

一类具有非线性扰动的多重时滞不确定系统鲁棒预测控制

苏成利¹ 赵家程¹ 李平¹

摘要 针对一类具有非线性扰动且同时存在多重状态和输入时滞的不确定系统, 提出一种鲁棒预测控制器设计方法. 基于预测控制滚动优化原理, 运用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 方法, 首先近似求解无限时域二次性能指标优化问题, 然后优化非线性扰动项所应满足的最大上界, 定量地研究鲁棒预测控制在范数有界意义下的扰动抑制问题, 并给出了鲁棒预测控制器存在的充分条件. 最后通过仿真验证了所提方法的有效性.

关键词 非线性扰动, 鲁棒预测控制, 线性矩阵不等式, 时滞, 不确定系统

引用格式 苏成利, 赵家程, 李平. 一类具有非线性扰动的多重时滞不确定系统鲁棒预测控制. 自动化学报, 2013, 39(5): 644–649

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00644

Robust Predictive Control for a Class of Multiple Time Delay Uncertain Systems with Nonlinear Disturbance

SU Cheng-Li¹ ZHAO Jia-Cheng¹ LI Ping¹

Abstract The design method of robust model predictive controller (RMPC) is proposed for a class of uncertain multiple state and input time-delay systems with nonlinear disturbance. Based on the predictive control principle of receding optimization, the quadratic performance index of the infinite time domain is optimized by means of Lyapunov stable theory and linear matrix inequalities (LMIs) technique. Then the disturbance rejection of the robust model predictive control in the sense of norm-bounded is studied by optimizing the maximum upper bound met by nonlinear disturbance. Sufficient conditions of the robust predictive controller are given. Finally, simulation results illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Nonlinear disturbance, robust predictive control, linear matrix inequalities (LMIs), time delay, uncertain system

Citation Su Cheng-Li, Zhao Jia-Cheng, Li Ping. Robust predictive control for a class of multiple time delay uncertain systems with nonlinear disturbance. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 644–649

预测控制是在每一采样时刻, 实时处理控制量和状态量的约束问题, 通过滚动优化使控制系统达到良好的跟踪性能^[1–2]. 工业过程中的模型不确定性和扰动是不可避免的, 然而, 经典的模型预测控制 (Model predictive control,

MPC) 是一种基于有限时域目标函数在线优化的控制算法, 因此当控制过程存在不确定和扰动时, MPC 的可行性和稳定性通常得不到保证^[3–4]. 为了提高模型建模误差存在时的鲁棒性, 鲁棒控制的一些方法被引入预测控制中, 融合鲁棒控制对不确定性的处理方法和预测控制的滚动优化思想, 使受控系统在满足可行性条件下达到渐近稳定, 它能够有效处理模型不确定性和时滞问题. 因此作为模型预测控制的一个重要分支, 鲁棒预测控制受到学术界的普遍关注^[5–6].

对于实际控制系统, 不确定性、时滞以及扰动是普遍存在的, 并且它们往往是导致系统不稳定或性能下降的主要原因. Chisci 等提出了一种鲁棒控制器综合方法, 该方法将预测时域内的各步系统状态强制在一个考虑了扰动的更小范围中^[7]. Scokaert 等在优化问题中考虑所有可能的扰动序列对系统状态的影响, 并以此为基础设计双模控制器^[8]. 对于持续有界扰动, 通常采用双模控制策略. 然而, 这种策略在线优化求解困难而且无法得到连续的控制律^[9]. 针对未知但有界的持续扰动的不确定系统, 文献 [10] 提出了一种约束非线性 H_∞ 鲁棒预测控制策略, 采用仿射输入定义预测控制的控制律, 并给出了相应终端约束集的估计解法. 文献 [11] 针对具有多包不确定性和有界噪声的系统, 提出了一种基于辅助优化的动态输出反馈鲁棒模型预测控制的综合方法, 并采用二次有界概念刻画扩展闭环系统的稳定性. 文献 [12] 针对一类同时具有状态和输入时滞的不确定广义系统, 通过近似求解无穷时域二次性能指标优化问题, 提出了鲁棒预测控制器的设计方法. 但上述文献都是单一处理系统中的有界扰动或时滞, 在实际应用中有较大局限. 而实际控制中, 时滞和非线性扰动的存在都会引起闭环系统的不稳定. 因此研究非线性扰动和时滞并存的不确定系统鲁棒预测控制十分必要.

本文在文献 [12] 的基础上, 针对一类具有非线性扰动且同时存在多重状态和输入时滞的不确定系统, 采用状态反馈控制结构, 通过在有限时域内使系统性能指标最小化, 在线处理不确定系统的多重时滞和有界非线性扰动问题, 给出了鲁棒预测控制器的综合方法.

1 问题描述

考虑如下同时具有多重状态和输入时滞的不确定系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (A + \Delta A)\mathbf{x}(t) + (B + \Delta B)\mathbf{u}(t) + \\ &\sum_{i=1}^l A_i \mathbf{x}(t - d_i) + \sum_{i=1}^l B_i \mathbf{u}(t - d_i) + \\ &\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - d_1), \dots, \mathbf{x}(t - d_l)), \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t), t \in (-d_l, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为系统控制量, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为初始条件, $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, l$ 为系统滞后时间常数, A, A_i, B, B_i 为具有适当维数的常数矩阵.

假设 1. ΔA 和 ΔB 表示时变参数不确定性, 且满足

$$[\Delta A \ \Delta B] = D F(t) [E_1 \ E_2] \quad (2)$$

式中, D, E_1, E_2 为已知相应维数的常数矩阵, $F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j}$ 表示未知的实值时变矩阵, 其元素是 Lebesgue 可积且有界, 满足 $F^T(t)F(t) \leq I$.

假设 2. $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - d_1), \dots, \mathbf{x}(t - d_l))$ 为有界非线

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-09-18

Manuscript received May 15, 2012; accepted September 18, 2012
国家自然科学基金 (61203021), 辽宁省科技攻关项目 (2011216011), 辽宁省高科技创新团队支持计划项目 (2009T062, LT2010058) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61203021), Scientific and Technological Project of Liaoning Province (2011216011), and University Innovation Team in the Educational Department of Liaoning Province (2009T062, LT2010058)

本文客座编委 李少远

Recommended by Guest Editor LI Shao-Yuan

1. 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院 抚顺 113001

1. School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun 113001

性扰动, 且满足以下有界条件:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d_1), \dots, \mathbf{x}(t-d_l))\| \leq (\beta_0 \|\mathbf{x}(t)\| + \beta_1 \|\mathbf{x}(t-d_1)\| + \dots + \beta_l \|\mathbf{x}(t-d_l)\|)^2 \quad (3)$$

式中, $\beta_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, l$ 为常数. 对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$. 鲁棒预测控制融合鲁棒控制对不确定性的处理方法和预测控制滚动优化思想, 即在每一采样时刻实施控制作用, 因此, 在采样时刻 kT , 采用状态反馈控制结构

$$\mathbf{u}(kT + \tau, kT) = K\mathbf{x}(kT + \tau, kT), k \geq 0, \tau \geq 0 \quad (4)$$

由于系统存在不确定性, 这里提出的不确定时滞系统鲁棒预测控制算法通过求解无限时域鲁棒性能指标的最优解来获得控制量. 对于范数有界不确定时滞系统 (1), 采用与文献 [13] 相类似的性能指标形式

$$\min_K \max_{F(kT+\tau, kT), \tau \geq 0} J_k \quad (5)$$

其中, $J_k = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(kT + \tau, kT)Q\mathbf{x}(kT + \tau, kT) + \mathbf{u}^T(kT + \tau, kT)R\mathbf{u}(kT + \tau, kT))d\tau$. Q, R 为加权对称正定矩阵. 假设采样时间序列为 $\{t_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, 且满足 $t_{k+1} - t_k = T$, T 为采样周期, $F(kT + \tau, kT)$ 表示被控系统的不确定矩阵的未知实值时变矩阵, $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{x}(kT, kT)$ 表示采样时刻 kT 的状态测量值, $\mathbf{x}(kT + \tau, kT)$ 表示在 kT 时刻对 $kT + \tau$ 时刻的状态计算值, $\mathbf{u}(kT + \tau, kT)$ 表示在 kT 时刻使性能指标 (5) 优化的受控输入序列在 $kT + \tau$ 时刻的计算值. 系统的动态性能指标通过目标函数的加权矩阵 Q, R 的大小来体现.

本文的目的是针对带有扰动不确定时滞系统 (1), 设计状态反馈鲁棒预测控制器, 通过在每一采样时刻 kT , 求解优化问题 (5), 确定出一个状态反馈控制律, 使得闭环系统在满足可行性条件下达到渐近稳定.

2 鲁棒预测控制器设计

在每一采样时刻, 直接求解含有模型不确定性的优化问题 (5) 是比较困难的. 通常首先给出性能指标 J_k 的上确界, 再将无限时域优化问题 (5) 转化为可求解的线性规划问题. 针对系统 (1), 构造连续的 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)S_i\mathbf{x}(t+\xi)d\xi \quad (6)$$

式中, $P > 0, S_i > 0$ 为正定二次型矩阵. 在每一采样时刻 kT , 假设满足以下条件:

$$\frac{d}{d\tau} V(\mathbf{x}(kT + \tau, kT)) \leq \mathbf{x}^T(kT + \tau, kT) \times Q\mathbf{x}(kT + \tau, kT) + \mathbf{u}^T(kT + \tau, kT)R\mathbf{u}(kT + \tau, kT) \quad (7)$$

为确保性能指标为有限值, 假设 $\mathbf{x}(\infty, kT) = 0$, 那么有 $V(\mathbf{x}(\infty, kT)) = 0$. 在下面的讨论中, 将最小化性能指标 J_k 转化为对 $V(\mathbf{x}(kT))$ 求最小. 将式 (7) 从 $0 \sim \infty$ 积分, 得 $J_k \leq V(\mathbf{x}(kT))$. 显然, $V(\mathbf{x}(kT))$ 就是 J_k 的上确界.

引理 1^[13]. 设 D, F, E 为具有适当维数的实矩阵, 且有 $F^T(t)F(t) \leq I$, 则对任意标量 $\varepsilon > 0$, 以下不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E \quad (8)$$

引理 2^[14]. 假设矩阵 Y, D, E 具有适当的维数, 且 Y 为对称矩阵, 则 $Y + DFE + E^T F^T D^T < 0$, 对所有满足

$F^T(t)F(t) \leq I$ 的矩阵 $F(t)$, 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 使得 $Y + \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$.

定理 1. 设 $\mathbf{x}(kT)$ 是系统 (1) 在 kT 时刻的状态测量值, 则系统采用状态反馈控制律 (4) 实现鲁棒渐近稳定的充分条件是: 存在变量 $\gamma > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, Y > 0, W_i > 0, M_i > 0, Z$ 满足下述形式的线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 优化问题. 其中状态反馈增益 $K = ZY^{-1}$.

$$\min_{\gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, Y, W_i, M_i, Z} \gamma + \sum_{i=1}^l \text{tr}(M_i) \quad (9)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T(kT) \\ \mathbf{x}(kT) & \gamma Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & N_i^T \\ N_i & W_i \end{bmatrix} > 0, i = 1, 2, \dots, l \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} L & * & * & * & * & * & * & * & * \\ G_1^T & F_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * & * & * \\ G_l^T & 0 & \dots & F_l & * & * & * & * & * \\ V & 0 & \dots & 0 & U & * & * & * & * \\ Y & 0 & \dots & 0 & 0 & -Q^{-1} & * & * & * \\ Z & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} & * & * \\ D^T & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I & * \\ H & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

式中, $\int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(kT + \xi)\mathbf{x}(kT + \xi)d\xi = N_i N_i^T, i = 1, 2, \dots, l$, $L = AY + YA^T + BZ + Z^T B^T, G_i = [(A_i + B_i K)Y + \varepsilon_1^{-1} \beta_{i-1} \beta_i I \ 0], H = E_1 Y + E_2 Z, F_i = \begin{bmatrix} 0 & Y^T \\ Y & \omega_i \end{bmatrix}, U =$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_l \end{bmatrix}, V^T = \begin{bmatrix} Y_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & Y_l^T \end{bmatrix}.$$

证明. 在采样时刻 kT , 考虑 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V(\mathbf{x}(kT)) = \mathbf{x}^T(kT)P\mathbf{x}(kT) + \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(kT + \xi, kT)S_i\mathbf{x}(kT + \xi, kT)d\xi \quad (13)$$

假设参数 γ 满足 $\mathbf{x}^T(kT)P\mathbf{x}(kT) \leq \gamma$, 即 $\mathbf{x}^T(kT) \times \frac{1}{\gamma} P\mathbf{x}(kT) \leq 1$, 记 $Y = P^{-1}$, 根据 Schur 补定理, 上式等价于式 (10). 而二次型函数中积分项可转化为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(kT + \xi, kT)S_i\mathbf{x}(kT + \xi, kT)d\xi &= \\ \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(kT + \xi, kT)W_i^{-1}\mathbf{x}(kT + \xi, kT)d\xi &= \\ \sum_{i=1}^l \text{tr}(N_i N_i^T W_i^{-1}) = \sum_{i=1}^l \text{tr}(N_i W_i^{-1} N_i^T) \end{aligned} \quad (14)$$

假设存在矩阵变量 M_i , 满足 $\text{tr}(N_i W_i^{-1} N_i^T) < \text{tr}(M_i)$, 根据 Schur 补定理, 上式等价于式 (11), 其中 $S_i = W_i^{-1}$. 则 $V(\mathbf{x}(kT)) \leq \gamma + \sum_{i=1}^l \text{tr}(M_i)$, 从而优化问题转化为式 (9).

由于系统 (1) 中含有的非线性扰动项也是具有多重时滞的, 那么由式 (3) 可以将其推广至多时滞情形, 其满足的最大上界如式 (15) 所示:

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}^T(t, \mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t-d_l)) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t-d_l)) \leq \\ & (\beta_0 \|\mathbf{x}(t)\| + \beta_1 \|\mathbf{x}(t-d_1)\| + \dots + \beta_l \|\mathbf{x}(t-d_l)\|)^2 \leq \\ & \beta_0^2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) + \beta_1^2 \mathbf{x}^T(t-d_1) \mathbf{x}(t-d_1) + \dots + \\ & \beta_l^2 \mathbf{x}^T(t-d_l) \mathbf{x}(t-d_l) + \beta_0 \mathbf{x}^T(t) (\beta_1 \mathbf{x}(t-d_1) + \dots + \\ & \beta_l \mathbf{x}(t-d_l)) + \dots + \beta_l \mathbf{x}^T(t-d_l) \times \\ & (\beta_1 \mathbf{x}(t-d_1) + \dots + \beta_l \mathbf{x}(t-d_l)) \end{aligned} \quad (15)$$

对于任意标量 $\varepsilon_1 > 0$, 并由引理 1 可推导出

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}^T(kT + \tau, kT) \mathbf{P} \mathbf{x}(kT + \tau, kT) + \mathbf{x}^T(kT + \tau, kT) \times \\ & \mathbf{P} \mathbf{f}(kT + \tau, kT) \leq \varepsilon_1^{-1} \mathbf{x}^T(kT + \tau, kT) \beta_0^2 \mathbf{x}(kT + \tau, kT) + \\ & \varepsilon_1 \mathbf{x}^T(kT + \tau, kT) \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(kT + \tau, kT) + \\ & \varepsilon_1^{-1} \beta_1^2 \mathbf{x}^T(kT + \tau - d_1, kT) \mathbf{x}(kT + \tau - d_1, kT) + \dots + \\ & \varepsilon_1^{-1} \beta_l^2 \mathbf{x}^T(kT + \tau - d_l, kT) \mathbf{x}(kT + \tau - d_l, kT) + \\ & \varepsilon_1^{-1} \beta_0 \mathbf{x}^T(t) (\beta_1 \mathbf{x}(t-d_1) + \dots + \beta_l \mathbf{x}(t-d_l)) + \dots + \\ & \varepsilon_1^{-1} \beta_l \mathbf{x}^T(t-d_l) (\beta_1 \mathbf{x}(t-d_1) + \dots + \beta_l \mathbf{x}(t-d_l)) \end{aligned} \quad (16)$$

将状态反馈控制律 (4) 和状态方程 (1) 以及非线性扰动项应满足的最大上界式 (16) 代入不等式 (7), 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + \tau, kT) \\ \mathbf{x}(kT + \tau - d_1, kT) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(kT + \tau - d_l, kT) \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + \tau, kT) \\ \mathbf{x}(kT + \tau - d_1, kT) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(kT + \tau - d_l, kT) \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \text{其中, } \Psi = \begin{bmatrix} \Pi & P(A_1 + B_1 K) & \cdots & P(A_l + B_l K) \\ * & -S_1 + \varepsilon_1^{-1} \beta_1^2 I & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_l + \varepsilon_1^{-1} \beta_l^2 I \end{bmatrix}, \\ & \Pi = Q + K^T R K + \sum_{i=1}^l S_i + P(A + D F E_1 + (B + D F E_2) K) + (A + D F E_1 + (B + D F E_2) K)^T P + \\ & \varepsilon_1^{-1} \beta_0^2 I + \varepsilon_1 P^T P. \text{ 为了简化式 (17), 定义 } \Phi = \\ & \begin{bmatrix} \Omega & P(A_1 + B_1 K) & \cdots & P(A_l + B_l K) \\ * & -S_1 + \varepsilon_1^{-1} \beta_1^2 I & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_l + \varepsilon_1^{-1} \beta_l^2 I \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \Omega = \\ & Q + \sum_{i=1}^l S_i + P(A + B K) + (A + B K)^T P + \varepsilon_1^{-1} \beta_0^2 I + \varepsilon_1 P^T P. \\ & \text{令 } \tilde{P} = [P D \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \tilde{E} = [E_1 + E_2 K \ 0 \ \cdots \ 0], \text{ 从而, 可} \\ & \text{以将不等式 (17) 转化为} \end{aligned}$$

$$\Phi + \tilde{P} \tilde{E} \tilde{E}^T \tilde{P}^T < 0 \quad (18)$$

根据引理 2, 可知上述不等式 (18) 对所有不确定参量 $F(t)$ 成立的充要条件是当且仅当存在 $\varepsilon_2 > 0$, 使以下不等式

成立:

$$\Phi + \varepsilon_2 \tilde{P} \tilde{E} \tilde{E}^T \tilde{P}^T < 0 \quad (19)$$

根据 Schur 补定理, 式 (19) 可以转化为下述不等式:

$$\begin{bmatrix} \Sigma & P(A_1 + B_1 K) & \cdots & P(A_l + B_l K) \\ * & -S_1 + \varepsilon_1^{-1} \beta_1^2 I & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_l + \varepsilon_1^{-1} \beta_l^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

其中, $\Sigma = Q + K^T R K + \sum_{i=1}^l S_i + P(A + B K) + (A + B K)^T P + \varepsilon_2 P D D^T P + \varepsilon_1^{-1} \beta_0^2 I + \varepsilon_1 P^T P + \varepsilon_2^{-1} (E_1 + E_2 K)(E_1 + E_2 K)^T$.

将式 (20) 左右两边同乘变换矩阵 $\begin{bmatrix} P^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & P^{-1} & \end{bmatrix}$, $\omega_i = (S_i - \varepsilon_1^{-1} \beta_i^2 I)^{-1}$, $Z = KY$, 则根据 Schur 补定理, 可得式 (12). $\square$

3 鲁棒稳定性分析

引理 3^[14]. 优化问题 (5) 在 kT 时刻的任意可行解, 在 NT ($N > k$) 时刻仍是可行的.

根据定理 1 提出的鲁棒预测控制器设计方法, 可确定出 kT 时刻的控制律 K , 当 k 从 $0 \sim \infty$ 变化时, 得到分段连续的状态反馈矩阵序列, 由引理 3 可知, 采样时刻的可行解保证了优化问题的解始终可行, 将控制序列 $\{K_k\}_{k=0}^\infty$ 代入式 (1), 得到分段连续闭环系统表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (A + \Delta A + B K + \Delta B K) \mathbf{x}(t) + \\ & \sum_{i=1}^l (A_i + B_i K) \mathbf{x}(t-d_i) + \\ & \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d_1), \dots, \mathbf{x}(t-d_l)), \\ & t \in [kT, (k+1)T], k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

定理 2. 若优化问题 (9) 在初始时刻存在可行解, 则在定理 1 给出的控制律作用下而实现的状态反馈鲁棒预测控制使得闭环系统渐近稳定.

证明. 由连续的 Lyapunov-Krasovskii 函数式 (13) 可知, 在每一采样周期 $t \in [kT, (k+1)T]$ 内, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{C}^1$, 又由于 P_k 为定常正定矩阵, 所以 $\mathbf{x}^T(t) P_k \mathbf{x}(t) \in \mathbf{C}^1$, 对每一个 $i = 1, 2, \dots, l$, $\mathbf{x}^T(t) S_i \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d_i) S_i \mathbf{x}(t-d_i)$ 在每一采样周期内是连续的, 因此有:

$$\sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(kT + \xi) S_i \mathbf{x}(kT + \xi) d\xi \in \mathbf{C}^1, t \in [kT, (k+1)T] \quad (22)$$

于是, 可知 $V(\mathbf{x}(t), t)$ 是分段连续可微的. 在每一采样周期

$[kT, (k+1)T]$ 内, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t), t) = & \mathbf{x}^T(t)[(A + \Delta A)^T P_k + P_k(A + \Delta A) + \\ & K_k^T(B + \Delta B)^T P_k + P_k(B + \Delta B)K_k + \sum_{i=1}^l S_i]\mathbf{x}(t) + \\ & \sum_{i=1}^l \mathbf{x}^T(t - d_i)(A_i + B_i K_k)^T P_k \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \times \\ & \sum_{i=1}^l P_k(A_i + B_i K_k)\mathbf{x}(t - d_i) - \sum_{i=1}^l \mathbf{x}^T(t - d_i)S_i^k \mathbf{x}(t - d_i) + \\ & \mathbf{f}^T(t, \dots, \mathbf{x}(t - d_l))P_k \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)P_k \mathbf{f}(t, \dots, \mathbf{x}(t - d_l)) \end{aligned} \quad (23)$$

由定理 1 的证明可知, P_k 和 K_k 满足式 (23). 因此, 由式 (8) 和式 (23) 可得:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t), t) < -\mathbf{x}^T(t)(Q + K_k^T R K_k)\mathbf{x}(t) \quad (24)$$

由于矩阵 Q, R 为正定矩阵, 由式 (24) 可知, $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t), t)$ 是负定的. 由引理 3 可知:

$$\begin{aligned} \lim_{t \in (k+1)T-} V(\mathbf{x}(t), t) = & \mathbf{x}^T((k+1)T)P_k \mathbf{x}((k+1)T) + \\ & \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T((k+1)T + \xi)S_i^k \mathbf{x}((k+1)T + \xi)d\xi \geq \\ & \mathbf{x}^T((k+1)T)P_{k+1} \mathbf{x}((k+1)T) + \\ & \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T((k+1)T + \xi)S_i^{k+1} \mathbf{x}((k+1)T + \xi)d\xi \end{aligned} \quad (25)$$

式 (25) 对于所有 $k \geq 0$ 均成立. 对于每一个 i ($i = 1, \dots, l$), $\mathbf{x}^T(t + \xi)S_i \mathbf{x}(t + \xi)$ 是参变量 ξ 的连续函数, 其中 $\xi \in [-d, 0]$, $d = \min\{d_i\}$. 从而可知, 存在参变量 $\xi_0 \in [-d, 0]$ 使得 $\max \mathbf{x}^T(t + \xi)S_i \mathbf{x}(t + \xi) = \mathbf{x}^T(t + \xi_0)S_i^k \mathbf{x}(t + \xi_0)$, 假设 $\mathbf{x}^T(t + \xi_0)S_i^k \mathbf{x}(t + \xi_0) = \partial \mathbf{x}^T(t)S_i^k \mathbf{x}(t)$, $\partial > 0$, 则有:

$$\sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(t + \xi)S_i^k \mathbf{x}(t + \xi)d\xi \leq \sum_{i=1}^l \partial \mathbf{x}^T(t)S_i^k \mathbf{x}(t) \quad (26)$$

因此, 存在正定矩阵 P_k 满足下述不等式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)P_k \mathbf{x}(t) \leq & V(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{x}^T(t)P_k \mathbf{x}(t) + \\ & \sum_{i=1}^l \int_{-d_i}^0 \mathbf{x}^T(t + \xi)S_i^k \mathbf{x}(t + \xi)d\xi \leq \mathbf{x}^T(t) \times \\ & (P_k + \sum_{i=1}^l d_i \partial S_i^k)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (27)$$

由式 (22)、式 (24) 和式 (27) 可知, $V(\mathbf{x}(t), t)$ 既是一阶可微的又是严格单调递减. 根据 Lyapunov 稳定性理论闭环系统是渐近稳定的. $\square$

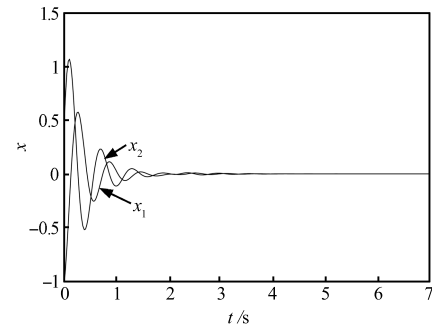
4 仿真实例

考虑一开环不稳定不确定时滞系统 (1), 采用如下参数形式 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} -0.02 & 0 \\ 0.08 & -0.07 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0.08 & 0.15 \\ 0.4 & 0.12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.07 \\ -0.15 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.01 \\ 0.06 & 0.04 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.04 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ E_2 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.12 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \sin x_1(t) & 0 \\ 0 & \cos x_2(t) \end{bmatrix}, \\ \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0.2, \quad \mathbf{f}(t) &= [\sin x_1(t - d_1)x_1(t) \quad \sin^2 x_2(t - d_2)x_2(t)]^T. \end{aligned}$$

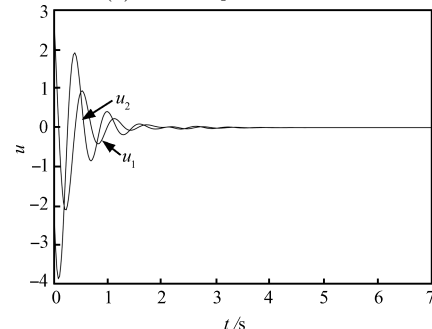
为了验证本文所提控制算法的有效性, 将本文算法与鲁棒控制算法进行对比研究. 仿真中, 取状态初始值 $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0.5$, 控制器参数取采样周期为 $T = 0.3$ s, 时滞分别取 $d_1 = 0.6$ 和 $d_2 = 1.2$, $R = 0.05$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 仿

真结果如图 1 和图 2 所示. 图 1 为基于状态反馈鲁棒控制算法的状态响应曲线和控制作用曲线, 图 2 为基于状态反馈鲁棒预测控制算法的状态响应曲线和控制曲线. 从仿真结果中可以看到, 采用一般鲁棒控制算法处理带有非线性扰动的多重时滞系统时, 由于该方法仅仅通过求解一组保证系统 Lyapunov 意义下稳定的线性矩阵不等式而没有进行优化求解控制输入, 使得系统状态和控制作用出现了振荡和超调现象, 且收敛速度较慢, 而本文所提出的鲁棒预测控制算法采用滚动优化来求解控制输入, 使得系统状态平滑的趋于稳定, 具有较快的收敛速度, 并且较好地抑制了非线性扰动, 这对要求严格限制振荡和超调的过程来说, 其优越性显得尤为明显.



(a) 系统状态响应曲线

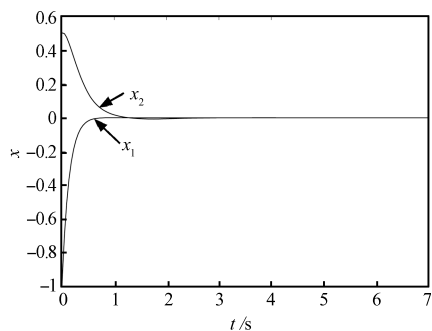
(a) State response curves



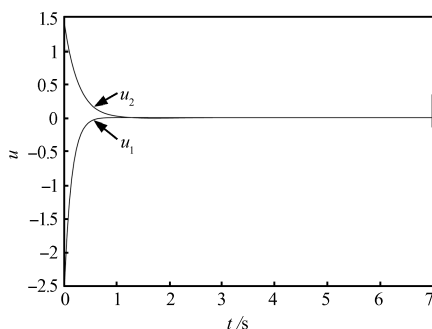
(b) 控制输入曲线

(b) Control inputs curves

图 1 基于状态反馈鲁棒控制算法的仿真结果
Fig. 1 Simulation results of robust control based state feedback



(a) 系统状态响应曲线
(a) State response curves

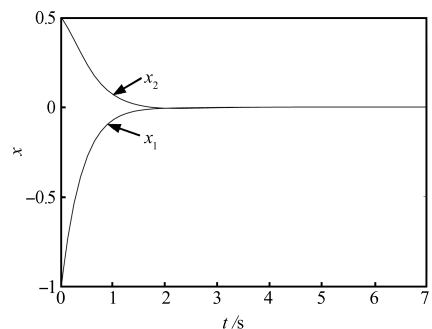


(b) 控制输入曲线
(b) Control inputs curves

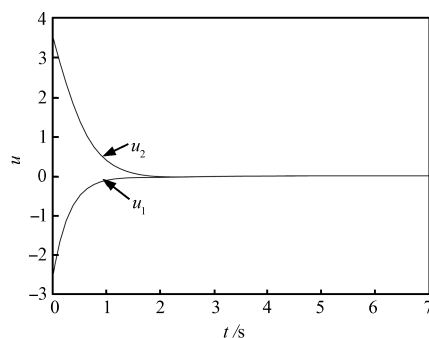
图 2 基于状态反馈鲁棒预测控制算法的仿真结果

Fig. 2 Simulation results of robust predictive control based state feedback

为了进一步验证本文算法对非线性扰动的抑制能力, 将被控过程中的非线性扰动项变为 $f(t) = [\sin x_1(t - d_1)x_1(t) \cos^2 x_2(t - d_2)x_2(t)]^T$, 控制器参数保持不变, 仿真结果如图 3 所示. 从图中可以看出, 在被控过程非线性扰动发生变化时, 采用本文控制方法, 系统的状态量和控制量仍然能够较平滑的趋于稳定, 且具有较快的动态响应, 获得了较好的综合控制性能. 仿真结果表明, 本文基于 LMI 方法设计的鲁棒预测控制算法, 采用滚动优化思想, 即在每一采样时刻优化实施控制作用, 计算量有所增加, 但可以有效地处理时滞和参数不确定性问题, 当系统存在非线性扰动时, 闭环系统渐近稳定, 且具有较快的动态响应, 从而说明本文所提出的鲁棒预测控制算法是可行的、有效的.



(a) 系统状态响应曲线
(a) State response curves



(b) 控制输入曲线
(b) Control inputs curves

图 3 非线性扰动变化时, 鲁棒预测控制算法的仿真结果

Fig. 3 Simulation results of robust predictive control when nonlinear disturbance changes

5 结论

本文提出了一类具有非线性扰动且同时存在多重时滞的不确定系统鲁棒预测控制算法, 运用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法, 将无限时域二次性能指标优化问题转化为具有 LMI 约束的线性目标最小化问题, 同时对范数有界非线性扰动项的最大上界在线实时优化, 证明了闭环系统在具有多重时滞且存在非线性扰动时, 是渐近稳定的.

References

- 1 Cannon M. Efficient nonlinear model predictive control algorithms. *Annual Reviews in Control*, 2007, **28**(2): 229–237
- 2 Adetola V, Guay M. Integration of real-time optimization and model predictive control. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(2): 125–133
- 3 Yang Guo-Shi, He De-Feng, Xue Mei-Sheng. Nonlinear predictive control based on robust control Lyapunov function. *Control and Decision*, 2010, **25**(11): 1752–1756
(杨国诗, 何德峰, 薛美盛. 基于鲁棒控制 Lyapunov 函数的非线性预测控制. *控制与决策*, 2010, **25**(11): 1752–1756)
- 4 Ding B C, Xi Y G, Li S Y. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. *Automatica*, 2004, **40**(1): 163–167
- 5 Li D W, Xi Y G. Constrained feedback robust model predictive control for polytopic uncertain systems with time delays. *International Journal of Systems Science*, 2011, **42**(10): 1651–1660
- 6 Jeong S C, Park P G. Constrained MPC algorithm for uncertain time-varying systems with state-delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(2): 257–263
- 7 Chisci L, Rossiter J A, Zappa G. Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. *Automatica*, 2001, **37**(7): 1019–1028
- 8 Sokaert P Q M, Mayne D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(8): 1136–1142
- 9 Mayne D Q, Seron M M, Raković S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 2005, **41**(2): 219–224

- 10 He De-Feng, Ji Hai-Bo, Zheng Tao. Nonlinear H_∞ robust predictive control with bounded persistent disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 215–219
(何德峰, 季海波, 郑涛. 持续有界扰动下的非线性 H_∞ 鲁棒预测控制. 自动化学报, 2008, **34**(2): 215–219)
- 11 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31–37
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31–37)
- 12 Liu Xiao-Hua, Wang Li-Jie. Robust predictive control of uncertain singular systems with both state and input delays. *Control Theory & Applications*, 2010, **27**(4): 527–532
(刘晓华, 王利杰. 带有状态和输入时滞的不确定广义系统的鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2010, **27**(4): 527–532)
- 13 Li X, De Souza C E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. *Automatica*, 1997, **33**(9): 1657–1662
- 14 Zhang L Q, Huang B. Robust model predictive control of singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(6): 1000–1006

苏成利 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院副教授. 主要研究方向为预测控制, 智能控制, 工业过程的先进控制. 本文通信作者.

E-mail: suchengli@lnpu.edu.cn

(SU Cheng-Li Associate professor at the School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University. His research interest covers predictive control, intelligent control, advanced process control. Corresponding author of this paper.)

赵家程 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院硕士研究生. 主要研究方向为预测控制, 鲁棒控制. E-mail: zjiachengcn@126.com

(ZHAO Jia-Cheng Master student at the School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University. His research interest covers predictive control and robust control.)

李平 辽宁石油化工大学信息与控制工程学院教授. 主要研究方向为工业过程的先进控制与优化. E-mail: liping@lnpu.edu.cn

(LI Ping Professor at the School of Information and Control Engineering, Liaoning Shihua University. His research interest covers advanced process control and optimization.)