一类缺乏明确平衡点的不确定系统的部分变量镇定

刘秀翀 [1] 宋崇辉 [1] 褚恩辉 [1]

摘 要 针对一类缺乏明确平衡点的不确定系统, 研究了系统部分变量的稳定性问题. 提出了将一致最终有界和渐近稳定相结合的系统稳定性模式, 并给出了该系统稳定性模式的条件. 基于该稳定性模式, 提出了阻尼配置控制方案, 使系统部分变量在不同阶段稳定于给定运行区域和原点. 所开展的研究工作拓展了不确定系统的稳定性研究, 解决了工业应用中普遍存在的一类缺乏明确平衡点的不确定系统的部分变量控制问题. 永磁同步电机的仿真验证了研究结果的有效性和实用性.

关键词 不确定系统, 一致最终有界, 部分变量稳定, 阻尼配置, 永磁同步电机

引用格式 刘秀翀, 宋崇辉, 褚恩辉. 一类缺乏明确平衡点的不确定系统的部分变量镇定. 自动化学报, 2013, **39**(6): 780−789

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00780

Partial Variable Stabilization of a Class of Uncertain Systems with Uncertain Equilibrium Point

LIU Xiu-Chong [1] SONG Chong-Hui [1] CHU En-Hui [1]

Abstract Partial variable stability is studied for a class of uncertain systems with uncertain equilibrium point. A stability model combining the ultimate boundedness and the asymptotic stability is proposed, and the conditions of the stability model are given. According to the proposed stability model, a damping assignment control scheme is presented, such that partial variable of the systems is stable in a given area and at the origin in different stages. The work of this paper develops the study on stability of uncertain systems, and solves the control problem of a class of uncertain systems with uncertain equilibrium point existing widely in industrial application. The effectiveness and the practicability of the research results are verified by the simulation experiment of a permanent magnet synchronous motor.

Key words Uncertain system, uniformly ultimate boundedness, partial variable stability, damping assignment, permanent magnet synchronous motor

Citation Liu Xiu-Chong, Song Chong-Hui, Chu En-Hui. Partial variable stabilization of a class of uncertain systems with uncertain equilibrium point. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 780−789

在电机驱动、电能变换和电力系统等领域, 普遍存在一类不确定系统, 在这类系统中, 系统的平衡状态取决于不确定的外接负荷[1−6]. 这表明在这类系统中, 不确定项的作用不会随系统状态趋近于某一已知定点而变小 (或消失). 因此这类系统根本就不存在明确的平衡状态. 如何研究这类系统的运动稳定性是实际应用提出的且尚未解决的理论课题.

研究这类系统运动稳定性的基础是分析不确定项的特性. 如果将这类系统的不确定项理解为全阶扰动, 则这类系统归结为非零扰动系统[7], 所能得到最理想的结论是系统全状态一致最终有界[8−12]. 然而这一结论无法解释实际系统所呈现的特性, 即: 在这类系统中, 只有一些状态变量的平衡位置受到不确定项的影响, 而系统的部分状态变量 (另外一些状态变量) 仍具有可镇定性. 造成理论和实际应用产生矛盾的原因在于: 控制目标的设定与实现这一目标的系统控制能力存在矛盾. 对于非零扰动系统的研究存在一个前提, 即假设原点为平衡点. 这种追求系统全状态稳定的假设, 为控制设定了一个无法实现的目标.

实际应用表明: 当不确定项并不是简单的全阶扰动时, 系统的部分变量存在稳定性条件. 通过对实际系统的分析发现, 系统中不确定项的阶次低于系统的阶次, 并且在一定条件下其对系统平衡状态的影响仅限于一些状态变量 (而不是全部状态变量)[1−4]. 对于这类系统, 将所有状态变量镇定到原点的企图是徒劳的, 且不符合实际. 因此合理的做法是仅镇定系统部分变量到原点, 进而解决控制目标的设定与系统控制能力存在的矛盾.

系统部分变量的稳定性问题是一个长期存在且尚未解决的理论课题. 李雅普诺夫在 1893 年就曾指出: “可以研究更一般的问题, 这一运动稳定性不是对所有变元, 而仅是对其中某些变元”[13]. 前苏联

收稿日期 2012-04-26 录用日期 2012-10-22
Manuscript received April 26, 2012; accepted October 22, 2012
国家自然科学基金 (50977078, 60974141, 61273010) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (50977078, 60974141, 61273010)
本文责任编委 耿志勇
Recommended by Associate Editor GENG Zhi-Yong
1. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110819
1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819

的学者在这一领域进行了早期探索[14]. 上世纪 70 年代末, Rouche 等和王照林分别对部分变量稳定性问题作了进一步的分析和研究[15−16]. 本世纪初, Michel 等对部分变量的稳定性和有界性进行了较为全面的分析[17]. 叶华文等通过对惯性盘倒立摆系统的研究发现, 只要使该系统其他变量与一个确定的函数同步, 则该系统的部分变量可以镇定到原点[18].

对于本文所研究的一类不确定系统, 由于不确定项的存在, 若要镇定系统的部分变量, 其他变量的控制目标实际上是一个包含不确定项的函数. 因此关键在于: 针对系统的特征, 找到系统不确定项的估计方法, 以确定其他变量的目标函数, 进一步给出系统部分变量的稳定性和有界性.

根据工业应用中的实际情况, 本文提取出关于系统不确定项的约束条件, 并在此基础上, 进一步给出了含有不确定项估计方法的系统数学描述. 针对这类缺乏明确平衡点的不确定系统, 本文研究了部分变量的稳定性和有界性, 提出了将一致最终有界和渐近稳定相结合的系统部分变量的稳定性模式. 基于该稳定性模式, 针对系统不确定项的不同表现形式, 将系统部分变量分别镇定到给定运行区域和原点, 得到了符合实际需求的理论结果.

本文其他部分的组织和所做的具体工作如下: 第 1 节分析了一类缺乏明确平衡点的不确定系统的特性, 并基于实际应用情况, 提取了这类系统的数学模型; 第 2 节针对系统不确定项具有随机性和相对稳定性的双重特性, 分别研究了部分变量的一致最终有界性和渐近稳定性, 为限制系统部分变量与预定目标的偏差和实现系统部分变量稳定奠定了基础; 第 3 节针对缺乏明确平衡点的不确定系统, 将系统部分变量的一致最终有界性和渐近稳定性有机结合, 提出了一种配置系统闭环阻尼的控制方案, 在系统不确定项处于随机和相对稳定的不同阶段, 将部分变量分别镇定到给定运行区域和原点; 第 4 节给出永磁同步电机控制器的设计实例, 进一步阐述研究结论的有效性和实用性; 第 5 节对本文主要工作进行总结和展望.

1 问题的描述

一类缺乏明确平衡点的不确定系统描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}(t) \tag{1}$$

其中, $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 系统状态 $\boldsymbol{x} = [\begin{matrix} x_1 & \cdots & x_n \end{matrix}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, 不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$ 中包含 n_1 个不确定元素和 $n - n_1$ 个确定元素, 即

$$\boldsymbol{w}(t) = \left[\begin{matrix} w_1 & \cdots & w_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

并且 $n \geq 3n_1$. 同时在任一时间段 $[t_0+\lambda, t_1+\tau]$, 不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$ 满足条件:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{w}(t)| \leq \boldsymbol{\delta}, & t_0+\lambda \leq t \leq t_1+\lambda \\ |\boldsymbol{w}(t)| \leq \boldsymbol{\delta}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t} = 0, & t_1+\lambda < t \leq t_1+\tau \end{cases}$$

其中, $\lambda \geq 0$, $\lambda < \tau$, $t_0 \leq t_1$, 不确定项边界

$$\boldsymbol{\delta} = \left[\begin{matrix} \delta_1 & \cdots & \delta_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

符号 $|\cdot|$ 描述向量的分量模数形式. 对于 $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 的每一个元素, 不等式 $|\boldsymbol{w}(t)| \leq \boldsymbol{\delta}$ 与 $|w_i(t)| \leq \delta_i$ ($1 \leq i \leq n_1$) 等价.

注 1. 不确定系统 (1) 是引入反馈控制后所形成的闭环系统, 等价于取反馈控制的非自治系统, 是对实际应用的电力传动系统和电能变换系统的抽象. 例如: 系统 (1) 可以描述直梯传动系统中用于传递动力的电机模型

$$\begin{cases} J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = p\phi i_{\mathrm{q}} - T_{\mathrm{L}} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = -r_s i_{\mathrm{d}} + p\omega L i_{\mathrm{q}} + u_{\mathrm{d}} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}t} = -r_s i_{\mathrm{q}} - p\omega L i_{\mathrm{d}} - p\omega\phi + u_{\mathrm{q}} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t (J\omega - J\omega^*)\,\mathrm{d}t = J\omega - J\omega^* \end{cases} \tag{2}$$

其中负载转矩 T_{L} 为引入系统的不确定项. 当取反馈控制

$$\boldsymbol{u} = \left[\begin{matrix} u_{\mathrm{d}} & u_{\mathrm{q}} \end{matrix}\right]^{\mathrm{T}} = f(\omega, i_{\mathrm{d}}, i_{\mathrm{q}})$$

时, 该传递动力的电机模型可写成式 (1) 形式, 其中 $\boldsymbol{w}(t)$ 相当于 T_{L}.

系统 (1) 包含了反映这类系统运动规律的三类微分方程, 如式 (2) 所示. 这三类微分方程分为:

1) 前 n_1 个微分方程将不确定项引入系统, 这在电力传动系统中被称为运动方程 (或转矩方程), 在电能变换系统中被称为负荷方程 (或负载方程), 如式 (2) 中第一个微分方程;

2) 中间 $n_2 = n - 2n_1$ 个微分方程反映了系统运行特性, 这在电力传动和电能变换系统中被称为电压方程, 如式 (2) 中的中间两个微分方程;

3) 后 n_1 个微分方程由控制器的设计引入, 用于估计系统不确定项, 如式 (2) 中的最后一个微分方程.

对于不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$ 的描述真实反映了实际电力传动和电能变换系统中不确定因素的特性, 其突出特点是使系统失去了明确的平衡点. 例如直梯传动系统式 (2) 中, 具有不确定性的负载转矩 T_{L} 取决于电梯轿厢中载人的重量, 并直接决定了电梯传动系统力矩电流 i_{q} 的控制目标 (平衡点).

关于不确定项的约束条件反映了影响实际系统的不确定因素的特性. 例如式 (2) 中具有不确定性的负载转矩 T_{L} 具有以下特点:

1) 负载转矩取决于电梯轿厢中载人的重量, 而电梯轿厢的载重极限可以设定, 即 $|\boldsymbol{w}(t)| \le \boldsymbol{\delta}$;

2) 尽管电梯轿厢停在某一楼层时, 轿厢中载人的重量可以变化, 但电梯轿厢一旦运行, 轿厢中载人的重量就不会变化, 即在某一时段 $(t_1+\lambda < t \le t_1 + \tau)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}=0$.

研究系统 (1) 的稳定性的难点在于: 1) 由于存在不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$, 系统 (1) 实质上没有明确的平衡点; 2) 由于没有明确的平衡点, 系统状态的控制目标 (平衡点) 不再是预先设定的, 而是根据实际情况自适应的. 因此只有抛弃平衡点已知这一固有观念, 针对系统 (1) 的特点, 侧重于系统状态 $\boldsymbol{x}$ 中前 n_2 个变量的鲁棒性和稳定性研究, 才能得到更为深入的具有实际意义的结论.

为了研究系统状态中前 n_2 个变量的稳定性, 定义系统的部分变量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_{n_2}\end{array}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n_2}$$

其中, $n_2 = n - 2n_1$, $n_2 \ge n_1$; 定义系统的其他变量为

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \left[\begin{array}{ccc} x_{n_2+1} & \cdots & x_n\end{array}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{2n_1}$$

基于实际应用的需求, 本文的研究内容为:

1) 在 $t_0+\lambda \le t \le t_1+\lambda$ 时段, 系统部分变量 (系统状态 $\boldsymbol{x}$ 中前 n_2 个变量) 对不确定项变化的鲁棒性;

2) 在 $t_1+\lambda < t \le t_1+\tau$ 时段, 系统部分变量的稳定性.

随后各节将主要讨论系统 (1) 的运动规律. 具体安排如下:

1) 分析部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的运动稳定性, 为控制器的设计奠定理论基础, 包括: 研究部分变量的一致最终有界性, 并给出部分变量最终边界的估计, 以及部分变量渐近稳定的条件;

2) 针对非自治系统, 给出反馈控制方案, 限制部分变量与预定目标的偏差, 并在 $t_1+\lambda < t \le t_1+\tau$ 时段实现部分变量的渐近稳定.

2 系统部分变量稳定性分析

本节主要研究部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的运动稳定性, 为进行控制器设计奠定理论基础. 为了研究部分变量的运动稳定性, 首先给出关于系统部分变量稳定的相关定义.

定义 1. 对于系统 (1), 如果存在与 t_0 无关的正常数 b 和 d, $t_0 \ge 0$, 对于每个 $a \in (0,d)$, 存在 $T(a,b) \ge 0$ 与 t_0 无关, 满足

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| \le a \Rightarrow \|\boldsymbol{\xi}_1\| \le b,\ \forall t \ge t_0 + T(a,b)$$

则系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是一致最终有界的, 且最终边界为 b.

由于部分变量的最终边界 b 与瞬态周期 $T(a,b)$ 相关, 不具备唯一性, 因此 b 并不是真正意义上的 “最终” 边界. 基于这一原因提出理想的最终边界的定义, 为进一步定义系统部分变量的渐近稳定奠定基础.

定义 2. 称 μ 是部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的理想的最终边界, 如果满足:

1) 系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是一致最终有界的;

2) 对于任给的 $\varepsilon \ge 0$, 存在瞬态周期 $T>0$ 和某一固定常数 $\mu \ge 0$, 当 $t \ge t_0 + T$ 时, 满足

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \infty \Rightarrow \|\boldsymbol{\xi}_1\| \le \mu + \varepsilon = b$$

定义 3. 称系统 (1) 关于部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是渐近稳定的, 如果

1) 系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是一致最终有界的;

2) 系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的理想的最终边界 μ 为零, 并且满足

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon = 0$$

在上述所给出的部分变量一致最终有界和渐近稳定的定义下, 下面进一步讨论系统 (1) 中部分变量的一致最终有界性和渐近稳定性. 由于系统 (1) 的运动规律取决于矩阵 A 和不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$, 因此系统部分变量稳定性研究实质上是研究矩阵 A 和不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$ 对系统的影响.

2.1 一致最终有界性

对于系统 (1), 仅研究定义 1 所描述的部分变量的一致最终有界性是不够的. 更重要的是研究如何构造矩阵 A, 即如何设计反馈控制, 使部分变量运行于预定误差所允许的给定区域. 对于系统 (1), 这一研究表现为建立矩阵 A 与部分变量理想最终边界的关系, 为设计满足控制精度的反馈控制提供理论依据.

为了得到部分变量的理想的最终边界, 引入文献 [7] 关于能量函数水平集的论述.

引理 1. 对于系统 (1), 设能量函数

$$V_1 = V_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P \boldsymbol{x} \tag{3}$$

其中, $P>0$. 如果存在 $l_0 > 0$, 满足

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{V}_1 \le 0, & \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}_{l_0} \\ \dot{V}_1 < 0, & \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \end{array}\right. \tag{4}$$

其中

$$\bar{\Omega}_{l_0} = \{\boldsymbol{x} | V_1(\boldsymbol{x}) \ge l_0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\}$$

$$\bar{\Omega}=\{\boldsymbol{x}|V_1(\boldsymbol{x})>l_0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

则系统的状态是一致最终有界的, 并且系统状态最终收敛于能量函数 $V_1(\boldsymbol{x})$ 的水平集

$$\Omega=\{\boldsymbol{x}|V_1(\boldsymbol{x})\le l_0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

根据引理 1, 得出结论: 通过调节能量函数的水平集, 可以调整系统状态最终运行区域, 进而实现对系统状态与预定目标偏差的限制. 在此基础上, 进一步给出矩阵 A 和不确定项边界 $\boldsymbol{\delta}$ 与部分变量的理想的最终边界 μ 的关系.

引理 2. 对于系统 (1), 若满足

$$PA=-Q \tag{5}$$

其中, $P>0$, Q 为广义正定矩阵, 即

$$Q=Q_{\mathrm{R}}+Q_{\mathrm{J}} \tag{6}$$

式中, Q_{R} 为正定对称矩阵, Q_{J} 为反对称矩阵, 即

$$Q_{\mathrm{R}}>0,\ \ Q_{\mathrm{J}}=-Q_{\mathrm{J}}^{\mathrm{T}}$$

则系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的理想的最终边界

$$\mu\le\rho=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})} \tag{7}$$

式中, $\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 Q_{R} 和 P 的最小特征值, $\lambda_{\max}(P)$ 为矩阵 P 的最大特征值.

证明. 选择能量函数 $V_1=V_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, 则

$$\dot{V}_1=\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\dot{\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

根据式 (1)、式 (5) 和式 (8), 得:

$$\dot{V}_1=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}(t) \tag{9}$$

由于 Q_{J} 为反对称矩阵, 即 $Q_{\mathrm{J}}=-Q_{\mathrm{J}}^{\mathrm{T}}$, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{J}}\boldsymbol{x}=0 \tag{10}$$

因此根据式 (6)、式 (9) 和式 (10), 得:

$$\dot{V}_1=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{R}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}(t) \tag{11}$$

由于 $|\boldsymbol{w}(t)|\le\boldsymbol{\delta}$, 根据式 (11), $\dot{V}_1$ 具有以下特性:

$$\dot{V}_1|_{\boldsymbol{x}=0}=0,\ \ \frac{\partial^2\dot{V}_1}{\partial\boldsymbol{x}^2}=-2Q_{\mathrm{R}}<0$$

$$\frac{\partial\dot{V}_1}{\partial\boldsymbol{x}}=-2Q_{\mathrm{R}}\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{w}(t)=0$$

有解.

根据 V_1 和 $\dot{V}_1$ 的特性, 一定存在 $0\le l_0<+\infty$, 且

$$\begin{cases}\dot{V}_1\le 0, & \boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_{l_0}=\{\boldsymbol{x}|V_1(\boldsymbol{x})\ge l_0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}\\ \dot{V}_1<0, & \boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}=\{\boldsymbol{x}|V_1(\boldsymbol{x})>l_0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}\end{cases}$$

因此, 当 $\boldsymbol{x}\in\sum=\left\{\boldsymbol{x}|\dot{V}_1(\boldsymbol{x})\ge 0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\right\}$ 时, V_1 的最大值为 l_0, 否则与前面论述矛盾. 即

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\sum}V_1=l_0 \tag{12}$$

选择 ρ, 满足

$$\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=\rho}V_1=l_0 \tag{13}$$

则根据 V_1 的特性, 存在

$$\Omega\subseteq B_\rho=\{\boldsymbol{x}|\,\|\boldsymbol{x}\|_2\le\rho,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\} \tag{14}$$

其中, $\Omega=\{\boldsymbol{x}|V_1(\boldsymbol{x})\le l_0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$. 由于 $\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2\le\|\boldsymbol{x}\|_2$, 则 $\Omega\subseteq B_\rho\subseteq\{\boldsymbol{x}|\,\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2\le\rho,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$.

根据引理 1, 系统的状态最终收敛于 Ω, 因此系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 最终收敛于 $\{\boldsymbol{\xi}_1|\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2\le\rho,\boldsymbol{\xi}_1\in\mathbf{R}^{n_2}\}$, 即系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是一致最终有界的.

由于 $P>0$, 则

$$V_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\ge\frac{1}{2}\lambda_{\min}(P)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \tag{15}$$

因此

$$\min_{\|\boldsymbol{x}\|_2=\rho}V_1=\frac{1}{2}\lambda_{\min}(P)\rho^2 \tag{16}$$

由式 (11) 和 $Q_{\mathrm{R}}>0$, 得:

$$\dot{V}_1\le-\|\boldsymbol{x}\|_2^2\cdot\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})+\|\boldsymbol{x}\|_2\cdot\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2 \tag{17}$$

则当 $\boldsymbol{x}\in\sum=\left\{\boldsymbol{x}|\dot{V}_1(\boldsymbol{x})\ge 0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\right\}$ 时, 有:

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\le\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})} \tag{18}$$

由于 $P>0$, 则

$$V_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\le\frac{1}{2}\lambda_{\max}(P)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \tag{19}$$

因此根据式 (18) 和式 (19), 得:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\sum}V_1=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(P)\left(\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})}\right)^2 \tag{20}$$

根据式 (12)、式 (13)、式 (16) 和式 (20), 以及部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的收敛域, 得系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的理想的最终边界

$$\mu\le\rho=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})}$$

□

注 2. 定理 2 研究了系统部分变量的一致最终有界性, 并揭示了系统部分变量理想的最终边界与系统特征矩阵 A 和不确定项边界 $\boldsymbol{\delta}$ 之间的潜在关系. 由于实际系统存在各种不确定因素, 难于实现真正意义的渐近稳定, 因此定理 2 关于系统部分变量与预定目标偏差的实用稳定性研究更具现实意义.

注 3. 由于任一矩阵都可以分解为对称矩阵和反对称矩阵之和, 定理 2 采用正定矩阵和反对称矩阵构造了广义正定矩阵 Q. 这使系统部分变量一致最终有界的条件更为明晰.

注 4. 对于确定性系统, 定理 2 中的 $\boldsymbol{\delta}$ 为零, 理想的最终边界为零, 并且定义 1 中部分变量的最终边界 b 随时间增加不断减小, 满足 $\lim_{t\to\infty}\varepsilon=0$, 则定理 2 转化为判断系统渐近稳定的定理.

注 5. 由式 (5) 和式 (6) 可得 $PA+A^{\rm T}P=-2Q_{\rm R}$. 这表明李雅普诺夫方程为式 (5) 特例. 由于式 (5) 不再要求 Q 正定, 且更为简洁, 因此更适用于求解控制.

2.2 渐近稳定性

本小节主要研究系统 (1) 在 $t_1+\lambda<t\le t_1+\tau$ 时间段的渐近稳定性.

选择状态目标

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & \theta_1 & \cdots & \theta_{2n_1}\end{bmatrix}^{\rm T}\in\mathbf{R}^n \tag{21}$$

其中, $n\ge 3n_1$, θ_i $(i=1,\cdots,2n_1)$ 为不确定元素. 则无论 $[\ \theta_1\ \ \cdots\ \ \theta_{2n_1}\ ]^{\rm T}$ 是空间的一点还是一个不变流形, 只要系统状态渐近稳定于 $\boldsymbol{\theta}$, 系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 就渐近稳定于原点.

由于在 $t_1+\lambda<t\le t_1+\tau$ 时间段 $\frac{{\rm d}\boldsymbol{w}}{{\rm d}t}=0$, 则以未知常矢量 $\boldsymbol{c}$ 替代不确定项, 即

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_{n_1} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\rm T}=\boldsymbol{w}(t) \tag{22}$$

定理 3. 对于系统 (1), 若描述系统特征的矩阵 A 满足以下条件:

1) 系统特征矩阵 A 的形式为

$$A=-\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\end{bmatrix} \tag{23}$$

其中, $A_{11}\in\mathbf{R}^{n\times(n-2n_1)}$, $A_{12}\in\mathbf{R}^{n\times 2n_1}$, 并且

$$A_{12}=\begin{bmatrix}-A_1 & 0_{n_1\times n_1}\\ 0_{(n_2-n_1)\times n_1} & 0_{(n_2-n_1)\times n_1}\\ A_2 & A_3\\ 0_{n_1\times n_1} & 0_{n_1\times n_1}\end{bmatrix} \tag{24}$$

式中, $A_1\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $A_3\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, A_1, A_3 满秩;

2) 李雅普诺夫稳定条件

$$PA=-Q=-(Q_{\rm R}+Q_{\rm J}) \tag{25}$$

其中, $P>0$, Q 为广义正定矩阵, 正定对称矩阵 $Q_{\rm R}>0$, 反对称矩阵 $Q_{\rm J}=-Q_{\rm J}^{\rm T}$.

因此, 在 $t_1+\lambda<t\le t_1+\tau$ 时间段, 系统 (1) 的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 具有渐近稳定性.

证明. 选择能量函数

$$V_2=V_2(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\rm T}P(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) \tag{26}$$

其中, $P>0$. 选择状态目标 $\boldsymbol{\theta}$ 为下列方程组的解

$$-A_1\begin{bmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_{n_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_{n_1}\end{bmatrix} \tag{27}$$

$$A_2\begin{bmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_{n_1}\end{bmatrix}+A_3\begin{bmatrix}\theta_{n_1+1}\\ \vdots\\ \theta_{2n_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \tag{28}$$

由于 A_1, A_3 满秩, 式 (27) 和式 (28) 给出了 $2n_1$ 个独立方程, 则 θ_i $(i=1,\cdots,2n_1)$ 存在关于 c_i $(i=1,\cdots,n_1)$ 的唯一解, 因此 $\frac{{\rm d}\boldsymbol{\theta}}{{\rm d}t}=0$.

根据式 (21)、式 (22)、式 (27) 和式 (28), 存在

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}A_{11} & \begin{matrix}-A_1 & 0_{n_1\times n_1}\\ 0_{(n_2-n_1)\times n_1} & 0_{(n_2-n_1)\times n_1}\\ A_2 & A_3\\ 0_{n_1\times n_1} & 0_{n_1\times n_1}\end{matrix}\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta} \tag{29}$$

其中, $A_{11}\in\mathbf{R}^{n\times(n-2n_1)}$, $n\ge 3n_1$, $n_2=n-2n_1$, 则由式 (23) 和式 (24) 得:

$$\boldsymbol{c}=-A\boldsymbol{\theta} \tag{30}$$

由式 (26) 和 $\frac{{\rm d}\boldsymbol{\theta}}{{\rm d}t}=0$, 得 V_2 的导数

$$\dot{V}_2=\left(\frac{{\rm d}V_2}{{\rm d}\boldsymbol{x}}\right)^{\rm T}\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\rm T}P\dot{\boldsymbol{x}} \tag{31}$$

则根据式 (1) 和式 (22), 可得:

$$\dot{V}_2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\rm T}P(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}) \tag{32}$$

将式 (30) 代入式 (32), 有

$$\dot{V}_2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\rm T}PA(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) \tag{33}$$

则根据式 (25), 可得:

$$\dot{V}_2=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\rm T}(Q_{\rm R}+Q_{\rm J})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) \tag{34}$$

由于 $Q_{\mathrm{J}}=-Q_{\mathrm{J}}^{\mathrm{T}}$, 即 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})=0$, 则能量函数 V_2 的导数为

$$\dot{V}_2=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) \tag{35}$$

由于 $Q_{\mathrm{R}}>0$, 根据李雅普诺夫稳定原理可得结论: 系统状态渐近稳定于 $\boldsymbol{\theta}$, 即系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 渐近稳定于原点. □

注 6. 通过选择带有未知参数的能量函数, 定理 3 解决了一类缺乏明确平衡点的系统的部分变量稳定性问题, 给出了系统部分变量的稳定条件. 对于具有明确平衡点的系统, 能量函数中未知参数为零, 定理 3 还原为一般稳定性定理.

注 7. 定理中分块矩阵 A_{12} 由 A_1, A_2, A_3 和零矩阵构成, 其中: 1) A_1 为系统所固有, 如式 (2) 中的 $p\phi$; 2) A_2 通常选用正定矩阵, 保证能量函数的衰减; 3) A_3 可以通过设计反馈控制实现, 即电力传动和电能变换系统中普遍采用的双闭环结构的外环控制, 用于实现平衡点的估计; 4) 在实际系统中, 引入不确定项的微分方程不含有平衡点的估计项, 如式 (2) 中第一个微分方程不含有 $\int_0^t(J\omega-J\omega^*)\,\mathrm{d}t$, 因此右上角的分块矩阵选用零矩阵; 5) 矩阵 A_1, A_2, A_3 和零矩阵的构造是用于保证 $\theta_i\ (i=1,\cdots,2n_1)$ 和 $c_i\ (i=1,\cdots,n_1)$ 存在唯一对应关系, 这些矩阵的构造可以通过控制器的设计来完成.

3 非自治系统中控制器的设计

根据第 2 节的定理, 本节主要讨论如何针对非自治系统设计反馈控制, 以镇定系统的部分变量.

考察一类具有不确定性的非自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=E\boldsymbol{x}+F\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}(t) \tag{36}$$

其中, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n_2}$, $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $F\in\mathbf{R}^{n\times n_2}$ 列满秩, 状态 $\boldsymbol{x}$ 和不确定项 $\boldsymbol{w}(t)$ 满足式 (1) 中定义.

3.1 控制器设计原理

针对系统 (36), 镇定部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的工作为: 根据系统性能, 设计反馈控制 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$, 使系统闭环特征矩阵 $E+FK$ 满足定理 2 和定理 3 中对矩阵 A 的要求.

定理 4. 对于系统 (36), 给定部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 的允许波动范围 γ, 若存在反馈控制

$$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x} \tag{37}$$

满足如下条件:

1) 控制系数设计条件

$$E+FK=A \tag{38}$$

2) 系统闭环特征矩阵 A 的构造条件

$$A=-\left[\begin{array}{ccc} & -A_1 & 0_{n_1\times n_1}\\ A_{11} & 0_{(n_2-n_1)\times n_1} & 0_{(n_2-n_1)\times n_1}\\ & A_2 & A_3\\ & 0_{n_1\times n_1} & 0_{n_1\times n_1}\end{array}\right] \tag{39}$$

式中, $A_{11}\in\mathbf{R}^{n\times(n-2n_1)}$, $A_1\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $A_2\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, $A_3\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$, A_1, A_3 满秩.

3) 李雅普诺夫稳定条件

$$PA=-(Q_{\mathrm{R}}+Q_{\mathrm{J}}) \tag{40}$$

其中, $P>0$, $Q_{\mathrm{R}}>0$, $Q_{\mathrm{J}}=-Q_{\mathrm{J}}^{\mathrm{T}}$.

4) 部分变量边界条件

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})}\le\gamma \tag{41}$$

则存在以下结论:

1) 系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 一致最终有界, 且存在初始时刻 t_0 和瞬态周期 $T>0$, 当 $t\ge t_0+T$ 时, 满足 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|_2<\infty\Rightarrow\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2\le\gamma$;

2) 在时间段 $t_1+\lambda<t\le t_1+\tau$, 系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 具有渐近稳定性.

证明. 由式 (36) ∼ (38), 得:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}(t)$$

由于式 (40) 满足定理 2 的条件, 则根据定理 2, 系统部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 一致最终有界, 且理想的最终边界

$$\mu\le\rho=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})}$$

根据式 (41) 所给出的部分变量边界条件, 一定存在初始时刻 t_0 和瞬态周期 $T>0$, 当 $t\ge t_0+T$ 时, 满足 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|_2<\infty\Rightarrow\|\boldsymbol{\xi}_1\|_2\le\gamma$.

由于式 (39) 中 A 满足定理 3 中矩阵 A 的构造条件, 同时式 (40) 满足定理 3 中李雅普诺夫稳定条件, 因此根据定理 3, 在时间段 $t_1+\lambda<t\le t_1+\tau$, 系统的部分变量 $\boldsymbol{\xi}_1$ 具有渐近稳定性. □

注 8. 应用第 2 节的结论, 并采用文献 [19] 给出的互联和阻尼配置技术, 定理 4 通过反馈控制, 配置用于衰减能量函数的系统阻尼 (正定矩阵 Q_{R}), 在不同时段, 将部分变量分别镇定到给定区域和原点.

注 9. 当系统的不确定项为非零扰动时, 该定理转化为限制系统部分变量与预定目标的偏差的反馈控制设计方案; 当系统的不确定项为零时, 该定理转化为确定性系统的反馈控制设计方案; 当系统的不确定项为满足线性增长界的零扰动时, 即 $\|\boldsymbol{w}(t)\|\le$

$\kappa \|\boldsymbol{x}\|$, 其中 κ 为非负常数, 则只要构造矩阵 A 满足

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\kappa}{\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})}\le 1$$

该定理可转化为零扰动系统反馈控制设计方案.

3.2 控制器设计步骤

根据定理 4, 下面进一步给出配置系统闭环阻尼的反馈控制器的设计步骤:

步骤 1. 选择待定控制参数矩阵 K 的结构, 即

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n_2 1} & \cdots & k_{n_2 n}\end{bmatrix}$$

中哪些元素为 0, 以及各元素之间的相互关系.

步骤 2. 根据 $E+FK=A$, 得到系统闭环特征矩阵 A.

步骤 3. 若矩阵 A 满足式 (39), 转步骤 4; 否则, 返回步骤 1.

步骤 4. 选择正定矩阵 P, 并计算矩阵 P 的最大和最小特征值 $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$.

步骤 5. 根据 $PA=-(Q_{\mathrm{R}}+Q_{\mathrm{J}})$, 得含待定控制参数的矩阵 Q_{R}.

步骤 6. 计算矩阵 Q_{R} 的最小特征值 $\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})$, 其中 $\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})$ 是以待定控制参数为自变量的函数.

步骤 7. 根据

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\gamma}\le\lambda_{\min}(Q_{\mathrm{R}})$$

求解控制参数设计条件.

步骤 8. 若控制参数设计条件不矛盾, 转步骤 9; 否则, 返回步骤 4.

步骤 9. 根据参数设计条件, 设计控制参数.

步骤 10. 根据 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$, 得反馈控制.

4 永磁同步电机的应用实例

4.1 控制器设计

面贴式永磁同步电机由式 (2) 描述, 其中 ω 为角速度, i_{d} 和 i_{q} 为 dq 轴电流, u_{d} 和 u_{q} 为 dq 轴定子电压. 电机参数: $r_{\mathrm{s}}=0.144\,\Omega$, $J=0.2059\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $p=2$, $\phi=0.972\,\mathrm{Wb}$, $L=1.6\,\mathrm{mH}$. T_{L} 满足 $0\le T_{\mathrm{L}}\le T^*$, $T^*=20\,\mathrm{N\cdot m}$. 系统设计要求为: 磁场定向控制策略 $i_{\mathrm{d}}^*=0$, 电机转速控制目标 $\omega^*=150\,\mathrm{rad/s}$, 电机转速 ω 允许波动范围为 $\omega^*\times 10\,\%$.

令系统状态

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{42}$$

其中, $x_1=J\omega-J\omega^*=0.2059\,(\omega-150)$, $x_2=Li_{\mathrm{d}}=0.0016i_{\mathrm{d}}$, $x_3=Li_{\mathrm{q}}=0.0016i_{\mathrm{q}}$, $x_4=0.2059h\times\int_0^t(\omega-150)\mathrm{d}t$, h 为常数.

令系统控制为

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_{\mathrm{d}}+pL\omega i_{\mathrm{q}} \\ u_{\mathrm{q}}-pL\omega i_{\mathrm{d}}-p\phi\omega^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{\mathrm{d}}+0.0032\omega i_{\mathrm{q}} \\ u_{\mathrm{q}}-0.0032\omega i_{\mathrm{d}}-291.6\end{bmatrix} \tag{43}$$

则永磁同步电机描述为 $\dot{\boldsymbol{x}}=E\boldsymbol{x}+F\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}(t)$, 其中

$$E=-\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1\,215 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \\ 9.44 & 0 & 90 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{44}$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{w}(t)=\begin{bmatrix} -T_{\mathrm{L}} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad 0\le T_{\mathrm{L}}\le 20 \tag{46}$$

下面进行控制器设计. 选择控制参数矩阵

$$K=-\begin{bmatrix} 0 & 2\,340 & 0 & 0 \\ 1\,215k-9.44 & 0 & 3\,555 & 2\,005k\end{bmatrix} \tag{47}$$

其中 k 为待定控制参数. 则根据式 (38), 得:

$$A=-\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1215 & 0 \\ 0 & 2\,430 & 0 & 0 \\ 1\,215k & 0 & 3\,645 & 2\,005k \\ -h & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{48}$$

满足定理 4 中式 (39). 选择正定矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.08 \\ 0.35 & 0 & 0.08 & 1.2\end{bmatrix}$$

则 $\lambda_{\max}(P)=1.5489$, $\lambda_{\min}(P)=0.5442$.

根据 $PA=-(Q_{\mathrm{R}}+Q_{\mathrm{J}})$, 并取 $h=582.25k$, 得

$$Q_{\mathrm{R}}=1\,215\times\begin{bmatrix} 0.132k & 0 & 0.381k-0.05 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0.381k-0.05 & 0 & 2.1 & 0.66k-0.055 \\ 0 & 0 & 0.66k-0.055 & 0.132k\end{bmatrix}$$

则应用 Matlab 得 $Q_{\rm R}$ 的特征值:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 160.38k\\ \lambda_{2,3} &= 1\,275.75 + 80.19k \pm\\ &\qquad 6.075\sqrt{44\,321 - 9\,972k + 23\,405k^2}\end{aligned}$$

由于 $\lambda_1 < \lambda_3$ 时, k 无解, 则

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(Q_{\rm R}) = 1\,275.75 + 80.19k -\\ 6.075\sqrt{44\,321 - 9\,972k + 23\,405k^2}\end{aligned}$$

由于电机转速的允许波动范围为 $\omega^* \times 10\,\% = 15$, 则 x_1 允许波动范围 $\gamma = 15J = 3.0885$. 因此根据

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\frac{\|P\|_2 \cdot \|\boldsymbol{\delta}\|_2}{\gamma} \le \lambda_{\min}(Q_{\rm R})$$

其中, $\lambda_{\max}(P) = 1.5489$, $\lambda_{\min}(P) = 0.5442$, $\|P\|_2 = \lambda_{\max}(P)$, $\|\boldsymbol{\delta}\|_2 = 20$, $\gamma = 3.0885$, 得:

$$23\,231k^2 - 15\,442k + 1\,389 \le 0$$

即 $0.107 \le k \le 0.557$.

取 $k = 0.107$, 则 $h = 582.25k = 62.3$, 因此根据式 (37)、式 (42)、式 (43) 和式 (47), 得:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} u_{\rm d} + 0.0032\omega i_{\rm q}\\ u_{\rm q} - 0.0032\omega i_{\rm d} - 291.6\end{bmatrix} =\\ &\quad\begin{bmatrix} 0 & -2\,340 & 0 & 0\\ -120.6 & 0 & -3\,555 & -214.5\end{bmatrix}\\ &\quad\begin{bmatrix} 0.2059\,(\omega - 150)\\ 0.0016 i_{\rm d}\\ 0.0016 i_{\rm q}\\ 12.8\int_0^t(\omega - 150)\,{\rm d}t\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(49)$$

则控制器为

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} u_{\rm d}\\ u_{\rm q}\end{bmatrix} =\\ &\quad\begin{bmatrix} 0\\ 24.8\,(150 - \omega) + 2\,746\int_0^t(150 - \omega)\,{\rm d}t\end{bmatrix} +\\ &\quad\begin{bmatrix} -3.7 i_{\rm d} - 0.0032\omega i_{\rm q}\\ -5.7 i_{\rm q} + 0.0032\omega i_{\rm d} + 291.6\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(50)$$

4.2　仿真结果

为了进一步验证所得系统部分变量稳定性结论的有效性和实用性, 针对所给面贴式永磁同步电机, 采用式 (51) 所描述的镇定电机转速 (即转子角速度) 的控制, 在 Matlab/Simulink 下构建仿真系统. 如图 1 所示, 仿真系统包括: 三相逆变器 (DC 和 Inverter)、永磁同步电机 (PMSM)、负载转矩 (Torque)、电机物理量检测 (Measure)、电机转子角度标准化处理 (Normalize)、Clark 和 Park 变换 (Conversion)、控制器 (Controller)、空间矢量脉宽调制器 (SVM) 以及系统状态和负载转矩 (ω, $i_{\rm q}$, $T_{\rm L}$) 波形的显示.

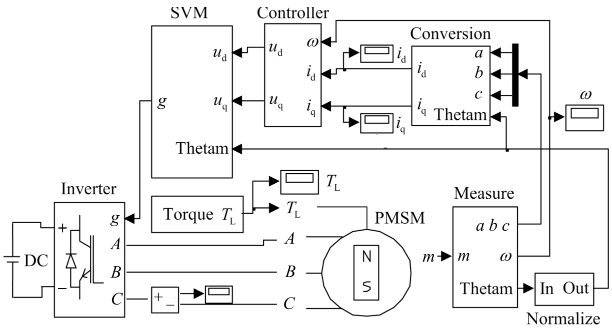


图 1　系统的结构

Fig. 1　Scheme of the system

图 2 给出了加到电机上的负载转矩波形. 负载转矩在 0.4 s 时由 0 N·m 突变到 20 N·m; 在 0.8 s 时, 由 20 N·m 突变到 0 N·m; 在 1.2 s～1.6 s 间随机扰动.

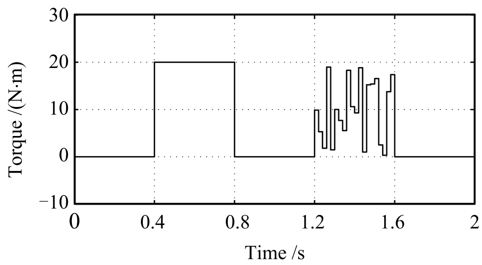


图 2　负载转矩 $T_{\rm L}$

Fig. 2　Load torque $T_{\rm L}$

图 3 给出了转子角速度仿真波形. 仿真结果显示: 在突加负载转矩时, 转子角速度的跌落并不明显. 仿真结果表明: 转矩扰动对系统状态产生影响, 但控制方案对转矩扰动具有鲁棒性.

图 4 给出了负载转矩突变和随机扰动过程中角速度暂态响应的局部放大波形. 仿真结果显示: 在转矩扰动条件下, 角速度被控制在 149 rad/s 到 151 rad/s 之间, 具有较高的控制精度; 在转矩稳定时段, 角速度被控收敛于给定值. 仿真结果表明: 在转矩扰动条件下, 所提控制方案将系统部分变量 (角速度) 有效地镇定到给定运行区域; 并且在转矩稳定 (但未知) 时, 系统部分变量 (角速度) 具有渐近稳定性.

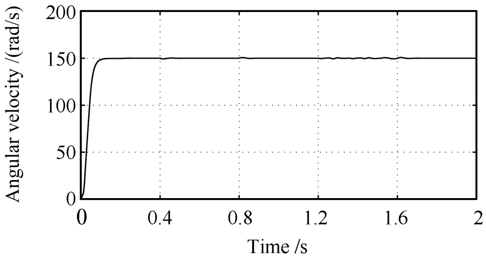


图 3 转子角速度 ω

Fig. 3 Rotor angular velocity ω

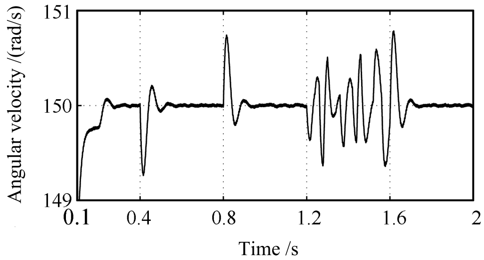


图 4 转子角速度的局部放大

Fig. 4 Zoom on rotor angular velocity

图 5 给出了系统其他变量 (q 轴电流). 仿真结果表明: q 轴电流被控适应转矩的变化, 以实现系统状态稳定于式 (21) 给出的未知控制目标. 同时仿真结果显示: q 轴电流存在一定幅度 "毛刺", 这一 "毛刺" 的频率与逆变器开关器件的频率相等. 这与实际系统的实测结果是一致的. 产生这一 "毛刺" 的原因在于: 实际系统中, 加到电机上的电压是脉宽调制电压, 而非理想的正弦电压. 尽管滤除 "毛刺" 可以改善控制器的输出波形, 但这种做法将背离系统实际情况, 导致系统性能变坏.

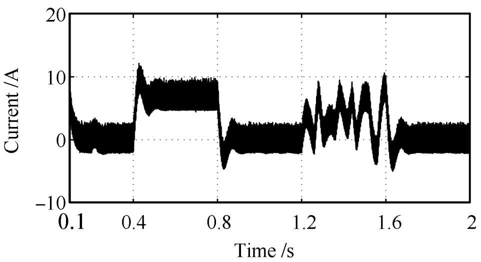


图 5 q 轴电流 $i_{\rm q}$

Fig. 5 q-axis electric current $i_{\rm q}$

目前的研究并未考虑负载转矩扰动对系统部分变量的瞬时影响, 其结果如文献 [20] 的仿真所示: 在转矩突变时, 瞬间出现约 30 % 的角速度跌落. 与之相比, 本文给出的控制方案, 将系统部分变量 (角速度) 有效地控制在给定运行区域, 确保了系统的鲁棒性, 避免了这种角速度瞬间大跌落. 由于这种角速度瞬间大跌落在实际应用中具有极大的破坏性, 因此本文给出的控制方案更具实用性.

5 结论

本文针对缺乏明确平衡点的不确定系统, 研究了系统部分变量的运动稳定性, 给出了部分变量一致最终有界和渐近稳定的条件. 通过配置系统闭环阻尼, 实现了部分变量一致最终有界和渐近稳定的有机结合. 所开展的研究工作提高了系统对外部不确定影响的适应性, 改善了系统部分变量的控制性能, 解决了工业应用中普遍存在的部分变量镇定问题. 本文的研究消除了系统控制目标具有确定性的条件限制, 对进一步研究不确定系统具有一定参考价值.

References

1 Karagiannis D, Astolfi A, Ortega R, Hilairet M. A nonlinear tracking controller for voltage-fed induction motors with uncertain load torque. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, **17**(3): 608−619

2 Singh M, Chandra A. Application of adaptive network-based fuzzy inference system for sensorless control of PMSG-based wind turbine with nonlinear-load-compensation capabilities. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2011, **26**(1): 165−175

3 Zhang Xiao-Guang, Sun Li, Zhao Ke. Sliding mode control of PMSM based on a novel load torque sliding mode observer. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2012, **32**(3): 111−116
(张晓光, 孙力, 赵克. 基于负载转矩滑模观测的永磁同步电机滑模控制. 中国电机工程学报, 2012, **32**(3): 111−116)

4 Liu Xiu-Chong, Zhang Hua-Guang, Chu En-Hui, Yan Shi-Jie. Power control scheme for three-phase voltage-type, PWM rectifiers. *Electric Machines and Control*, 2009, **13**(1): 47−51, 56
(刘秀翀, 张化光, 褚恩辉, 闫士杰. 三相电压型 PWM 整流器功率控制方法. 电机与控制学报, 2009, **13**(1): 47−51, 56)

5 Qin Yun, Zhao De-An, Zhang Jun. Design of combine load control system based on double loop. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, **48**(2): 165−171
(秦云, 赵德安, 张军. 联合收割机双闭环负荷控制系统的设计. 机械工程学报, 2012, **48**(2): 165−171)

6 Huang Wan-You, Cheng Yong, Ji Shao-Bo, Li Chuang, Zhang Xiao-Wen, Zhang Hai-Bo. The optimization of EV powertrain′s efficiency control strategy under dynamic operation condition. *Electric Machines and Control*, 2012, **16**(3): 53−59
(黄万友, 程勇, 纪少波, 李闯, 张笑文, 张海波. 变工况下电动汽车驱动系统效率优化控制. 电机与控制学报, 2012, **16**(3): 53−59)

7 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third edition)*. New Jersey: Prentice-Hall, 2002. 120−506

8 Kofman E. Non-conservative ultimate bound estimation in LTI perturbed systems. *Automatica*, 2005, **41**(10): 1835−1838

9 Song Li-Zhong, Yan Sheng-Mao, Yang Li-Qiu. Robust adaptive discrete-time variable structure control of uncertain systems. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 1024−1028
(宋立忠, 鄢圣茂, 杨立秋. 不确定系统鲁棒自适应离散变结构控制. 自动化学报, 2011, **37**(8): 1024−1028)

10 Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. State estimate-based friction fuzzy modeling and robust adaptive control. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(2): 245−252
(王永富, 王殿辉, 柴天佑. 基于状态估计的摩擦模糊建模与鲁棒自适应控制. 自动化学报, 2011, **37**(2): 245−252)

11 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31−37
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31−37)

12 Yang Zhi-Feng, Lei Hu-Min, Li Qing-Liang, Li Jiong. Design of dynamic inversion control systems for missiles based on trajectory linearization. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2011, **34**(1): 1−4, 8
(杨志峰, 雷虎民, 李庆良, 李炯. 基于轨迹线性化方法的导弹动态逆控制系统设计. 固体火箭技术, 2011, **34**(1): 1−4, 8)

13 Liao Xiao-Xin. *Theory Methods and Application of Stability*. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1999. 74−153
(廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用. 武汉: 华中科技大学出版社, 1999. 74−153)

14 Wang Zhao-Lin. *Stability of Motion and Its Application*. Beijing: Higher Education Press, 1992. 143−167
(王照林. 运动稳定性及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1992. 143−167)

15 Rouche N, Habets P, Laloy M. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977. 100−300

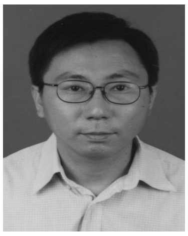
16 Wang Zhao-Lin. The motion stability and satellite attitude dynamics. *Advances in Mechanics*, 1980, **10**(4): 15−30
(王照林. 运动稳定性与卫星姿态动力学. 力学进展, 1980, **10**(4): 15−30)

17 Michel A N, Molchanov A P, Sun Y. Partial stability and boundedness of general dynamical systems on metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2003, **52**(4): 1295−1316

18 Ye Hua-Wen, Dai Guan-Zhong, Kang Jian-Ling. Partial variable stabilization of an inertia wheel pendulum. *Control Theory and Applications*, 2006, **23**(3): 463−466
(叶华文, 戴冠中, 康剑灵. 惯性盘倒立摆的部分变量镇定. 控制理论与应用, 2006, **23**(3): 463−466)

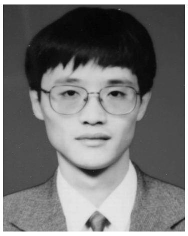
19 Ortega R, van der Schaft A, Maschke B, Escobar G. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 2002, **38**(4): 585−596

20 Petrovic V, Ortega R, Stankovic A M. Interconnection and damping assignment approach to control of PM synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, **9**(6): 811−820



刘秀翀 东北大学讲师. 2009 年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为电力电子与电力传动, 控制理论与应用. 本文通信作者.
E-mail: liuxiuchong@mail.neu.edu.cn
(**LIU Xiu-Chong** Lecturer at Northeastern University. He received his Ph. D. degree from Northeastern University in 2009. His research interest covers power electronics and power drives, control theory and applications. Corresponding author of this paper.)

宋崇辉 东北大学副教授. 主要研究方向为控制理论与应用.
E-mail: songchonghui@mail.neu.edu.cn
(**SONG Chong-Hui** Associate professor at Northeastern University. His research interest covers control theory and applications.)



褚恩辉 东北大学副教授. 主要研究方向为电力电子与电力传动.
E-mail: chuenhui@ise.neu.edu.cn
(**CHU En-Hui** Associate professor at Northeastern University. His research interest covers power electronics and power drives.)