{x}} = 0$ 附近. 此外, 在线实时估计误差集合能够得到更新. 本文研究了调节问题, 对跟踪问题的研究正在进行中.

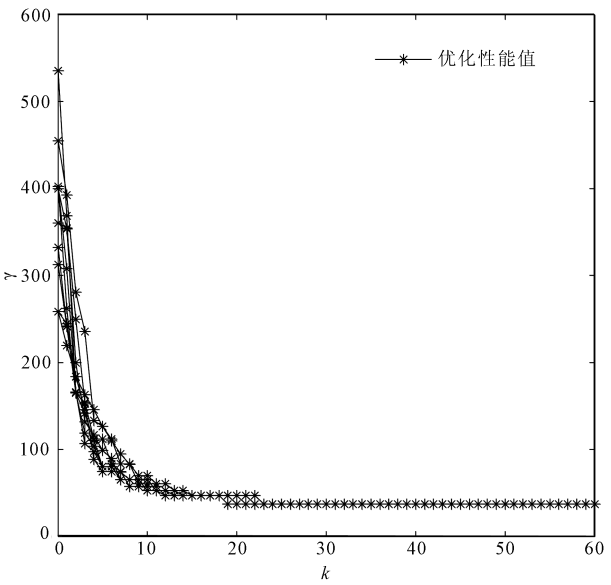


图 6　优化性能值

Fig. 6　The performance cost values

附录 A　DOFRMPC 在线近似最优算法[11]

下述条件能够确保矩阵不等式 (11)、(14) 及 (18) 满足:

$$\Upsilon_{ll}^{QB} \geq 0, \Upsilon_{lj}^{QB} + \Upsilon_{jl}^{QB} \geq 0, \Upsilon_{ll}^{EC} \geq 0, \Upsilon_{lj}^{EC} + \Upsilon_{jl}^{EC} \geq 0$$
$$\Upsilon_{hll}^{y} \geq 0,\ \ \Upsilon_{hlj}^{y} + \Upsilon_{hjl}^{y} \geq 0,\ \ h, l, j \in \{1, \cdots, L\},\ \ l < j \tag{A1}$$

即使当 α 固定时, 优化问题 (2) 也是非凸优化. 在一个优化问题中求解互逆的 M 和 Q 可以通过锥补算法[14], 因此, 优化求解中加入下述约束:

$$\begin{bmatrix} M & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{A2}$$

当式 (A2) 满足时, $\mathrm{tr}(QM) \geq n_x + n_{x_c}$ 总是满足的. 因此, 可通过最小化 $\mathrm{tr}(QM)$ 满足 $M = Q^{-1}$. 最小化 $\mathrm{tr}(QM)$ 时, 需要最小化 γ. 通过增加优化条件 (A2), (21) 的解可通过求解下述凸优化问题得到:

$$\min_{\alpha,\gamma,A_c,L_c,F_x,F_y,Q_1,Q_3,M_1,M_3,Z,\Xi,\Lambda} \gamma$$
$$\text{s.t. 式 } (10), (12), (13), (15), (17), (19), (\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}) \tag{A3}$$

采用迭代方法, 求解优化问题 (A3), 算法如下:

1) 选取足够大的迭代步数 $N_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ 以及 $\kappa \in (0, 1)$. 令 $t = 0, \mathrm{flag} = 0, \gamma^{\circ} = \infty$.

2) 如果 (A3) 不可行, 则转入步骤 6), 否则求解 (A3), 获得 $\{Q, M\}^t = \{Q, M\}^*$.

3) $t = t + 1$, 求解:

$$\min_{\alpha,\gamma,A_c,L_c,F_x,F_y,Z,\Xi,\Lambda} \gamma$$
$$\text{s.t. 式 } (12), (13), (15), (19), (\mathrm{A1}),\ \ Q = (M^{t-1})^{-1}$$
$$M = M^{t-1},\ \ \gamma < \kappa\gamma^{\circ} \tag{A4}$$

如果式 (A4) 可行, 则求解获得 $\{\gamma, A_c, L_c, F_x, F_y\}^{\circ} = \{\gamma, A_c, L_c, F_x, F_y\}^*$, $\{Q, M\}^{\circ} = \{(M^{t-1})^{-1}, M^{t-1}\}$, $\{Q, M\}^t = \{Q, M\}^{t-1}$, 令 $\mathrm{flag} = 1$, 转入步骤 4); 否则

a) 求解:

$$\min_{\alpha,\gamma,A_c,L_c,F_x,F_y,Q_1,Q_3,M_1,M_3,Z,\Xi,\Lambda} \mathrm{tr}(\Pi)$$
$$\text{s.t.}\quad \text{式 } (10), (12), (13), (15), (17), (19), (\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}),\quad \gamma < \kappa\gamma^{\circ} \tag{A5}$$

其中, $\Pi = M^{t-1}Q + Q^{t-1}M$.

b) 如果式 (A5) 不可行, 则转入步骤 6), 否则, 求解获得 $\{Q, M\}^t = \{Q, M\}^*$.

4) 如果 $t < N_0$, 则转入步骤 3).

5) 如果 $\mathrm{flag} = 1$, 则令 $\{Q, M\}^0 = \{Q, M\}^t$, $t = 0$, $\mathrm{flag} = 0$, 并且转入步骤 3);

6) 结束.

对上述算法, 为了降低计算量, 令 $d = 0$. 当该算法结束时, 获得 $\{\gamma, A_c, L_c, F_x, F_y, Q_1, Q_3, M_1, M_3\}^{\circ}$. 如果选取较大的 $\kappa \in (0, 1)$, 则需要更多迭代步数最小化 γ, 但较大的 κ 和较多的迭代步数可使最后得到的 γ 较小.

附录 B　利用二次有界方法证明吸引域内收敛性

对系统 (4), 椭圆 $\varepsilon_{Q^{-1}}$ 为其正不变集. 因为式 (11) 是比一般的二次有界条件 (见文献 [7] 中式 (6)) 更苛刻, 因此, 式 (11) 确保了系统 (4) 关于公共 Lypunov 矩阵 Q^{-1} 的二次有界性, 并且满足式 (11) 意味着 $\tilde{\boldsymbol{x}}(i|k), i > 0$, 在 $\varepsilon_{Q^{-1}}$ 的二次收敛性. 假定存在 $\{\alpha, \gamma, A_c, L_c, F_x, F_y, Q\} = \{\alpha, \gamma, A_c, L_c, F_x, F_y, Q\}^*$ 使式 (11) 满足. 如果存在 $\beta \in (0, 1]$ 使得

$$\sum_{l=1}^{L} \lambda_l(k+i) \sum_{j=1}^{L} \lambda_j(k+i) \tilde{\Upsilon}_{lj}^{QB} \geq 0,\quad \tilde{\Upsilon}_{lj}^{QB} =$$
$$\begin{bmatrix} (1-\alpha^*)\beta^{-1}M_1^* & \star & \star & \star & \star \\ -(1-\alpha^*)\beta^{-1}M_1^* & (1-\alpha^*)\beta^{-1}M_3^* & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \alpha^* P_w & \star & \star \\ \Delta_1^* & B_l F_x^* & \Delta_2^* & \beta Q_1^* & \star \\ L_c^* C_j & A_c^* & L_c^* E_j & \beta Q_3^* & \beta Q_3^* \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1^* = A_l + B_l F_y^* C_j, \Delta_2^* = B_l F_y^* E_j + D_l \tag{A6}$$

则系统 (4) 关于公共 Lyapunov 矩阵 βQ^* 二次有界. 最小化 β, 且满足式 (A6). 当 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k) \notin \varepsilon_{(\beta Q^*)^{-1}}$ 时, $\tilde{\boldsymbol{x}}(k')$ 将向 $\varepsilon_{(\beta Q^*)^{-1}}$ 收敛; 当 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k) \in \varepsilon_{(\beta Q^*)^{-1}}$ 时, $\tilde{\boldsymbol{x}}(k') \in \varepsilon_{(\beta Q^*)^{-1}}$.

References

1 Wan Z Y, Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 2003, **39**(5): 837−846

2 Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10): 1361−1379

3 Wan Z Y, Kothare M V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(7): 763−774

4 Ding Bao-Cang, Zou Tao. Synthesizing output feedback predictive control for constrained uncertain time-varying discrete systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 78−83 (丁宝苍, 邹涛. 约束时变不确定离散系统的输出反馈预测控制综合. 自动化学报, 2007, **33**(1): 78−83)

5 Ding B C, Huang B, Xu F W. Dynamic output feedback robust model predictive control. *International Journal of Systems Science*, 2011, **42**(10): 1669−1682

6 Ding B C, Xi Y G, Cychowski M T, O′Mahony T. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control. *Automatica*, 2008, **44**(1): 258−264

7 Ding B C. Constrained robust model predictive control via parameter-dependent dynamic output feedback. *Automatica*, 2010, **46**(9): 1517−1523

8 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. On estimation error bounds for receding-horizon filters using quadratic boundedness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(8): 1350−1355

9 Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. Design of state estimators for uncertain linear systems using quadratic boundedness. *Automatica*, 2006, **42**(3): 497−502

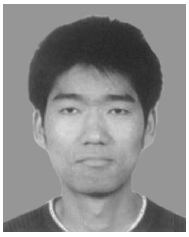
10 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31−37
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31−37)

11 Ding B C. Dynamic output feedback MPC for LPV systems via near-optimal solutions. In: Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. Yantai, China: IEEE, 2011. 3340−3345

12 Johansen T A. Approximate explicit receding horizon control of constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2004, **40**(2): 293−300

13 Wen C T, Ma X Y, Ydstie B E. Analytical expression of explicit MPC solution via lattice piecewise-affine function. *Automatica*, 2009, **45**(4): 910−917

14 El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171−1176



平续斌 西安交通大学电子信息与工程学院自动化系博士研究生. 主要研究方向为预测控制及其应用.
E-mail: pingxubin@126.com
(**PING Xu-Bin** Ph. D. candidate in the Department of Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University. His research interest covers predictive control and its applications.)

丁宝苍 西安交通大学教授. 2000 年和 2003 年分别在石油大学 (北京) 和上海交通大学获得硕士、博士学位. 2005 年 9 月到 2006 年 8 月间为加拿大阿尔伯达大学博士后. 2006 年 11 月到 2007 年 8 月间为新加坡南洋理工大学博士后. 主要研究方向为预测控制, 模糊控制及其在过程系统中的应用. 本文通信作者.
E-mail: baocang.ding@gmail.com
(**DING Bao-Cang** Professor at Xi′an Jiaotong University. He received his master degree from University of Petroleum in China (Beijing) in 2000 and Ph. D. degree from Shanghai Jiao tong University in 2003, respectively. From September 2005 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow in University of Alberta, Canada. From October 2007 to August 2006, he was a post-doctoral research fellow in Nanyang Technological University, Singapore. His research interest covers predictive control, fuzzy control and their applications in process industry. Corresponding author of this paper.)