输入变量关联约束对约束优化控制的影响特性分析

罗雄麟 [1] 周晓龙 [1] 王书斌 [1]

摘 要 过程工业控制中除了存在常见的输入变量和输出变量幅值高低限约束, 由于工艺或者控制的需要也可能具有关于输入变量线性函数的关联约束. 不同约束条件之间的矛盾可能会造成约束条件无法全部满足, 失去了实施预测控制的基础. 从凸体顶点角度, 将具有输入关联约束的约束优化控制的可行性判定转化为凸多面集是否非空的问题. 为保证具有输入关联约束预测控制的有效实施, 本文将输入关联约束纳入到预测控制控制律的求解当中. 基于 Newton 控制框架, 考虑具有输入关联约束条件下, 得到基于区间控制思想的预测控制律的解析表达式, 从而分析输入关联约束条件对控制的影响. 通过典型系统模型的控制仿真实验, 验证以上方法的有效性.

关键词 输入变量关联约束, 可行性, 凸多面集, 预测控制

引用格式 罗雄麟, 周晓龙, 王书斌. 输入变量关联约束对约束优化控制的影响特性分析. 自动化学报, 2013, **39**(5): 679−689

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00679

Analysis of Constrained Optimal Control with Related Constraints of Input Variables

LUO Xiong-Lin[1] ZHOU Xiao-Long[1] WANG Shu-Bin[1]

Abstract The constraints of input and output variables commonly exist in the chemical process control. These constraints are high-low limits of input variable, input variable variation and output variable. For the requirement of process or control, there may be a few related constraints of input variable. The inconsistency in different constraints cannot make all the constraints satisfied, which will lose the basis of implementation of model predictive control (MPC). From the view of polyhedral pole, the feasibility analysis of constrained optimal control is transformed into whether the convex polyhedron is empty or not. Based on the Newton control framework, for linear system with the related constraints of input variables, the analytical solution of control law of constrained predictive control based on zone control is deducted. The control law can be used to discuss the impact of related constraints on control. Simulation results of a typical system control problem show the effectiveness of the proposed methods.

Key words Related constraints of input variables, feasibility, convex polyhedron, model predictive control (MPC)

Citation Luo Xiong-Lin, Zhou Xiao-Long, Wang Shu-Bin. Analysis of constrained optimal control with related constraints of input variables. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 679−689

收稿日期 2012-05-11 录用日期 2012-09-18
Manuscript received May 11, 2012; accepted September 18, 2012
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2012CB720500), 国家自然科学基金 (21006127) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB720500) and National Natural Science Foundation of China (21006127)
本文客座编委 王宏
Recommended by Guest Editor WANG Hong
1. 中国石油大学 (北京) 自动化研究所 北京 102249
1. Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing 102249

随着现代工业的快速发展, 对过程控制的要求不断提高, 除了对输入约束的幅值方约束之外, 可能对输入变量的线性函数关系式提出幅值约束, 各输入变量相互制约, 即输入关联约束. 预测控制凭借将输入和输出变量的约束条件纳入其求解控制律的优化问题这一显著优势, 在石化、炼油、矿冶、造纸、航空等领域得到成功应用[1−6]. 对于输入约束为方约束的预测控制, 主要采用引入逻辑变量法[7−8]、线性规划法[9−11]、几何曲线法[12] 等, 但是这些预测控制算法大都只是考虑到了对输入方约束条件的处理, 对存在输入关联约束的情况则鲜有研究. 不同约束条件之间的矛盾可能会造成约束条件无法全部满足, 优化控制器无可行解, 给实际生产造成负面影响. 而且, 由于约束优化问题无可行解, 也就失去了实施预测控制的基础. 即使实施再先进的控制策略也是徒劳. 因此, 约束优化问题可行是系统可控的先决条件, 考察约束优化控制的可行性问题是实施预测控制前应解决的首要问题.

文献 [13] 从欧氏空间角度分析了有约束多目标多自由度优化 (Constrained multi-objective multi-degree of freedom optimization, CMMO) 问题的可行性, 但是具体算法理解困难, 实现复杂. 本文拟从凸体顶点角度出发, 在实施预测控制之前进行具有输入关联约束的约束优化控制可行性判定, 分析输入关联约束对约束优化控制可行性的影响. 基于预测控制滚动优化特性, 将输入关联约束纳入到预测控制控制律优化求解当中. 基于 Newton 控制框架[14−15], 针对存在输入关联约束的区间预测控制推导状态反馈控制律的解析形式, 以此分析输入关联约束条件对预测控制控制律的影响.

1 具有输入关联约束的约束优化问题的可行性分析

1.1 输入关联约束对约束优化问题可行性影响

假设被控系统输入变量为 $u_1, u_2, \cdots, u_m$, 输出变量为 $y_1, y_2, \cdots, y_r$. k 时刻在对输入变量的硬约束中, 将直接具有幅值高低限约束的 s $(s \le m)$ 个输入变量的下标集合记为 S, 有:

$$u_{\min,i} \le u_i \le u_{\max,i}, \ \ i \in S \tag{1}$$

其中, $u_{\min,i}$, $u_{\max,i}$ 分别是输入变量的低限、高限. 从欧氏空间角度可知, 此 s 个硬约束形成的凸多面体是边界面与坐标轴平行或垂直的方体, 这些硬约束属于方约束. 此外, 由于过程工艺或者控制的需要, 也可能存在对若干个输入变量的线性函数的高低限约束, 设总个数为 f, 将 j $(j = 1, \cdots, f)$ 个输入变量的线性函数关系式高低限约束化为矩阵不等式形式, 有:

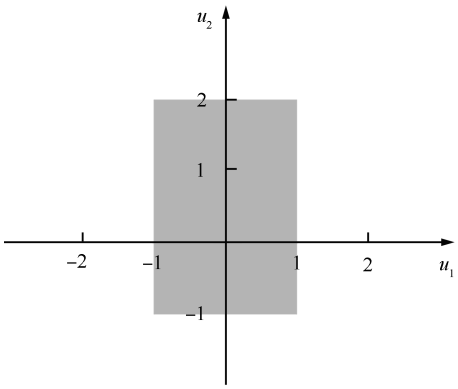
$$\begin{bmatrix} z_{\min,1} \\ \vdots \\ z_{\min,j} \\ \vdots \\ z_{\min,f} \end{bmatrix} \le$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1l} & \cdots & w_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{j1} & \cdots & w_{jl} & \cdots & w_{jm} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{f1} & \cdots & w_{fl} & \cdots & w_{fm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_l \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} z_{\max,1} \\ \vdots \\ z_{\max,j} \\ \vdots \\ z_{\max,f} \end{bmatrix} \tag{2}$$

记为矩阵和向量形式, 有:

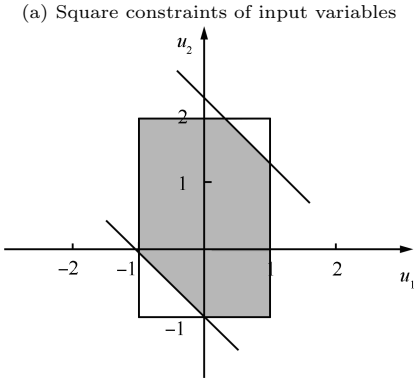
$$\boldsymbol{z}_{\min} \leq W\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{z}_{\max} \tag{3}$$

其中, $W = \{w_{ji}\} \in \mathbf{R}^{f\times m}$ 为常数系数阵, $\boldsymbol{z}_{\min} = [z_{\min,1}, \cdots, z_{\min,f}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}_{\max} = [z_{\max,1}, \cdots, z_{\max,f}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^f$, 分别是线性函数关系式的低限和高限. 于是, 此 f 个硬约束形成多个与坐标轴有一定倾斜角度的平面, 对方约束的方体进行一系列切割, 形成的凸多面体不再是所有边界面均与坐标轴平行或垂直的方体. 例如, 某两输入系统对输入变量的方约束为 $-1 \leq u_1 \leq 1$ 和 $-1 \leq u_2 \leq 2$, 在二维空间形成的输入空间是 4 条边均与坐标轴平行或者垂直的四方形, 如图 1 (a) 所示. 在此基础上, 若增加对两输入之和的关联约束 $-1 \leq u_1 + u_2 \leq 2.2$, 则两条斜线对四方形进行切割, 形成的输入空间是不规则的多边形, 如图 1 (b) 所示.



(a) 输入变量方约束

(a) Square constraints of input variables



(b) 输入变量约束相关

(b) Related constraints of input variables

图 1 输入变量方约束与关联约束的二维输入空间示意图

Fig. 1 Two-dimensional input space with square and related constraints

假设稳定线性多变量系统输入 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$, 输出 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^r$, 系统输入输出传递函数模型为

$$\boldsymbol{y}(s) = G(s)\boldsymbol{u}(s) \tag{4}$$

稳态增益阵为

$$G = \{g_{ji}(s)|_{s=0}\} \in \mathbf{R}^{r\times m}$$

$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}(0)$, $\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{y}(0)$ 分别表示输入输出的稳态值.

稳态条件下系统的输入输出可表示为

$$\boldsymbol{y}_s = G\boldsymbol{u}_s \tag{5}$$

输入方约束、关联约束以及输出的约束条件为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{u}_{\max} \\ &\boldsymbol{z}_{\min} \leq W\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{z}_{\max} \\ &\boldsymbol{y}_{\min} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}_{\max} \end{aligned} \tag{6}$$

考虑如下约束优化问题: 在模型 (4) 和输入输出约束 (6) 的条件下求解控制作用 $\boldsymbol{u}$ 使得目标函数 J 最小, 即

$$\begin{aligned} \min\ & J \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{y}(z) = G(z)\boldsymbol{u}(z) \\ & \boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{u}_{\max} \\ & \boldsymbol{z}_{\min} \leq W\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{z}_{\max} \\ & \boldsymbol{y}_{\min} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}_{\max} \end{aligned} \tag{7}$$

无论动态过程中 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 如何变化, 作为统一而必要的条件, 输入输出在到达稳态时都必须满足式 (4) 和式 (6) 的约束条件, 这是过程可控的基本要求. 因此, 利用系统的稳态模型进行可行性分析.

基于凸体几何角度, 设输入 $\boldsymbol{u} = [u_1, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}}$, 输出 $\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$, 定义输入、输入关联和输出的约束空间分别为

$$\begin{aligned} P(U) &= \left\{\boldsymbol{u} = [u_1, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{u}_{\max}\right\} \\ PZ(U) &= \left\{\boldsymbol{u} = [u_1, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{z}_{\min} \leq W\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{z}_{\max}\right\} \\ P(Y) &= \left\{\boldsymbol{y} = [y_1, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{y}_{\min} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}_{\max}\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

并定义输入生成空间为

$$PY(U) = \left\{\boldsymbol{u} = [u_1, \cdots, u_m]^{\mathrm{T}} | \boldsymbol{y}_{\min} \leq G\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{y}_{\max}\right\} \tag{9}$$

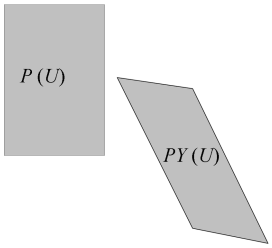
由于稳态增益 G 的线性特点, 输出的约束空间 $P(Y)$ 可转化为与之对等的输入约束范围, 即输入生成空间 $PY(U)$.

本文由欧氏空间凸体几何的角度考虑, 将约束优化控制的可行性判定化为关于凸多面体相交的一系列优化问题.

1) 当无输入关联约束时, 仅需判断 $P(U)$ 和 $PY(U)$ 两凸体的相对位置, 从而分析约束优化问题的可行性如图 2 所示.

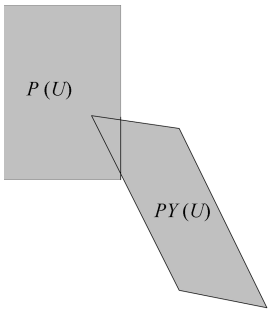
2) 当存在输入关联约束时, 情况变得复杂, 此时考察具有输入关联约束的约束优化问题可行性的问题, 需判断 $P(U)$, $PZ(U)$ 和 $PY(U)$ 三者是否相交的问题, 如图 3 所示.

文献 [16] 将两凸体相交转化为求两凸体之间的最短距离, 以此判断约束优化问题是否可行. 此方法仅适合于无输入关联约束情况, 针对三个凸体是否相交问题, 无法适用. 因此提出一种解决具有输入关联约束可行性分析算法很有必要.



(a) 凸多面体不相交, 约束优化问题不可行

(a) Disjoint (The constrained optimization problem is infeasible.)

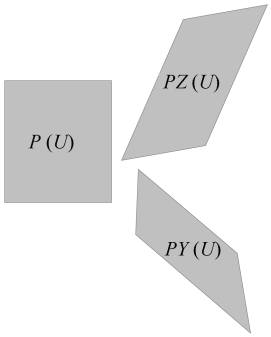


(b) 凸多面体相交, 约束优化问题可行

(b) Intersect with a deepness (The constrained optimization problem is feasible.)

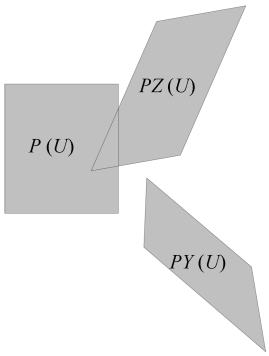
图 2　无输入关联约束二维空间示意图

Fig. 2　Two-dimensional space sketch map without related constraint of input variables



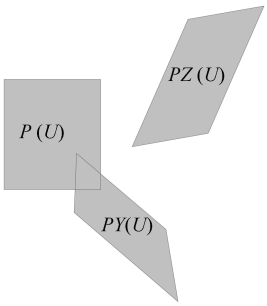
(a) 凸多面体不相交, 约束优化问题不可行

(a) Disjoint (The constrained optimization problem is infeasible.)



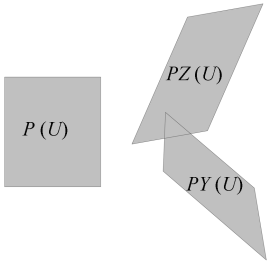
(b) $PZ(U)$ 仅与 $P(U)$ 相交, 约束优化问题不可行

(b) $PZ(U)$ only intersects with $P(U)$ (The constrained optimization problem is infeasible.)



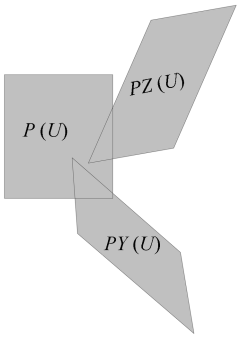
(c) $PY(U)$ 仅与 $P(U)$ 相交, 约束优化问题不可行

(c) $PY(U)$ only intersects with $P(U)$ (The constrained optimization problem is infeasible.)



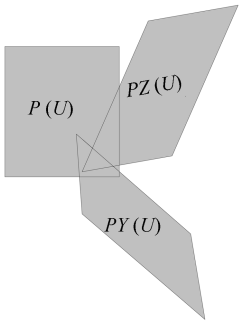
(d) $PZ(U)$ 仅与 $PY(U)$ 相交, 约束优化问题不可行

(d) $PZ(U)$ only intersects with $PY(U)$ (The constrained optimization problem is infeasible.)



(e) $P(U)$, $PZ(U)$ 与 $PY(U)$ 两两相交, 约束优化问题不可行

(e) $P(U)$, $PZ(U)$ and $PY(U)$ intersect with each other (The constrained optimization problem is infeasible.)



(f) 凸多面体相交, 约束优化问题可行

(f) Intersect with a common deepness (The constrained optimization problem is feasible.)

图 3　具有输入关联约束二维空间示意图

Fig. 3　Two-dimensional space sketch map with related constraints of input variables

1.2 具有输入关联约束的约束优化问题可行性分析算法

定义 1. 已知 G 为稳定线性多变量系统的稳态增益阵, $P(U)$, $PZ(U)$ 和 $P(Y)$ 分别为系统输入、输入关联和输出的约束空间. 若存在某输入 $\boldsymbol{u} \in P(U)$ 且 $\boldsymbol{u} \in PZ(U)$, 使得 $\boldsymbol{y} = G\boldsymbol{u} \in P(Y)$, 则称输入关联约束优化问题可行; 反之, 若对任意输入 $\boldsymbol{u} \in P(U)$ 以及 $\boldsymbol{u} \in PZ(U)$, 均不能满足 $\boldsymbol{y} = G\boldsymbol{u} \in P(Y)$, 则称输入关联约束优化问题不可行.

根据定义 1, 输入关联约束优化问题可行等价于以下约束空间非空:

$$P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u} \in P(U), \boldsymbol{u} \in PZ(U), G\boldsymbol{u} \in P(Y)\} \tag{10}$$

实质上, 非空的约束空间 $P_v(\boldsymbol{u})$ 表示为图 3(f) 中 $P(U)$, $PZ(U)$ 以及 $PY(U)$ 共同相交部分.

记

$$N = \begin{bmatrix} I_m \\ -I_m \\ W \\ -W \\ G \\ -G \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2(m+f+r)\times m}$$

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\min} \\ -\boldsymbol{u}_{\max} \\ \boldsymbol{z}_{\min} \\ -\boldsymbol{z}_{\max} \\ \boldsymbol{y}_{\min} \\ -\boldsymbol{y}_{\max} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2(m+f+r)}$$

则

$$P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\} \tag{11}$$

由凸集的性质可知, 约束空间 $P_v(\boldsymbol{u})$ 为凸多面集形式.

利用凸包的概念, 采用点集法表示 $P_v(\boldsymbol{u})$ 为

$$coP_v(\boldsymbol{u}) = \left\{\boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{u}^j,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\right\} \tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{u}^j \in P_v(\boldsymbol{u})$ 是凸多面集 $P_v(\boldsymbol{u})$ 的顶点坐标. 因此, 获取凸多面集 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$ 的关键在于求其顶点集合, 将输入关联约束优化问题的可行性分析可转化为求凸多面集顶点的凸体几何问题. 下面给出约束空间 $P_v(\boldsymbol{u})$ 顶点求取的方法.

引理 1[17]**.** 凸多面集 $T = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$ 非空的充分必要条件是 A 和 $\boldsymbol{b}$ 可以分解为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中, A_1 为 $m \times m$ 满秩方阵, $\boldsymbol{b}_1$ 为 m 维列向量, 使得 $A_2 A_1^{-1} \boldsymbol{b}_1 \geq \boldsymbol{b}_2$.

引理 2[18]**.** 设凸多面集 $T = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$, 其中 A 为 $r \times m$ 矩阵, $r > m$, A 的秩为 m, $\boldsymbol{x}_0$ 为 T 的顶点的充分必要条件是 A 和 $\boldsymbol{b}$ 可作以下列分解:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

使得 $A_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_1$, $A_2\boldsymbol{x}_0 \geq \boldsymbol{b}_2$; 其中 A_1 为 $m \times m$ 方阵, 且 A_1 的秩为 m, $\boldsymbol{b}_1$ 为 m 维列向量.

将本文提出的约束空间 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$ 中的 N 和 $\boldsymbol{c}$ 分解为

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中, N_1 为 $m \times m$ 方阵, $\boldsymbol{c}_1$ 为 m 维列向量, 可以得到最多 $\dfrac{(2m+2f+2r)!}{m!(2f+2r+m)!}$ 个不同分解结果. 根据引理 1 所述, 判别 N_1 是否为满秩方阵并使 $N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \geq \boldsymbol{c}_2$ 得到满足, 若所有分解结果均不成立则约束空 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$ 为空, 即输入关联约束优化问题不可行; 若存在 N_1 为满秩方阵并使 $N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \geq \boldsymbol{c}_2$ 同时得到满足时, 输入关联约束优化问题可行, 设 $\boldsymbol{c}_0 = N_1^{-1}\boldsymbol{c}_1$, 则 $N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \geq \boldsymbol{c}_2$ 可表示为 $N_2 \boldsymbol{c}_0 \geq \boldsymbol{c}_2$, 由于 N_1 为满秩方阵, 所以 $N_1 \boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{c}_1$, 根据引理 2 可以确定 $\boldsymbol{c}_0 = N_1^{-1}\boldsymbol{c}_1$ 为约束空间 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$ 的一个顶点.

通过本文方法即可分析约束优化问题的可行性. 当约束优化问题可行时可以确定约束空间 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$ 的所有顶点, 通过顶点凸组合能直接确定约束空间 $P_v(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{u} | N\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{c}\}$, 即具输入关联约束的约束优化问题的可行区域.

有输入关联约束的约束优化问题的可行性分析算法步骤如下:

步骤 1. 设 $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, 根据已知的稳态增益阵 G 和常系数矩阵 W, 输入方约束 $\boldsymbol{u}_{\min}$, $\boldsymbol{u}_{\max}$、输入关联约束 $\boldsymbol{z}_{\min}$, $\boldsymbol{z}_{\max}$ 以及输出约束 $\boldsymbol{Y}_{\min}$, $\boldsymbol{Y}_{\max}$, 由式 (11) 确定矩阵 N 和向量 $\boldsymbol{c}$.

步骤 2. 同时选取 N 和 $\boldsymbol{c}$ 中的任意 m 行组成子阵 N_1 和 $\boldsymbol{c}_1$, 剩下部分组成子阵 N_2 和 $\boldsymbol{c}_2$, 这样的选择的个数不会超过 $\mathrm{C}_{2(m+f+r)}^{m}$, 即

$$a_{\max} = \frac{(2m+2f+2r)!}{m!(2f+2r+m)!}$$

步骤 3. 计算 N_1 的秩. 若 $\mathrm{rank}(N_1) = m$, 转到步骤 4, 否则转到步骤 5.

步骤 4. 计算向量 $\boldsymbol{c}_0 = N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1$, 逐个比较 $\boldsymbol{c}_0$ 和 $\boldsymbol{c}_2$ 的对应元素. 如果存在某一元素使 $c_{0i} < c_{2i}$, 则表示向量不等式 $N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \geq \boldsymbol{c}_2$ 不成立; 若所有对应元素均有 $c_{0i} \geq c_{2i}$, $i = 1, \cdots, 2f+2r+m$, 则表示 $N_2 N_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \geq \boldsymbol{c}_2$ 成立, 令 $a_2 \Leftarrow a_2 + 1$, 并获取顶点 $J(a_2) = N_1^{-1}\boldsymbol{c}_1$.

步骤 5. 若 $a_1 < a_{\max}$, 令 $a_1 \Leftarrow a_1 + 1$, 转到步骤 2, 重新换取 N 和 $\boldsymbol{c}$ 新的分解; 若 $a_1 = a_{\max}$, 转到步骤 6.

步骤 6. 若 $a_2 \neq 0$, 则约束空间 $P_v(\boldsymbol{u})$ 为非空, 约束优化问题可行, 共存在 a_2 个顶点, 可行区域为这些顶点组成的凸集.

2 具有输入关联约束的预测控制优化问题

2.1 预测控制中输入关联约束的处理

预测控制具有能够直接将约束纳入其求解最优控制律的约束优化问题中的优势, 所以对输入关联约束进行适当处理, 将其纳入到预测控制控制律的求解当中, 形成顾及输入关联约束的预测控制算法.

现考虑预测控制当前 k 时刻, 输入关联约束的矩阵和向量形式为

$$\boldsymbol{z}_{\min} \leq W\boldsymbol{u}(k) \leq \boldsymbol{z}_{\max} \tag{16}$$

其中, $\boldsymbol{u}(k)=[u_1(k),\cdots,u_l(k),\cdots,u_m(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$ 为 k 时刻的输入向量.

设预测控制的预测时域为 P, 控制时域为 M. 由于预测控制采用滚动优化的策略, 每一时刻的优化只顾及到当前及未来的 M 步的输入变量, 所以为了保证关联输入在给定约束范围内, 需将控制时域 M 内所有的输入变量 $\hat{\boldsymbol{u}}(k+i|k)$, $i=0,\cdots,M-1$ 都必须满足输入关联约束条件, 如此滚动进行, 即可保证输入关联约束有效性. 具体如下:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{z}_{\min}\le W\hat{\boldsymbol{u}}(k|k)\le\boldsymbol{z}_{\max}\\&\boldsymbol{z}_{\min}\le W\hat{\boldsymbol{u}}(k+1|k)\le\boldsymbol{z}_{\max}\\&\qquad\vdots\\&\boldsymbol{z}_{\min}\le W\hat{\boldsymbol{u}}(k+M-1|k)\le\boldsymbol{z}_{\max}\end{aligned}\tag{17}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Z}_{\min}\le E_w\hat{\boldsymbol{U}}(k)\le\boldsymbol{Z}_{\max}\tag{18}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_{\min}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{\min}\\\vdots\\\boldsymbol{z}_{\min}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{fM},\ \ \boldsymbol{Z}_{\max}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_{\max}\\\vdots\\\boldsymbol{z}_{\max}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{fM}$$

$$E_w=\mathrm{diag}\{W,\cdots,W\}\in\mathbf{R}^{(fM)\times(mM)}$$

$$\hat{\boldsymbol{U}}(k)=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}(k|k)\\\vdots\\\hat{\boldsymbol{u}}(k+M-1|k)\end{bmatrix}$$

每一时刻自动在线更新已知信息, 实时地将约束式 (18) 纳入预测控制的优化求解当中, 以保证具有输入关联约束预测控制的有效在线实施.

2.2　具有输入关联约束的区间预测控制优化求解

假设预测控制采用如下线性时不变离散状态空间模型:

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)=G\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)+H\boldsymbol{u}(k)\\\hat{\boldsymbol{y}}(k|k)=C\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)\end{cases}\tag{19}$$

其中, $\hat{\boldsymbol{x}}(k+i|k)\in\mathbf{R}^n$ 表示 k 时刻对 $(k+i)$ 时刻系统状态的估计, $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)=\boldsymbol{x}(k)$ 是系统当前时刻的状态; 输入 $\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^m$ 表示操纵变量; 输出 $\boldsymbol{y}(k)\in\mathbf{R}^r$ 表示被控变量, $\hat{\boldsymbol{y}}(k|k)=\boldsymbol{y}(k)$ 是系统当前时刻的输出; 系数矩阵 $G\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $H\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbf{R}^{r\times n}$.

在实际工业生产过程控制中, 对被控变量和操作变量的要求往往并没有严格的设定值, 而是满足一定的区间范围即可. 因此, 为实现这类有区间约束的预测控制, 引入优化变量 α 和 β, 如图 4 所示, 基于区间控制的预测控制器总是能够使被控变量 $\boldsymbol{y}$ 满足区间约束条件 $[\boldsymbol{y}_{\min},\boldsymbol{y}_{\max}]$, 并尽可能地使其在给定的期望控制区间 $[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]$ 内.

于是, k 时刻采用的优化性能指标函数[19] 为

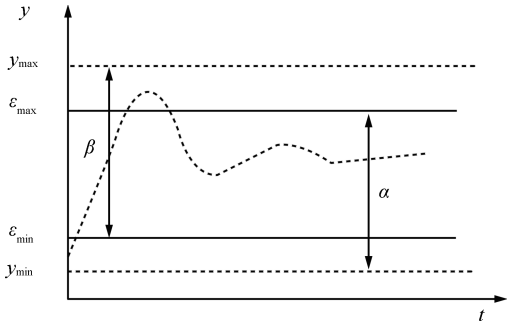


图 4　基于区间控制的预测控制图解

Fig. 4　MPC based on zone control

$$\begin{aligned}\min V(k)=\sum_{i=1}^{P}\Bigg[&\|\hat{\boldsymbol{y}}(k+i\,|k)-\hat{\alpha}(k+i\,|k)\|^2_{Q_1(i)}+\\&\Big\|\hat{\boldsymbol{y}}(k+i\,|k)-\hat{\beta}(k+i\,|k)\Big\|^2_{Q_2(i)}\Bigg]+\\&\sum_{i=0}^{M-1}\|\Delta\hat{\boldsymbol{u}}(k+i\,|k)\|^2_{R(i)}\end{aligned}\tag{20}$$

其中, $\hat{\alpha}(k+i\,|k)\in\mathbf{R}^r$, $\hat{\beta}(k+i\,|k)\in\mathbf{R}^r$ 是为实现区间约束而引入的需要求解的优化变量的估计值; $Q_1(i)$, $Q_2(i)\ge0$, $R(i)\ge0$ 分别为输出、输入权重. 控制作用的增量 $\Delta\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}(k)-\boldsymbol{u}(k-1)$, 当 $i\ge M$ 时, $\Delta\hat{\boldsymbol{u}}(k+i\,|k)=0$.

对式 (19) 系统状态的预测表示为矩阵和向量形式

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1\,|k)\\\hat{\boldsymbol{x}}(k+2\,|k)\\\vdots\\\hat{\boldsymbol{x}}(k+P\,|k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G\\G^2\\\vdots\\G^P\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\quad+\\\begin{bmatrix}H&&&\\GH&H&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\G^{M-1}H&G^{M-2}H&\cdots&H\\G^MH&G^{M-1}H&\cdots&GH+H\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\G^{P-1}H&G^{P-2}H&\cdots&\sum\limits_{i=0}^{P-M}G^iH\end{bmatrix}\times\\\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}(k\,|k)\\\vdots\\\hat{\boldsymbol{u}}(k+M-1\,|k)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{21}$$

则对输出的预测表示为

$$\hat{\boldsymbol{Y}}(k)=S_x\boldsymbol{x}(k)+S_U\hat{\boldsymbol{U}}(k)=\boldsymbol{Y}_0(k)+S_U\hat{\boldsymbol{U}}(k)\tag{22}$$

其中

$$S_x=\begin{bmatrix}CG\\CG^2\\\vdots\\CG^P\end{bmatrix}$$

$$S_U=\begin{bmatrix} CH & & & \\ CGH & CH & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ CG^{M-1}H & CG^{M-2}H & \cdots & CH \\ CG^{M}H & CG^{M-1}H & \cdots & C(GH+H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CG^{P-1}H & CG^{P-2}H & \cdots & C\sum\limits_{i=0}^{P-M}G^iH \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{U}}(k)=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}(k\,|k) \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{u}}(k+M-1\,|k) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_0(k)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_0(k+1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_0(k+P) \end{bmatrix}=S_x\boldsymbol{x}(k)$$

记

$$\hat{\alpha}(k)=\begin{bmatrix} \hat{\alpha}(k+1\,|k) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}(k+P\,|k) \end{bmatrix},\ \hat{\beta}(k)=\begin{bmatrix} \hat{\beta}(k+1\,|k) \\ \vdots \\ \hat{\beta}(k+P\,|k) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\beta}(k) \end{bmatrix}$$

$$Q_1=\mathrm{diag}\,\{Q_1(1),Q_1(2),\cdots,Q_1(P)\}$$

$$Q_2=\mathrm{diag}\,\{Q_2(1),Q_2(2),\cdots,Q_2(P)\}$$

$$R=\mathrm{diag}\,\{R(0),R(1),\cdots,R(M-1)\}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{u}(k-1)^{\mathrm{T}} & 0_{1\times m} & \cdots & 0_{1\times m} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{mM}$$

$$F=\begin{bmatrix} I_m & & & & \\ -I_m & I_m & & & \\ & -I_m & I_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -I_m & I_m \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{(mM)\times(mM)}$$

则性能指标函数可写为

$$\begin{aligned} V(k)=&\left\|\hat{\boldsymbol{Y}}(k)-\hat{\alpha}(k)\right\|_{Q_1}^2+\\ &\left\|\hat{\boldsymbol{Y}}(k)-\hat{\beta}(k)\right\|_{Q_2}^2+\left\|F\hat{\boldsymbol{U}}(k)+\boldsymbol{f}\right\|_R^2=\\ &\mathrm{const}+\hat{\boldsymbol{X}}(k)^{\mathrm{T}}\Phi\hat{\boldsymbol{X}}(k)+2\Theta^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}(k) \end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$\Phi=\begin{bmatrix} S_U^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2)S_U+F^{\mathrm{T}}RF & -S_U^{\mathrm{T}}Q_1 & -S_U^{\mathrm{T}}Q_2 \\ -Q_1S_U & Q_1 & 0 \\ -Q_2S_U & 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\Theta=\Gamma\boldsymbol{Y}_0(k)+\Psi\boldsymbol{f},\ \Gamma=\begin{bmatrix} S_U^{\mathrm{T}}(Q_1+Q_2) \\ -Q_1 \\ -Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi=\begin{bmatrix} F^{\mathrm{T}}R \\ 0_{rP\times mM} \\ 0_{rP\times mM} \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{(mM+2rP)\times mM}$$

const 为常数, 对优化求解没有影响, 所以性能指标函数可记为

$$J(k)=\hat{\boldsymbol{X}}(k)^{\mathrm{T}}\Phi\hat{\boldsymbol{X}}(k)+2\Theta^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}(k)$$

系统的输入、输出约束条件

$$\boldsymbol{u}_{\min}\le\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{u}_{\max},\ \boldsymbol{y}_{\min}\le\boldsymbol{y}\le\boldsymbol{y}_{\max}\tag{24}$$

以及对 α, β 的约束条件

$$\boldsymbol{y}_{\min}\le\alpha\le\varepsilon_{\max},\ \varepsilon_{\min}\le\beta\le\boldsymbol{y}_{\max}\tag{25}$$

可分别表示为

$$D_1\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\boldsymbol{d}_1,\ D_2\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\boldsymbol{d}_2,\ D_3\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\boldsymbol{d}_3,\ D_4\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\boldsymbol{d}_4\tag{26}$$

其中

$$D_1=\begin{bmatrix} I_{mM} & 0_{mM\times rP} & 0_{mM\times rP} \\ -I_{mM} & 0_{mM\times rP} & 0_{mM\times rP} \end{bmatrix}$$

$$D_2=\begin{bmatrix} S_U & 0_{rP\times rP} & 0_{rP\times rP} \\ -S_U & 0_{rP\times rP} & 0_{rP\times rP} \end{bmatrix}$$

$$D_3=\begin{bmatrix} 0_{rP\times mM} & I_{rP} & 0_{rP\times rP} \\ 0_{rP\times mM} & -I_{rP} & 0_{rP\times rP} \end{bmatrix}$$

$$D_4=\begin{bmatrix} 0_{rP\times mM} & 0_{rP\times rP} & I_{rP} \\ 0_{rP\times mM} & 0_{rP\times rP} & -I_{rP} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}_1=\left[\boldsymbol{u}_{\max}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{u}_{\max}^{\mathrm{T}},-\boldsymbol{u}_{\min}^{\mathrm{T}},\cdots,-\boldsymbol{u}_{\min}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2mM}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_2=&\left[\boldsymbol{y}_{\max}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}_0(k+1)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{y}_{\max}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{y}_0(k+P)^{\mathrm{T}},\right.\\ &\left.-\boldsymbol{y}_{\min}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{y}_0(k+1)^{\mathrm{T}},\cdots,-\boldsymbol{y}_{\min}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{y}_0(k+P)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2rP} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{d}_3=\left[\varepsilon_{\max}^{\mathrm{T}},\cdots,\varepsilon_{\max}^{\mathrm{T}},-\boldsymbol{y}_{\min}^{\mathrm{T}},\cdots,-\boldsymbol{y}_{\min}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2rP}$$

$$\boldsymbol{d}_4=\left[\boldsymbol{y}_{\max}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{y}_{\max}^{\mathrm{T}},-\varepsilon_{\min}^{\mathrm{T}},\cdots,-\varepsilon_{\min}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{2rP}$$

$\varepsilon_{\max}$, $\varepsilon_{\min}$ 为控制区间的上、下边界.

将输入关联约束式 (18) 转化成不等式矩阵形式

$$D_5\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\boldsymbol{d}_5\tag{27}$$

其中

$$D_5=\begin{bmatrix} E_w & 0_{fM\times rP} & 0_{fM\times rP} \\ -E_w & 0_{fM\times rP} & 0_{fM\times rP} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}_5=\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{\max} \\ -\boldsymbol{Z}_{\min} \end{bmatrix}$$

于是, 包括输入方约束及关联约束、输出约束预测控制的优化问题可表示为如下标准的二次规划问题:

$$\begin{aligned}&\min_{\hat{\boldsymbol{X}}(k)} J(k)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{X}}(k)^{\mathrm{T}}(2\Phi)\hat{\boldsymbol{X}}(k)+2\Theta^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}(k)\\&\text{s.t.}\quad\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}(k)\le\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1\\\boldsymbol{d}_2\\\boldsymbol{d}_3\\\boldsymbol{d}_4\\\boldsymbol{d}_5\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{28}$$

求解此问题可获得最优解 $\boldsymbol{X}^*(k)$, 于是 $\boldsymbol{U}^*(k)=[I_{mM}\ 0_{mM\times rP}\ 0_{mM\times rP}]\boldsymbol{X}^*(k)$. 当前 k 时刻, 只执行最优控制序列 $\boldsymbol{U}^*(k)$ 的第一项, 下一时刻重新滚动计算优化问题, 反复进行, 所以基于区间控制的预测控制的控制作用增量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^*(k)=&[\ I_m\quad 0_{m\times(mM-m)}\ ]\boldsymbol{U}^*(k)=\\&[\ I_m\quad 0_{m\times(mM-m+2rP)}\ ]\boldsymbol{X}^*(k)\end{aligned}\tag{29}$$

2.3　输入关联约束对预测控制优化求解的影响

预测控制存在约束限制时, 需要求解式 (28), 假设 k 时刻被激活的约束表示为

$$\begin{aligned}&D_1^a\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{d}_1^a=\boldsymbol{U}_b^a-\boldsymbol{U}_0^a=\boldsymbol{U}_b^a\\&D_2^a\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{d}_2^a=\boldsymbol{Y}_b^a-\boldsymbol{Y}_0^a=\boldsymbol{Y}_b^a-S_x^a\boldsymbol{x}(k)\\&D_3^a\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{d}_3^a=\alpha_b^a\\&D_4^a\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{d}_4^a=\beta_b^a\\&D_5^a\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{d}_5^a=\boldsymbol{Z}_b^a\end{aligned}\tag{30}$$

其中, 上标 a 表示被激活的约束, 下标 b 表示约束条件的边界值. 假设当前 k 时刻被激活的式 (30) 的约束个数分别为 n_u, n_y, n_α, n_β, n_w. D_i^a, $\boldsymbol{d}_i^a$ 分别是由 D_i, $\boldsymbol{d}_i$ 中与激活约束对应的行组成的, $i=1,\cdots,4$. $\boldsymbol{U}_b^a$, $\boldsymbol{Y}_b^a$, α_b^a, β_b^a, $\boldsymbol{Z}_b^a$ 分别代表被激活的输入、输出、α、β、输入关联约束条件的边界值, 可能是上界、下界或者为等式约束. 将上述约束条件写在一起有:

$$A\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{C}_a\tag{31}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}D_1^a\\D_2^a\\D_3^a\\D_4^a\\D_5^a\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_b^a\\\boldsymbol{Y}_b^a-S_x^a\boldsymbol{x}(k)\\\alpha_b^a\\\beta_b^a\\\boldsymbol{Z}_b^a\end{bmatrix}$$

约束的影响可通过对激活约束矩阵 A 进行域和零空间分解来说明. 由于矩阵 A 是病态的, 采用基于 A^{T} 列旋转的 QR 分解, 矩阵 A 的秩为 $n_r\le mM+2rP$, 有:

$$A^{\mathrm{T}}P_A=Q_AR_A=[\ Q_y\quad Q_z\ ]\begin{bmatrix}R_y\\0\end{bmatrix}\tag{32}$$

其中, $P_A\in\mathbf{R}^{(n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w)\times(n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w)}$ 是通过交换单位阵的列获得的交换阵, $Q_A\in\mathbf{R}^{(mM+2rP)\times(mM+2rP)}$ 是满足 $Q_A^{\mathrm{T}}Q_A=I_{mM+2rP}$ 的正交矩阵, $R_y\in\mathbf{R}^{n_r\times(n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w)}$ 是上三角矩阵, $Q_y\in\mathbf{R}^{(mM+2rP)\times n_r}$ 和 $Q_z\in\mathbf{R}^{(mM+2rP)\times(mM+2rP-n_r)}$ 是对 Q_A 进行行划分得到的矩阵.

式 (32) 两边左乘 Q_A^{T}, 可得:

$$P_A^{\mathrm{T}}AQ_y=R_y^{\mathrm{T}},\ \ AQ_z=0\tag{33}$$

因此, Q_z 对应 A 的零空间的一组基. 于是, 整个 $\boldsymbol{X}$ 空间由值域和零空间两部分组成:

$$\boldsymbol{X}=Q_y\boldsymbol{X}_y+Q_z\boldsymbol{X}_z\tag{34}$$

其中, $\boldsymbol{X}_y\in\mathbf{R}^{n_r}$, $\boldsymbol{X}_z\in\mathbf{R}^{mM+2rP-n_r}$. 于是, 可以对这两部分分别求解, 然后再按照式 (34) 组合在一起成为 $\boldsymbol{X}$ 的最优解. 可以看到, $\boldsymbol{X}_y$ 完全取决于当前激活约束集, 所以输入的自由度为 $(m-\dfrac{n_r}{M})$.

1) $\boldsymbol{X}_y$ 的求解. 将式 (34) 代入式 (31), 有:

$$A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_a=AQ_y\boldsymbol{X}_y+AQ_z\boldsymbol{X}_z=AQ_y\boldsymbol{X}_y\tag{35}$$

左乘 P_A^{T} 可得:

$$R_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_y=P_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a\tag{36}$$

当 $n_r=n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w$, 即矩阵 A 行满秩时, R_y^{T} 是下三角方阵, 方程的解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_y=R_y^{-\mathrm{T}}P_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_a=\\&[B_y\ K_y\ W_y\ Z_y\ L_y]\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_b^a\\\boldsymbol{Y}_b^a-S_x^a\boldsymbol{x}(k)\\\alpha_b^a\\\beta_b^a\\\boldsymbol{Z}_b^a\end{bmatrix}=\\&B_y\boldsymbol{U}_b^a+K_y[\boldsymbol{Y}_b^a-S_x^a\boldsymbol{x}(k)]+W_y\alpha_b^a+Z_y\beta_b^a+L_y\boldsymbol{Z}_b^a\end{aligned}\tag{37}$$

其中, $[B_y\ K_y\ W_y\ Z_y\ L_y]$ 是对矩阵 $R_y^{-\mathrm{T}}P_A^{\mathrm{T}}$ 做相应列划分得到的. 只有在存在输入关联约束被激活时, 才会出现 $L_y\boldsymbol{Z}_b^a$ 项. 当 $n_r<n_x+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w$ 时, R_y^{T} 是下梯形矩阵, 式 (36) 成为超定方程, 这一般对应不相交的激活集. 此时建立划分:

$$R_y^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}R_u^{\mathrm{T}}\\R_l^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{au}\\\boldsymbol{C}_{al}\end{bmatrix}\tag{38}$$

其中, $R_u^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n_r\times n_r}$ 对应矩阵 R_y 的上三角部分, $R_l^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{(n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w-n_r)\times n_r}$ 为余下的长方形矩阵, $\boldsymbol{C}_{au}\in\mathbf{R}^{n_r}$, $\boldsymbol{C}_{al}\in\mathbf{R}^{(n_u+n_y+n_\alpha+n_\beta+n_w-n_r)\times n_r}$ 是对 $\boldsymbol{C}_a$ 相应的划分. 于是通过解下三角形式的 $R_u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_y=P_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{au}$ 可得到 $\boldsymbol{X}_y$, 然后代入余下方程 $R_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_y=P_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{al}$ 来验证式 (36) 的可行性. 若这一系列方程相容, $\boldsymbol{X}_y$ 仍可用式 (37) 的形式表示, 此时 $[B_y\ K_y\ W_y\ Z_y\ L_y]$ 对应矩阵 $R_u^{-\mathrm{T}}P_A^{\mathrm{T}}$ 的列划分.

2) $\boldsymbol{X}_z$ 的求解. $\boldsymbol{X}_z$ 可通过在余下的自由度下最小化目标函数得到. 将式 (34) 代入式 (23), 有:

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{X}_z)=&\ \mathrm{const}+2\Theta^{\mathrm{T}}Q_z\boldsymbol{X}_z+2\boldsymbol{X}_y^{\mathrm{T}}Q_y^{\mathrm{T}}\Phi Q_z\boldsymbol{X}_z+\\&\boldsymbol{X}_z^{\mathrm{T}}Q_z^{\mathrm{T}}\Phi Q_z\boldsymbol{X}_z\end{aligned}\tag{39}$$

求解 $\dfrac{\partial V(\boldsymbol{X}_z)}{\partial \boldsymbol{X}_z}=0$, 可得:

$$\boldsymbol{X}_z=-(Q_z^{\mathrm{T}}\Phi Q_z)^{-1}Q_z^{\mathrm{T}}(\Theta+\Phi Q_y\boldsymbol{X}_y) \tag{40}$$

于是, 按照式 (34) 将 $\boldsymbol{X}_y$, $\boldsymbol{X}_z$ 组合在一起得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=&[-(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yK_y\boldsymbol{S}_x^a-B\Gamma S_x]\boldsymbol{x}(k)-\\&B\Gamma\Psi\boldsymbol{f}+(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yB_y\boldsymbol{U}_b^a+\\&(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yK_y\boldsymbol{Y}_b^a+\\&(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yW_y\alpha_b^a+\\&(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_y\boldsymbol{Z}_y\beta_b^a+\\&(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yW_y\boldsymbol{Z}_b^a\end{aligned} \tag{41}$$

其中, $B=Q_z(Q_z^{\mathrm{T}}\Phi Q_z)^{-1}Q_z^{\mathrm{T}}$.

记 $L=\begin{bmatrix} I_{mM} & 0_{mM\times rP} & 0_{mM\times rP}\end{bmatrix}$, 于是有约束条件时 $\boldsymbol{U}(k)$ 的解析解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(k)=&[\ I_{mM}\quad 0_{mM\times rP}\quad 0_{(mM)\times rP}\ ]\boldsymbol{X}(k)=\\&[-L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yK_y\boldsymbol{S}_x^a-LB\Gamma S_x]\boldsymbol{x}(k)-\\&LB\Psi\boldsymbol{f}+L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yB_y\boldsymbol{U}_b^a+\\&L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yK_y\boldsymbol{Y}_b^a+\\&L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yW_y\alpha_b^a+\\&L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yZ_y\beta_b^a+\\&L(I_{mM+2rP}-B\Phi)Q_yL_y\boldsymbol{Z}_b^a\end{aligned} \tag{42}$$

所以基于输入关联约束的区间预测控制律的解析解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(k)=&[\ I_m\quad 0_{m\times(mM-m)}\ ]\boldsymbol{U}(k)=\\&K_1^a\boldsymbol{x}(k)+K_2^a\boldsymbol{u}(k-1)+\\&\boldsymbol{d}_u+\boldsymbol{d}_y+\boldsymbol{d}_\alpha+\boldsymbol{d}_\beta+\boldsymbol{d}_w\end{aligned} \tag{43}$$

K_1^a 对应状态反馈项, K_2^a 对应过去时刻的控制作用项, 二者都是关于模型参数和控制调整参数以及激活约束的函数. 同时引入了关于激活输入、输出、α、β、输入关联约束边界的项 $\boldsymbol{d}_u$, $\boldsymbol{d}_y$, $\boldsymbol{d}_\alpha$, $\boldsymbol{d}_\beta$, $\boldsymbol{d}_w$.

通过对具有输入关联约束区间预测控制解析解的分析, 可以得出当输入关联约束被激活时, 存在激活约束边界项 $\boldsymbol{d}_w$ 对控制律 $\boldsymbol{u}$ 进行修正, 以保证控制律 $\boldsymbol{u}$ 符合输入关联约束条件; 当输入关联约束未被激活时, 控制律 $\boldsymbol{u}$ 中不存在激活约束边界项 $\boldsymbol{d}_w$, 预测控制的控制律 $\boldsymbol{u}$ 求解与无输入关联约束区间预测控制求解无异.

3 仿真实验

考虑文献 [20] 中所描述的二元蒸馏过程的传递函数为

$$\begin{bmatrix} y_1(s)\\ y_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{12.8\mathrm{e}^{-s}}{16.7s+1} & \dfrac{6.6\mathrm{e}^{-7s}}{10.9s+1}\\ \dfrac{-18.9\mathrm{e}^{-3s}}{21s+1} & \dfrac{-19.4\mathrm{e}^{-3s}}{14.4s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(s)\\ u_2(s)\end{bmatrix}$$

其中, 传递函数中各变量已经过无量纲化处理, 取采样时间为 4 min, 得到离散状态空间模型

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)=&\\&\begin{bmatrix}1.48 & -0.55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.58 & -0.63 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\times\\&\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(k)=&\begin{bmatrix}2.1 & -0.84 & -0.43 & 0 & -0.88 & -1.73 & 1.82\\ 0 & 0.58 & 0.99 & -1.14 & -1.3 & -2.33 & 2.81\end{bmatrix}\times\\&\boldsymbol{x}(k)\end{aligned}$$

设系统初始条件为输出 $y_1(0)=y_2(0)=0$, 输入 $u_1(0)=0.5$, $u_2(0)=0.1$. 控制要求为以 u_1, u_2 为操作变量, 控制输出的约束范围 $y_1\in[-3,2]$, $y_2\in[-1,3]$, 系统的被控目标为 $y_1\in[-2.6,-1.2]$, $y_2\in[0.6,2]$, 对操作变量的约束条件为既有方约束 $u_1\in[-1,0.6]$, $u_2\in[-0.5,0.8]$, 又有输入关联约束 $(2u_1-u_2)\in[-0.5,1]$. 在 Matlab 软件平台上进行约束优化控制可行性分析及预测控制仿真, 仿真结果分别如图 5 和图 6 所示.

采用本文约束优化问题可行性分析算法, 可分别确定本例中操纵变量只有方约束及具有输入关联约束的稳态约束优化问题是可行的, 图 5 给出的可行区域 $P_v(\boldsymbol{u})$ 是由以下顶点集合 Q 组成的凸多面体, 对比可以看出, 受输入关联约束条件的限制, 系统约束优化控制的可行区域 $P_v(\boldsymbol{u})$ 明显减小.

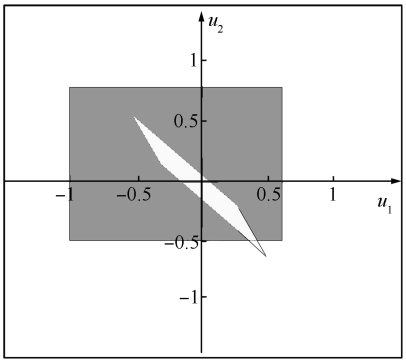
1) 操纵变量只具有方约束的顶点集合

$$Q=\left\{\begin{pmatrix}0.4141\\ -0.5000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.3545\\ -0.5000\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.5244\\ 0.5624\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.3107\\ 0.1481\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2606\\ -0.2023\end{pmatrix}\right\}$$

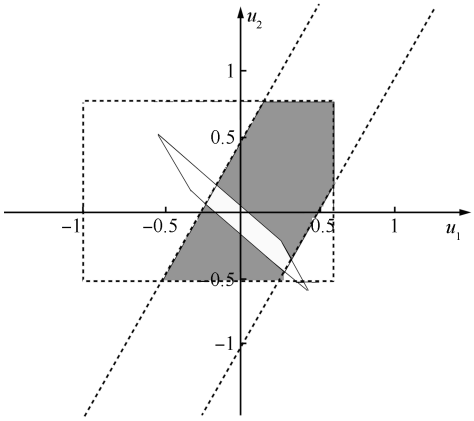
2) 操纵变量具有输入关联约束的顶点集合

$$Q=\left\{\begin{pmatrix}-0.1508\\ 0.1984\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0.2201\\ 0.0598\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.3308\\ -0.3385\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.2842\\ -0.4315\end{pmatrix},\begin{pmatrix}02606\\ -0.2023\end{pmatrix}\right\}$$

采用常规区间预测控制[19] 以及本文提出的具有输入关联约束处理区间预测控制方法处理情况, 仿真结果分别如图 6 (a) 和图 6 (b) 所示. 由图 6 (a) 可以看出, 采用常规区间预测控制算法, 虽然能实现常规输入输出变量的约束控制, 但是针对输入关联约束处理无能为力, 从图 6 (a) 最后一个子图可以看出, 关联输入明显超出给定约束范围. 采用本文方法, 由图 6 (b) 可以看出, 在保证被控变量区间控制的同时, 输入方约束与关联约束条件均得到满足, 验证了算法的有效性.



(a) 没有关联输入约束的可行域 $P_v(u)$
(a) Feasible region $P_v(u)$ for system without related constraints of input variables



(b) 有关联输入约束的可行域 $P_v(u)$
(b) Feasible region $P_v(u)$ for system with related constraints of input variables

图 5　约束优化问题可行区域仿真
Fig.5　Simulation results of feasible region for constrained optimal problem

模型具有输入约束情况下的所有输入约束条件形成的二维输入空间, 如图 7 (a) 所示; 具有输入关联约束的区间预测控制输入轨迹, 如图 7 (b) 所示. 预测控制之所以能够处理输入关联约束, 本质上是由于存在激活输入关联约束边界项 $\boldsymbol{d}_w$ 对控制律 $\boldsymbol{u}$ 在线进行修正. 由图 7 (b) 可以看出, 每个时刻预测控制的控制律 $\boldsymbol{u}$ 动态变化, 当逼近于关联约束边界时, 由于激活约束边界项的修正作用, 并未超出约束边界. 整个过程中输入方约束与关联约束均得到满足, 输出稳定在给定值上, 取得了理想的控制效果, 验证了预测控制处理输入关联约束的有效性.

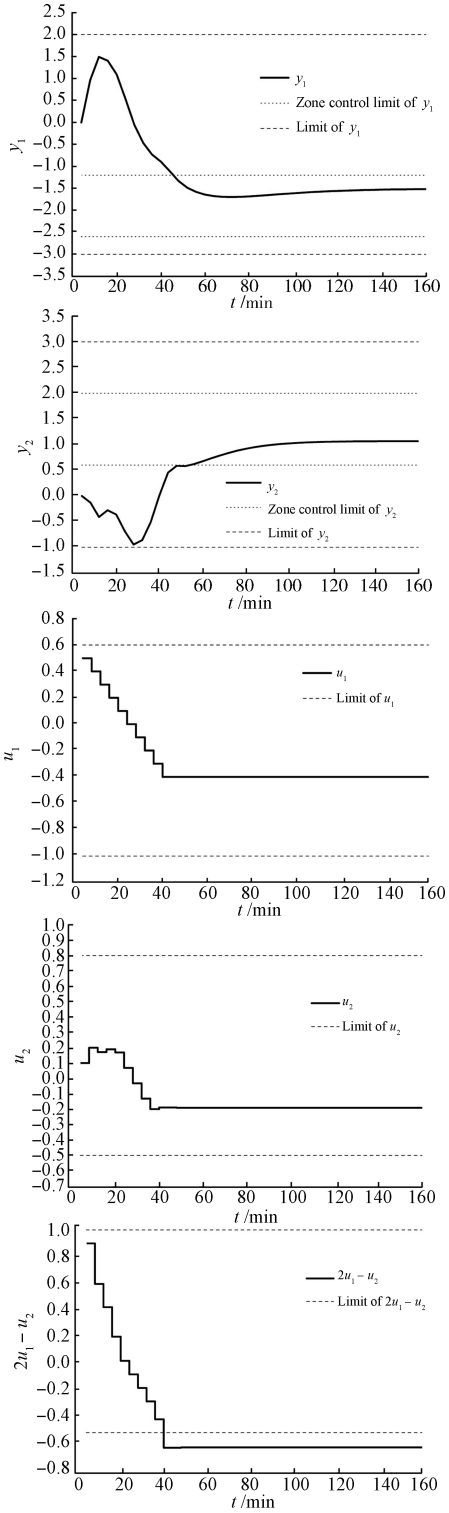
4　结论

针对输入关联约束问题, 分别从约束优化问题可行性, 预测控制实现输入关联约束, 输入关联约束对预测控制解析解的影响分析依次展开.

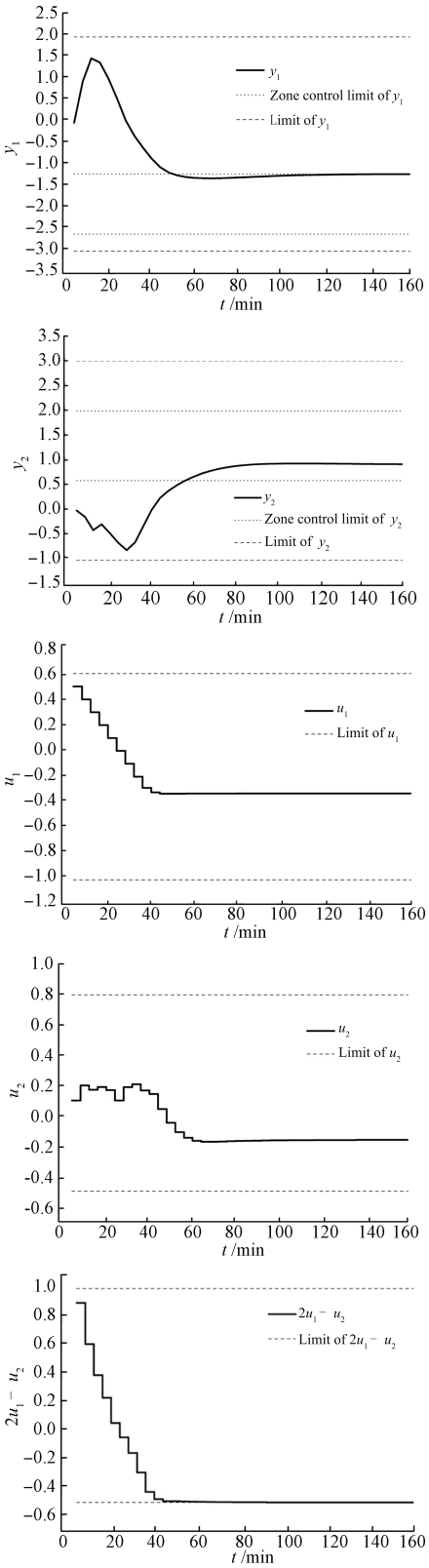
1) 作为实施预测控制的基础, 本文基于线性系统稳态模型, 从凸体顶点角度输入关联约束条件对约束优化控制可行性的影响, 通过顶点的凸组合反映具有输入关联约束对可行解区域的影响变化;

2) 考虑预测控制能够处理约束的特性, 提出处理输入关联约束的解决方法, 通过典型系统的控制仿真实验验证了预测控制处理输入关联约束的有效性;

3) 基于 Newton 控制框架思想, 针对具有输入关联约束条件的区间预测控制, 推导出有约束激活时状态反馈控制律的解析表达式, 存在激活约束边界项对控制律在线修正, 体现出由于输入关联约束条件的存在对预测控制控制律的特性影响.



(a) 未考虑关联输入约束的算法[19]
(a) Algorithm without related constraints of input variables[19]

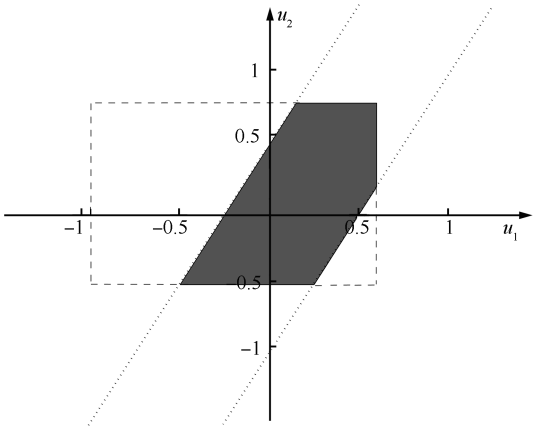


(b) 考虑关联输入约束的算法

(b) Algorithm with related constraints of input variables

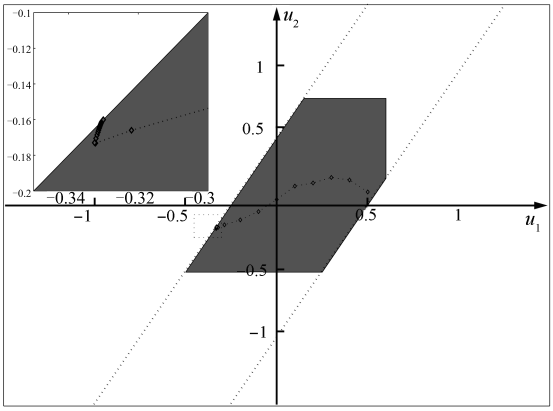
图 6 输入关联变量的预测控制仿真

Fig. 6 Simulation results of MPC with related constraints of input variables



(a) 含关联输入约束的二维输入空间

(a) Two-dimensional input space with related constraints of input variables



(b) 考虑关联输入约束的预测控制输入轨迹

(b) Input traces for MPC with related constraint of input variables

图 7 二维输入轨迹仿真

Fig. 7 Simulation results of two-dimensional input traces

References

1 Perez T, Goodwin G C. Constrained predictive control of ship fin stabilizers to prevent dynamic stall. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(4): 482−494

2 Maldonado M, Desbiens A, del Villar R. Potential use of model predictive control for optimizing the column flotation process. *International Journal of Mineral Processing*, 2009, **93**(1): 26−33

3 Cristea M V, Agachi S P, Marinoiu V. Simulation and model predictive control of a UOP fluid catalytic cracking unit. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 2003, **42**(2): 67−91

4 Gruber J K, Doll M, Bordons C. Design and experimental validation of a constrained MPC for the air feed of a fuel cell. *Control Engineering Practice*, 2009, **17**(8): 874−885

5 Zou Zhi-Yun, Liu Jian-You, Yu De-Hong, Liu Xing-Hong, Zhao Dan-Dan, Wang Zhi-Zhen, Guo Ning. A novel predictive control algorithm of linearly constrained system. *CIESC*

Journal, 2010, **61**(2): 413−419
(邹志云, 刘建友, 于德弘, 刘兴红, 赵丹丹, 王志甄, 郭宁. 一种新型线性约束系统预测控制算法. 化工学报, 2010, **61**(2): 413−419)

6 Piñón S, Camacho E F, Kuchen B, Peña M. Constrained predictive control of a greenhouse. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2005, **49**(3): 317−329

7 Zou Tao, Li Shao-Yuan. Multi-variable predictive control with output zone goal. *Control and Decision*, 2005, **20**(2): 203−206
(邹涛, 李少远. 带有输出区域控制目标特性的多变量预测控制算法. 控制与决策, 2005, **20**(2): 203−206)

8 Wang Yu-Hong, Huang De-Xian, Gao Dong-Jie, Jin Yi-Hui. Hybrid method to handle feasibility and constraint prioritization issues in predictive control. *Control and Decision*, 2004, **19**(8): 8−12
(王宇红, 黄德先, 高东杰, 金以慧. 预测控制可行性与约束优先级的混杂处理. 控制与决策, 2004, **19**(8): 8−12)

9 Yu Shi-Ming, Du Wei. Applications of goal programming in receding-horizon optimization and online identification of predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 995−1000
(余世明, 杜维. 目标规划法在预测控制滚动优化及在线辨识中的应用. 自动化学报, 2002, **28**(6): 995−1000)

10 Abou-Jeyab R A, Gupta Y P, Gervais J R, Branchi P A, Woo S S. Constrained multivariable control of a distillation column using a simplified model predictive control algorithm. *Journal of Process Control*, 2001, **11**(5): 509−517

11 Vada J, Slupphaug O, Foss B A. Infeasibility handling in linear MPC subject to prioritized constraints. In: Proceedings of the 14th IFAC World Congress. Beijing China: IFAC, 1999. 163−168

12 Zhang Jun, Xi Yu-Geng. Direct algorithm of constrained predictive control based on geometry analysis. *Control and Decision*, 1997, **12**(2): 184−187
(张峻, 席裕庚. 基于几何分析的约束预测控制直接算法. 控制与决策, 1997, **12**(2): 184−187)

13 Xi Yu-Geng, Li Kang. Feasibility analysis of constrained multi-objective multi-degree-of-freedom optimization control in industrial processes. *Control Theory and Application*, 1995, **12**(5): 590−596
(席裕庚, 李慷. 工业过程有约束多目标多自由度优化控制的可行性分析. 控制理论与应用, 1995, **12**(5): 590−596)

14 Li W C, Biegler L T. Multistep, Newton-type control strategies for constrained, nonlinear processes. *Chemical Engineering Research and Design*, 1989, **67**(10): 562−577

15 de Oliveira N M C, Biegler L T. Constraint handing and stability properties of model predictive control. *AIChE Journal*, 2004, **40**(7): 1138−1155

16 Zhang Xi-Ling, Wang Shu-Bin, Luo Xiong-Lin. Feasibility analysis and constraints adjustment of constrained optimal control in chemical processes. *CIESC Journal*, 2011, **62**(9): 2546−2554
(张惜岭, 王书斌, 罗雄麟. 化工过程约束优化控制的可行性分析及约束处理. 化工学报, 2011, **62**(9): 2546−2554)

17 Dai Lian-Kui, Li Xiao-Dong. A new method for feasibility analysis of steady constrained optimization system. *Control Theory and Application*, 1998, **15**(6): 925−928
(戴连奎, 李晓东. 稳态约束优化控制可行性分析的新方法. 控制理论与应用, 1998, **15**(6): 925−928)

18 Chen Bao-Lin. *The Theory and Algorithms of Optimization*. Beijing: Tsinghua University Press, 1989
(陈宝林. 最优化理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 1989)

19 Wang Feng, Zhang Qi-Ping, Zhou Han, Li Feng-Min. A zone-control algorithm with unequal limits in the model predictive control. *Computers and Applied Chemistry*, 2005, **22**(5): 349−354
(王锋, 张启平, 周涵, 李风敏. 可实现单边区间控制的模型预测控制算法. 计算机与应用化学, 2005, **22**(5): 349−354)

20 Wood R K, Berry M W. Terminal composition control of a binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, 1973, **28**(9): 1707−1717

罗雄麟 中国石油大学 (北京) 自动化研究所教授. 主要研究方向为过程控制与实时优化, 智能控制, 预测控制, 过程系统工程. 本文通信作者. E-mail: luoxl@cup.edu.cn
(**LUO Xiong-Lin** Professor at the Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing. His research interest covers process control and real-time optimization, intelligent control, model predictive control, and process systems engineering. Corresponding author of this paper.)

周晓龙 中国石油大学 (北京) 自动化研究所硕士研究生. 主要研究方向为过程控制, 过程系统工程. E-mail: zhouxiaolong34@sina.com
(**ZHOU Xiao-Long** Master student at the Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing. His research interest covers process control and process systems engineering.)

王书斌 中国石油大学 (北京) 自动化研究所讲师. 主要研究方向为过程控制与实时优化, 过程系统工程. E-mail: wangshubin@cup.edu.cn
(**WANG Shu-Bin** Lecturer at the Research Institute of Automation, China University of Petroleum, Beijing. His research interest covers process control and real-time optimization, and process systems engineering.)