

求解含复杂约束非线性最优控制 问题的改进 Gauss 伪谱法

孙勇^{1,2} 张卯瑞¹ 梁晓玲¹

摘要 针对含有复杂约束条件的非线性最优控制问题, 提出了一种改进的 Gauss 伪谱法 (Improved Gauss pseudospectral method, IGPM). 这类问题难以得到解析解, 特别是有些问题不存在解析的模型, 一些参数只能通过查表得到, 使得传统方法难以求解. 在传统的 Gauss 伪谱法的基础上, 将非线性的终端状态积分约束等价地转化为线性形式, 提出了 IGPM, 通过协态映射定理可以计算出协态变量, 检验最优性, 使得 IGPM 具有间接法一样的精度. 并且给出了初始时刻协态变量和端点时刻控制变量的计算方法. 为了提高解的精度, 基于 IGPM 提出了迭代算法, 最后将该算法应用于求解高超声速飞行器上升段轨迹优化问题, 结果表明最优轨迹基本满足路径约束条件和最优性条件.

关键词 非线性最优控制, 改进的 Gauss 伪谱法, 协态映射, 路径约束
引用格式 孙勇, 张卯瑞, 梁晓玲. 求解含复杂约束非线性最优控制问题的改进 Gauss 伪谱法. 自动化学报, 2013, 39(5): 672–678

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00672

Improved Gauss Pseudospectral Method for Solving Nonlinear Optimal Control Problem with Complex Constraints

SUN Yong^{1,2} ZHANG Mao-Rui¹ LIANG Xiao-Ling¹

Abstract An improved Gauss pseudospectral method (IGPM) is proposed to solve the nonlinear optimal control problem with complex constraints, which is difficult to get the analytical solution. Traditional methods can hardly solve these problems by getting some parameter values from the look-up table. Based on the traditional Gauss pseudospectral method, the IGPM is put forward by transforming the nonlinear final state integral constraints into linear type. The costate obtained by the costate mapping theorem is used to check the optimality, which makes the IGPM have the same accuracy with the indirect method. Besides, the computation methods of the initial costate and the boundaries controls are proposed. In order to increase the accuracy, an iterative algorithm is given based on the IGPM. Finally, the ascent trajectory optimization problem of the hypersonic vehicle is solved by the proposed algorithm. The results show that the optimal trajectory almost satisfies the path constraints and the optimality.

Key words Nonlinear optimal control, improved Gauss pseudospectral method (IGPM), costate mapping, path constraints

Citation Sun Yong, Zhang Mao-Rui, Liang Xiao-Ling. Improved Gauss pseudospectral method for solving nonlinear optimal control problem with complex constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 672–678

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-08-31

Manuscript received May 15, 2012; accepted August 31, 2012

国家自然科学基金 (61021002) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61021002)

本文客座编委 王宏

Recommended by Guest Editor WANG Hong

1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001 2. 南京电子技术研究所 南京 210039

1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001 2. Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210039

实际工程中的许多轨迹优化问题, 例如编队飞行、航天器轨迹优化、机器人路径优化等问题, 都可以表示为非线性最优控制问题, 并且包含复杂的路径约束条件, 求解这类问题比较困难. 20 世纪, Bellman 的动态规划和 Pontryagin 的极大值原理为解决含有简单约束的最优控制问题提供了途径, 计算机性能的提高使轨迹优化方法逐步向数值计算方向转变. 文献 [1] 系统地轨迹优化进行了综述, 指出轨迹优化方法主要包括间接法和直接法.

间接法是根据极大值原理或动态规划得到最优性的一阶必要条件, 然后, 用数值方法求解, 得到最优控制和轨迹^[2-3]. 文献 [4] 提出了沿次优弹道的分段打靶法, 求解等价系统的两点边值问题 (Two-point boundary value problem, TPBVP) 后, 可得原问题的最优解. 文献 [5] 采用间接法求解高超声速飞行器最优上升轨迹, 为求解两点边值问题, 以近似解作初值, 应用改进的牛顿法和有限差分法计算最优轨迹. 间接法的优点是解的精度高, 满足最优性的一阶必要条件; 缺点是收敛域很小, 对初值估计要求高, 且难以估计协态变量初值; 而且需要求解状态方程和协态方程, 增加了计算量; 算法鲁棒性较差; 对于复杂的系统, 推导一阶必要条件特别困难; 对含有路径约束的问题, 无法事先知道路径约束被激励的时刻, 因此, 间接法难以实际应用.

直接法是将原最优控制问题转化为非线性规划问题, 然后, 采用非线性规划算法求解, 由于不需要推导一阶必要条件, 所以应用方便. 直接法根据离散化变量的不同, 主要可以分为只离散控制变量、只离散状态变量和同时离散控制变量和状态变量三类. 第一类方法由于需要进行数值积分, 计算量较大^[6], 这种算法的代表是打靶法和多段打靶法; 第二类方法是微分包含法^[7], 它只离散状态变量, 将控制约束转化为状态约束, 可以降低变量个数, 但是对于非线性比较复杂的状态方程, 难以求出控制变量关于状态的显式表达式; 第三类方法, 同时将状态变量和控制变量进行离散化^[8], 微分方程转化为代数约束条件, 这一类算法收敛速度较快, 并且收敛半径大, 是目前实现在线轨迹优化的主要研究方向.

文献 [9] 对非线性最优控制导出的 Hamiltonian 系统两点边值问题, 提出一种以离散区段右端状态和左端协态为混合独立变量的数值求解方法, 将非线性 Hamiltonian 系统两点边值问题的求解通过混合独立变量变分原理转化为非线性方程组求解, 通过实例给出了该方法在航天领域的应用, 但是该方法没有考虑实际问题中的复杂约束条件. 伪谱法在近十年来得到了深入研究, 并且取得了很好的理论成果, 在机器人、高超声速飞行器、卫星等领域得到了广泛应用^[10-13]. 首先, 将状态变量和控制变量表示成 Lagrange 多项式的线性组合形式, 然后, 微分方程约束可以转化为代数方程约束, 其次转化为非线性规划问题, 最后, 采用非线性规划算法求解. 伪谱法主要包括 Gauss 伪谱法^[11-12, 14], Radau 伪谱法^[15-16] 和 Legendre 伪谱法^[8, 10], 它们的区别在于离散点的选取不同, 例如 Gauss 伪谱法中的离散点为 Legendre 多项式的零点, 而 Legendre 伪谱法中的离散点为 Legendre 多项式的驻点.

高超声速飞行器能够在临近空间飞行, 具有阻力小、可重复使用和全球快速到达等特点. 由于高超声速飞行器飞行特性复杂, 具有快时变、强耦合、强非线性和强不确定性等特点, 给制导和控制系统的设计带来了许多困难. 由于高超声速飞行器气动特性非常复杂, 气动力与发动机推力存在强耦合作用, 因此, 气动系数模型也难以采用解析形式表达, 对于已知的实验数据, 只有通过查表的方式得到相应的气动数

据, 这对高超声速飞行器的轨迹优化问题的求解提出了更高的要求. 文献 [17] 以火箭发动机为动力的可重复使用飞行器为研究对象, 采用间接法对上升段最优轨迹优化问题进行了求解. 文献 [18] 对含有复杂约束的高超声速飞行器上升段轨迹的快速生成问题进行了深入探讨, 以燃料最省为优化指标, 求得了上升段的最优轨迹. 文献 [5] 在零侧滑角和力矩瞬间平衡假设下, 对上升段飞行问题进行最优建模, 以最省燃料为指标, 以推力方向为控制量, 得到最优轨迹. 上述这些方法都需要建立解析的数学模型, 并且对于含有复杂路径约束的轨迹优化问题, 需要多次调试初值, 收敛速度慢, 难以在线应用.

传统的 Gauss 伪谱法中, 采用 Gauss 积分公式推导的终端状态变量约束是非线性的, 并且协态变量的计算与 Legendre 伪谱法的计算方法不统一. 本文基于 Gauss 伪谱法的思想, 将非线性的终端状态约束等价地转化为线性约束, 得到了简单的协态变量计算公式, 从而提出了改进的 Gauss 伪谱法 (Improved Gauss pseudospectral method, IGPM), 并提出了一种基于 IGPM 的迭代算法. 本文主要分为如下 5 个部分: 前言, 综述非线性最优控制问题求解方法的研究现状; 第 1 节介绍 IGPM, 并给出新的协态映射定理; 第 2 节提出了初始时刻协态变量和端点时刻控制变量的计算方法, 并且提出了一种基于 IGPM 的迭代算法; 第 3 节提出含有复杂约束的高超声速飞行器上升段轨迹优化问题; 第 4 节将所提出的算法应用于轨迹优化问题, 并将上升段轨迹进行了分类; 第 5 节总结全文.

1 改进的 Gauss 伪谱法

1.1 Bolza 问题

下面讨论一般的非线性最优控制问题的标准形式, 即 Bolza 问题.

已知一般的非线性系统状态方程如下式所示:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, 边界条件为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (2)$$

路径约束为

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3)$$

考虑上面的一般非线性系统, Bolza 问题可描述为: 在满足状态方程 (1)、边界约束 (2) 和路径约束 (3) 的条件下, 求解控制变量 \mathbf{u} , 使得性能指标式 (4) 达到极小:

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4)$$

其中, t_0 是初始时刻, 终端时刻 t_f 可以是固定的, 也可以是自由的.

上述 Bolza 问题的时间取值范围为 $[t_0, t_f]$, 但是伪谱法的离散点分布在区间 $[-1, 1]$, 因此, 首先把上述 Bolza 问题转化到时间定义在区间 $[-1, 1]$ 上的标准最优控制问题. 通过引入一个新的时间变量 τ 和时间变换:

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad (5)$$

将式 (5) 代入到式 (1)~(4) 中, $[\tau_0, \tau_f] = [-1, 1]$, Bolza 问题转化为适合于伪谱法的标准 Bolza 问题 (记为: 问题 \mathcal{B}):

$$\min J = \Phi(\mathbf{x}(\tau_0), t_0, \mathbf{x}(\tau_f), t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) d\tau \quad (6a)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) \quad (6b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}(\tau_0), t_0, \mathbf{x}(\tau_f), t_f) = 0 \quad (6c)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq 0, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f] \quad (6d)$$

下面给出问题 \mathcal{B} 的求解方法.

1.2 状态和控制变量离散

伪谱法是将状态变量和控制变量在 Gauss 离散点上进行离散化, 这些离散点是 Legendre 多项式的零点, N 次 Legendre 多项式 $P_N(\tau)$ 有 N 个离散点, 位于开区间 $(-1, 1)$ 内, 记为 $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$, 称为 LG 配点 (Collocations). 由于实际问题中存在边界约束, 需要引入初始状态变量和终端状态变量, 因此, 加上初始时刻和终端时刻, 与 LG 配点一起构成 Gauss 伪谱法的 LG 节点 (Nodes), 因此, Gauss 伪谱法中的 LG 节点一共有 $N+2$ 个, 即: $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_{N+1}\}$, 其中, $\tau_0 = -1, \tau_{N+1} = \tau_f = 1$ 为两个端点时刻.

为了方便, 记:

$$g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) = g_k \quad (7a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) = \mathbf{f}_k \quad (7b)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) = \mathbf{C}_k \quad (7c)$$

$$k = 0, 1, \dots, N$$

在 IGPM 中, 未知的变量包括状态变量、控制变量和未知参数, 未知参数属于静态变量, 将状态变量在前 $N+1$ 个 LG 节点上进行 Lagrange 插值近似, 可得:

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) \mathbf{X}_i \quad (8)$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (9)$$

控制变量在区间 $(-1, 1)$ 中的 LG 点离散化, 即:

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^N \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}(\tau_i) = \sum_{i=1}^N \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}_i \quad (10)$$

$$\tilde{L}_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (11)$$

终端时刻的控制变量通过其他方法计算, 或者通过曲线延拓得到. 基于上述状态和控制变量的离散化结果, 下面对状态的微分和函数积分进行计算.

为了将标准的 Bolza 问题转化为非线性规划问题 (Non-linear programming, NLP), 需要把状态方程中的状态变量的导数进行离散化, 对式 (8) 进行求导, 并令 $\tau = \tau_k$, 可得:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_k) \mathbf{X}_i = \sum_{i=0}^N D_{k,i} \mathbf{X}_i \quad (12)$$

$$D_{k,i} = \dot{L}_i(\tau_k) \quad (13)$$

其中, $i = 0, 1, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N, D$ 是一个 $N \times (N+1)$ 的矩阵, 称为状态微分矩阵. 那么状态方程式 (8) 可以由下面的约束条件代替:

$$\sum_{i=0}^N D_{k,i} \mathbf{X}_i = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

因此, 微分方程动态约束转化为代数约束, 并且状态微分矩阵 D 可以事先计算出来.

根据 Gauss 积分公式, 终端状态可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_f &= \mathbf{X}_{N+1} = \\ & \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau; t_0, t_f) d\tau \approx \\ & \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{f}_k \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $w_k, k = 1, 2, \dots, N$ 是 Gauss 积分权重系数, 通过下式计算:

$$w_k = \frac{2}{(1 - \tau_k^2)(\dot{P}_N(\tau_k))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

式 (15) 用来计算终端状态变量, 构成了 NLP 的一个终端状态积分约束条件, 式 (15) 是非线性约束, 如果能够将其转化为线性约束, 将减少非线性约束的数量, 有利于 NLP 的求解, 转化形式由以下引理给出.

引理 1. 约束条件式 (15) 与下式等价:

$$\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0 - \sum_{i=0}^N \mathbf{X}_i \sum_{k=1}^N w_k D_{k,i} = 0 \quad (17)$$

证明. 将式 (14) 代入到式 (15), 得:

$$0 = \mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0 - \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k \mathbf{f}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f) =$$

$$\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0 - \sum_{k=1}^N w_k \sum_{i=0}^N D_{k,i} \mathbf{X}_i =$$

$$\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0 - \sum_{i=0}^N \mathbf{X}_i \sum_{k=1}^N w_k D_{k,i}$$

因此, 式 (15) 与式 (17) 等价. \square

结合前面的离散化结果, 原最优控制问题 \mathcal{B} 可以转化为离散形式的 NLP, 记为问题 \mathcal{B}^N :

$$\min J = \Phi(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N w_k g_k \quad (18a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^N D_{k,i} \mathbf{X}_i - \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}_k = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (18b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}_0, t_0, \mathbf{X}_f, t_f) = 0 \quad (18c)$$

$$\mathbf{C}_k \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (18d)$$

$$\mathbf{X}_f - \mathbf{X}_0 - \sum_{i=0}^N \mathbf{X}_i \sum_{k=1}^N w_k D_{k,i} = 0 \quad (18e)$$

问题 \mathcal{B}^N 是一般的 NLP, 可以通过非线性规划算法进行求解, 例如序列二次规划方法 (Sequential quadratic programming, SQP), 可以通过著名的软件包 SNOPT 来计算, 这就是改进的 Gauss 伪谱法 (IGPM).

上述问题中未知变量包括三部分: 1) 状态变量: $X_i, i = 0, 1, \dots, N+1$; 2) 控制变量: $U_i, i = 1, 2, \dots, N$; 3) 参数变量: t_0, t_f . 问题 \mathcal{B}^N 与文献 [11] 中的终端状态积分约束为式 (15), 属于非线性约束, 本文中采用的终端状态积分约束为式 (17), 属于线性约束, 相当于把 n 个非线性约束条件转化为了 n 个线性约束条件.

通过求解问题 \mathcal{B}^N , 可以得到最优控制问题 \mathcal{B} 的近似最优解, 为了检验 \mathcal{B}^N 的解的最优性, 下面给出协态映射定理.

1.3 协态变量计算

为了检验问题 \mathcal{B}^N 的最优解是否也是问题 \mathcal{B} 的最优解, 需要计算协态变量, 在 IGPM 中, 将协态变量在 LG 点上离散化, 可得:

$$\lambda(\tau) \approx \Lambda(\tau) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i^*(\tau) \Lambda(\tau_i) = \sum_{i=1}^{N+1} L_i^*(\tau) \Lambda_i \quad (19)$$

$$L_i^*(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (20)$$

为了计算协态变量 $\Lambda_i, i = 0, 1, \dots, N+1$, 下面给出 IGPM 的新的协态映射定理^[14], 则可以从求解 NLP 问题 \mathcal{B}^N 的 Lagrange 乘子中直接计算出协态变量.

定理 1 (协态映射定理). 采用 IGPM 求解含有路径约束的非线性最优控制问题 \mathcal{B} 时, 协态变量与问题 \mathcal{B}^N 的 Lagrange 乘子有如下关系:

$$\mathbf{A}_k = \frac{\bar{\Lambda}_k}{w_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (21a)$$

$$\mathbf{A}_0 = \bar{\Lambda}_0 \quad (21b)$$

$$\mathbf{A}_F = \bar{\Lambda}_F \quad (21c)$$

其中, $\mathbf{A}_k, k = 1, 2, \dots, N, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_F$ 是问题 \mathcal{B} 的协态变量在 LG 点上的值; $\bar{\Lambda}_k, k = 1, 2, \dots, N, \bar{\Lambda}_0, \bar{\Lambda}_F$ 是问题 \mathcal{B}^N 的 Lagrange 乘子.

定理 1 表明本文所提出的 IGPM 不仅能够得到状态变量和控制变量, 而且还能通过协态映射定理直接计算出协态变量, 使得 IGPM 具有间接法的优点, 解的精度高, 而且能够检验所得解的最优性.

采用 IGPM 求解最优控制问题, 同时可以得到协态信息, 克服了原来直接法无法计算协态变量的缺点. 协态映射定理给出了协态变量和 Lagrange 乘子的映射关系, 比文献 [11] 中给出的映射关系更为简单, 与 Radau 伪谱法和 Legendre 伪谱法的协态映射关系具有相统一的形式. 本文将原来的非线性终端状态积分约束转化为线性终端状态积分约束, 使得转化后的 NLP 更易于求解, 因此, 本文提出的 IGPM 具有更好的应用前景.

2 其他变量计算和迭代算法

2.1 初始协态变量计算

由式 (20) 可见, 协态变量只在后 $N+1$ 个离散点上离散化, 即只在 $\tau_1, \dots, \tau_{N+1}$ 这些点上离散化, $\bar{\Lambda}_i, i = 1, \dots, N+1$ 可以直接通过求解 NLP 得到, 在 τ_0 时刻的

初始协态 $\bar{\Lambda}_0$ 则需要根据必要条件计算一个偏导数, 比较复杂, 因此, 为了简化计算 $\bar{\Lambda}_0$, 下面给出一个简单算法.

定理 2. 初始时刻的协态变量 $\bar{\Lambda}_0$ 可以表示为其他 LG 点上协态变量线性组合的形式, 即:

$$\bar{\Lambda}_0 = \begin{cases} -\bar{\Lambda}_F - \sum_{i=1}^N \bar{\Lambda}_i D_{i,0}, & \text{当 } N \text{ 是奇数时} \\ \bar{\Lambda}_F - \sum_{i=1}^N \bar{\Lambda}_i D_{i,0}, & \text{当 } N \text{ 是偶数时} \end{cases} \quad (22)$$

其中, $D_{i,0}$ 表示微分矩阵 D 的第一列的第 i 个元素.

根据矩阵 D 的特点易证定理 2, 在此不再赘述. 因此, 可以通过式 (22) 直接计算出初始时刻的协态变量, 不需要推导复杂的偏导数表达式.

2.2 端点时刻控制变量计算

在 IGPM 中, 控制变量只在中间 N 个 LG 点上离散化, 初始时刻控制 U_0 和终端时刻的控制 U_{N+1} 的值并没有计算, 因此, 需要对这两个点的值进行求解.

对于等间距插值, 在端点附近会出现严重的波动现象, 造成插值函数与原函数之间的逼近精度很差, 而 LG 点的分布特点是中间稀疏、两端稠密, 大量实践经验表明, 在 LG 点进行插值, 插值函数一般不会出现严重的波动现象, 并且精度很高. 因此, 可以认为端点处的控制变量值不会出现较大的波动, 那么初始时刻控制可以通过式 (10) 延拓得到, 即:

$$\mathbf{u}(\tau_0) \approx \mathbf{U}(\tau_0) = \sum_{i=1}^N \tilde{L}_i(\tau_0) \mathbf{U}(\tau_i) \quad (23)$$

或者采用线性插值计算, 如下式所示:

$$\mathbf{u}(\tau_0) \approx \mathbf{U}(\tau_0) = \frac{\tau_0 - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) + \mathbf{U}_1 \quad (24)$$

同理, 终端时刻的控制也可以用同样的方法得到. 该方法简单、易于计算, 虽然不能保证取得最优控制, 但是可以作为最优控制的一种近似, 这种近似对最优轨迹的影响可以通过将该控制作用于系统, 把得到真实的系统状态与 IGPM 得到的最优状态相对比, 如果二者相差满足误差要求, 则可以认为该控制是最优控制, 所得的状态也是最优轨迹. 因此, 为了检验最优控制和最优状态满足状态方程的精度以及解的最优性条件, 下面给出一种基于 IGPM 的迭代算法.

2.3 迭代算法

根据 IGPM 的实际仿真结果发现, 采用简单的线性插值方法给出的初值, 虽然 IGPM 具有较高的收敛速度, 但是很多情况下并没有收敛到最优解, 并且约束条件也没有得到很好的满足, 当 N 较大时, 仍然很难得到满足条件的最优解, 因此, 为了提高解的收敛精度, 基于 IGPM 提出一种迭代算法, 进而提高解的精度.

算法 1 (基于 IGPM 的迭代算法).

1) 选择离散点个数 N_1 , 一般第一次取较小的值.

2) 采用 IGPM 进行求解.

3) 将所得的控制变量代入系统进行仿真.

4) 检验终端状态约束、路径约束和 Hamiltonian 函数值, 如果约束条件满足允许相对误差条件, 并且 Hamiltonian 函数值接近于 0 或者某一常数, 则终止计算; 否则, 进行下一步.

5) 增加 $N_i, N_{i+1} = N_i + \delta_N$, 其中, $\delta_N \geq 1$ 是常数.

6) 将系统仿真的结果, 包括控制变量、状态变量和系统参数作为下一次计算的初始值, 执行第 2) 步。

该算法首先选择一个较小的离散点个数 N_1 , 此时计算量小, 可以快速计算出一个解, 为下一次优化计算提供初值, 直到所得的解对应的约束条件满足给定的误差要求。

3 高超声速飞行器上升段轨迹优化问题

高超声速飞行器上升段轨迹优化在高超声速飞行器整个轨迹设计中十分重要, 因为高超声速飞行器上升段发动机处于工作状态, 并且气动系数受到多种因素的影响, 路径约束条件复杂, 特别是对于气动系数难以建模的情形, 目前难以采用传统的计算方法快速求解。下面将本文所提出的基于 IGPM 的迭代算法应用于求解该问题。

3.1 动态链接库

飞行器相关数据是封装的动态链接库, 首先, 对该飞行器的气动特性等性能进行了分析, 特别是由于高超声速飞行器超燃冲压发动机的存在, 使得该飞行器的气动系数模型非常复杂, 难以建立多变量的气动系数模型, 例如升力系数不仅受到攻角和速度的影响, 而且与燃油当量比也有密切关系, 鉴于数据的重要性, 具体的数据分析成果在此不予以给出。因此, 在轨迹优化计算中, 直接调用该动态链接库, 以查表的方式, 获得该高超声速飞行器的相关气动数据, 并用于轨迹优化的计算过程。动态链接库的输入输出关系, 如图 1 所示。

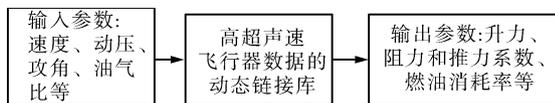


图 1 高超声速飞行器气动模型的输入输出关系

Fig.1 Relationship between the input and the output of the hypersonic vehicle

从目前发表的文献可知, 伪谱法只是用于存在精确解析模型的轨迹优化问题, 对于以表格形式给出的数据, 需要首先建立近似的解析模型, 然后, 基于解析模型进行轨迹优化, 如果难以建立准确的解析模型, 那么求解非线性规划问题时, 需要计算差分得到梯度信息, 计算效率有所降低。本文直接在动态链接库的基础上, 采用 IGPM 进行高超声速飞行器上升段的轨迹优化。

3.2 受力计算

飞行器在上升阶段的受力主要包括重力、升力、阻力和推力, 其中, 重力不能调节, 升力、阻力和推力可以通过控制变量进行调节, 从而完成爬升过程。升力 L 、阻力 D 和推力 P_T 可以通过下式计算:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (25)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (26)$$

$$P_T = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_T \quad (27)$$

其中, ρ 是大气层空气密度 (kg/m^3); S 是高超声速飞行器参考面积 (m^2); C_L, C_D, C_T 分别是升力、阻力和推力系数, 均是攻角、速度、油气比的函数, 详细的解析表达式难以得到, 但是具体的数值可以通过动态链接库查表得到。

3.3 运动方程及问题描述

高超声速飞行器上升段的轨迹优化一般只考虑竖直平面内的运动情形, 状态变量为: $\mathbf{x} = [x_h, x_r, V, \gamma, m]^T$, 分别表示高度、航程、速度、航迹角和质量; 控制变量为: $\mathbf{u} = [\alpha, F_u]^T$, 分别表示攻角和油气比。下面首先给出高超声速飞行器上升段的竖直平面运动方程:

$$\dot{x}_h = V \sin \gamma \quad (28a)$$

$$\dot{x}_r = V \cos \gamma \cos \psi \quad (28b)$$

$$\dot{V} = \frac{P_T \cos \alpha - D}{m} - g_0 \sin \gamma \quad (28c)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{P_T \sin \alpha + L}{mV} - \frac{g_0 \cos \gamma}{V} \quad (28d)$$

$$\dot{m} = -F_{ur} \quad (28e)$$

其中, F_{ur} 是燃油消耗率 (kg/s), 它是攻角、速度、油气比等因素的函数, 可以从动态链接库中查表得到。

高超声速飞行器上升段的路径约束条件主要考虑动压约束, 即:

$$P_{d\min} \leq 0.5\rho V^2 \leq P_{d\max} \quad (29)$$

控制变量攻角、油气比要满足边界约束条件:

$$\alpha_l \leq \alpha \leq \alpha_u \quad (30)$$

$$F_{u,l} \leq F_u \leq F_{u,u} \quad (31)$$

高超声速飞行器上升段轨迹优化问题需要满足初始条件和终端条件:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (32)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (33)$$

上升段的轨迹优化问题中最重要的是节约燃料消耗, 即希望在上升结束时刻的剩余质量最大, 因此, 性能指标为

$$\min J = -m(t_f) \quad (34)$$

因此, 竖直平面内的高超声速飞行器上升段轨迹优化问题为: 在满足上述运动方程 (28) 和约束条件 (29)~(33) 下, 求解最优控制及相应的最优轨迹, 使得性能指标 (34) 达到最小。

4 轨迹分类及优化结果

4.1 上升段轨迹类型

根据速度与高度的变化关系, 高超声速飞行器上升段轨迹总体上可以分为先上升后加速和先加速后上升两大类, 所有的上升段轨迹都必须满足动压路径约束条件。该动压约束存在最大值和最小值, 如式 (29) 所示, 由于密度是高度的函数, 那么式 (29) 可以表示为

$$P_{d\min} \leq 0.5\rho(h)V^2 \leq P_{d\max} \quad (35)$$

那么

$$\sqrt{\frac{2P_{d\min}}{\rho(h)}} \leq V \leq \sqrt{\frac{2P_{d\max}}{\rho(h)}} \quad (36)$$

由式 (36) 可以确定出两条上升段轨迹的速度-高度曲线的边界, 那么所有满足动压约束的上升段轨迹都必须处于这两条边界内, 两种典型的上升段轨迹如图 2 所示:

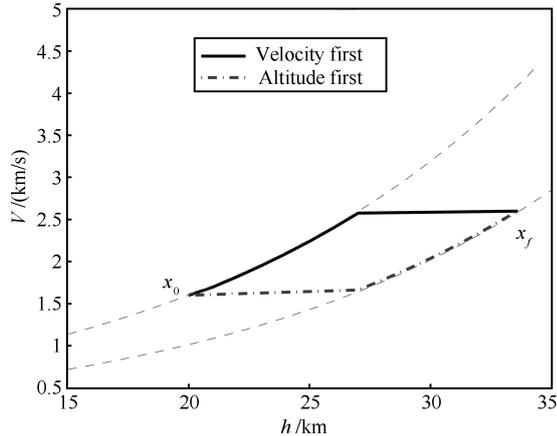


图 2 高超声速飞行器上升段的两种典型轨迹

Fig.2 Two typical ascent trajectories of the hypersonic vehicle

图 2 中的虚线表示动压约束所确定的边界; 实线表示先加速后上升的轨迹, 即速度优先的上升轨迹; 点划线表示先上升后加速的轨迹, 即高度优先的上升轨迹; 这两条轨迹是高超声速飞行器上升段轨迹的典型轨迹. 实际的仿真结果表明, 很难得到与上述两种典型轨迹完全重合的轨迹, 但是这可以作为区分速度优先还是高度优先的准则.

4.2 优化结果

采用上述给出的算法 1, 对高超声速飞行器上升段轨迹优化问题进行求解. 问题的初始状态和终端状态分别为

$$\begin{aligned}
 x_h(t_0) &= h_0, x_r(t_0) = x_{r0}, V(t_0) = V_0 \\
 \gamma(t_0) &= \gamma_0, m(t_0) = m_0 \\
 x_h(t_f) &= h_f, V(t_f) = V_f, \gamma(t_f) = \gamma_f
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

采用上面基于 IGPM 的算法 1, 求解轨迹优化问题, 得到最优控制和最优轨迹, 如图 3~图 5 所示.

需要说明的是, 所得到的最优轨迹等变量进行了数据标准化处理, 虽然图中给出了单位, 但是不能按照图中所标数值进行理解.

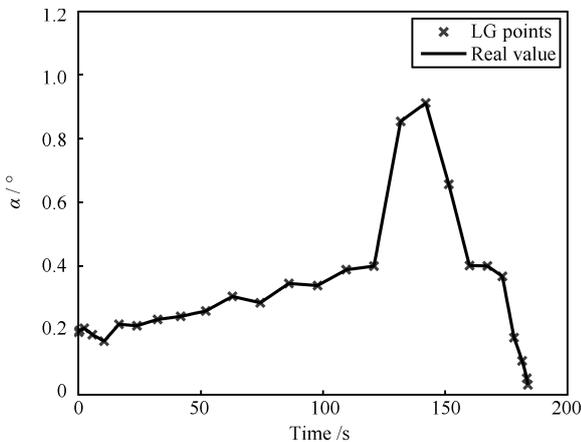


图 3 攻角

Fig.3 Attacking angle

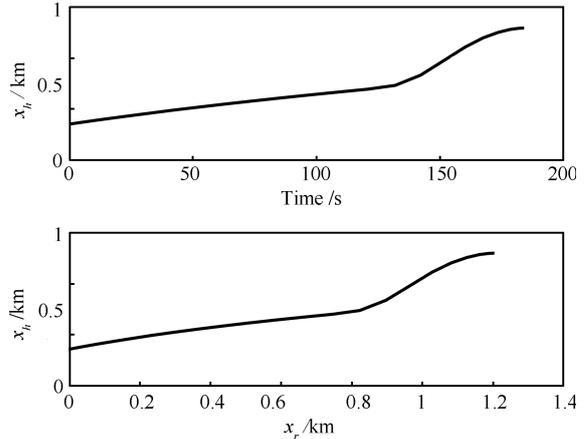


图 4 高度和时间、航程之间的关系

Fig.4 Relationship among the altitude, time and downrange

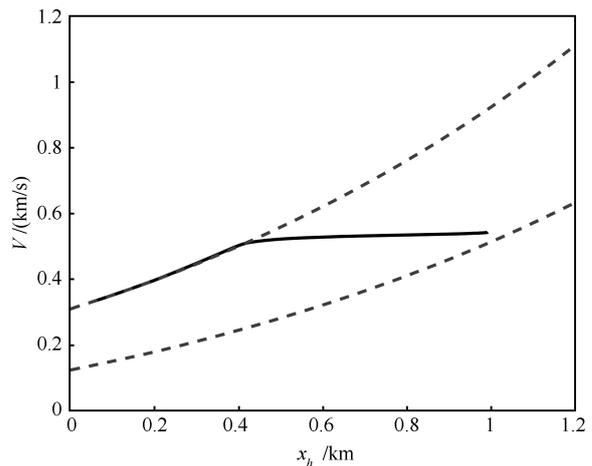


图 5 速度与高度的关系

Fig.5 Relationship between the velocity and altitude

图 3 中的“x”表示 IGPM 计算得到的 LG 点上攻角的值, 实线表示经线性插值得到的真实攻角. 需要指出, 控制变量曲线可以采用式 (10) 计算, 实际上也可以采用其他插值方式, 为了保证控制变量满足边界约束, 一般采用线性插值.

由图 5 可知, 燃料最省的上升段最优轨迹在初始段基本上以最大动压飞行, 属于先加速后上升的类型, 即速度优先的类型, 原因在于在较低的高度范围内, 空气密度大、有充足的氧气, 有利于发挥发动机的效率, 从而节省了燃料. 超燃冲压发动机的油气比的最优取值为 1, 这说明在高超声速飞行器的上升段, 发动机以最大推力工作, 有利于节省燃料.

该方法不需要建立精确的气动系数解析模型, 在动态链接库的基础上就可以直接进行优化, 节省了大量复杂的建模工作, 这对于解决一些难以精确建模并且含有复杂路径约束条件的非线性系统的轨迹优化问题具有很好的借鉴意义.

5 结论

本文针对含有复杂约束条件的非线性最优控制问题, 提出了一种改进的 Gauss 伪谱法, 首先, 将非线性的终端状态积分约束等价地转化为线性形式, 然后, 给出了 IGPM 的协态映射定理, 可以非常方便地计算出协态变量, 从而实现了

求解最优控制问题的间接法和直接法的统一,使得直接法也具有间接法的精度,为检验解最优性提供了前提条件.提出了计算初始时刻协态变量和端点时刻控制变量的计算方法,为了提高解的精度和检验解最优性的一阶必要条件,提出了基于 IGPM 的迭代算法.

以高超声速飞行器上升段轨迹优化问题为例,采用基于 IGPM 的迭代算法求解高超声速飞行器上升段的轨迹优化问题,得到了最优控制和最优轨迹.所得到的最优轨迹基本满足约束条件,并且满足最优性的一阶必要条件.该方法不需要建立气动系数的解析模型,通过动态链接库即可进行轨迹优化,使得最终结果更加符合实际情况,因此,该方法可以用来解决许多相关的工程实际问题.

References

- 1 Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, **21**(2): 193–207
 - 2 Wei Q L, Zhang H G, Liu D R, Zhao Y. An optimal control scheme for a class of discrete-time nonlinear systems with time delays using adaptive dynamic programming. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(1): 121–129
 - 3 Kong S L, Zhang Z S. Optimal control of stochastic system with Markovian jumping and multiplicative noises. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1113–1118
 - 4 Li Jia-Feng, Zhou Hao, Chen Wan-Chun. Indirect method for the hypersonic vehicle maximum-glide problem. *Flight Dynamics*, 2009, **27**(3): 41–44, 49
(李佳峰, 周浩, 陈万春. 高超声速飞行器滑翔段最优弹道的间接算法. 飞行力学, 2009, **27**(3): 41–44, 49)
 - 5 Li Hui-Feng, Li Zhao-Ying. Indirect method of optimal ascent guidance for hypersonic vehicle. *Journal of Astronautics*, 2011, **32**(2): 297–302
(李惠峰, 李昭莹. 高超声速飞行器上升段最优制导间接法研究. 宇航学报, 2011, **32**(2): 297–302)
 - 6 Hager W W. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numerische Mathematik*, 2000, **87**(2): 247–282
 - 7 Conway B A, Larson K M. Collocation versus differential inclusion in direct optimization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2000, **21**(5): 780–785
 - 8 Elnagar G, Kazemi M A, Razzaghi M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(10): 1793–1796
 - 9 Peng Hai-Jun, Gao Qiang, Wu Zhi-Gang, Zhong Wan-Xie. A mixed variable variational method for optimal control problems with applications in aerospace control. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(10): 1248–1255
(彭海军, 高强, 吴志刚, 钟万颢. 求解最优控制问题的混合变量变分方法及其航天控制应用. 自动化学报, 2011, **37**(10): 1248–1255)
 - 10 Fahroo F, Ross I M. Costate estimation by a Legendre pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, **24**(2): 270–277
 - 11 Benson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, Rao A V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, **29**(6): 1435–1440
 - 12 Huntington G T, Rao A V. Optimal reconfiguration of spacecraft formations using the gauss pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, **31**(3): 689–698
 - 13 Sun Y, Zhang M R. Optimal reentry range trajectory of hypersonic vehicle by Gauss pseudospectral method. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Control and Information*. Harbin, China: IEEE, 2011. 545–549
 - 14 Sun Y, Zhang M R, Li H. New costate estimation of Gauss pseudospectral method for nonlinear optimal control problem. In: *Proceedings of the 2011 International Workshop on Engineering Application Research*. Hangzhou, China: IEIT, 2011. 31–36
 - 15 Kameswaran S, Biegler L T. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at radau points. *Computational Optimization and Applications*, 2008, **41**(1): 81–126
 - 16 Garg D, Hager W W, Rao A V. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems. *Automatica*, 2011, **47**(4): 829–837
 - 17 Lu P, Sun H S, Tsai B. Closed-loop endoatmospheric ascent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, **26**(2): 283–294
 - 18 Lu P, Pan B F. Highly constrained optimal launch ascent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, **33**(2): 404–414
- 孙 勇 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心博士研究生. 主要研究方向为最优控制, 高超声速飞行器制导与控制. 本文通信作者.
E-mail: sunyong233@126.com
(SUN Yong Ph.D. candidate at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers optimal control, the guidance and control of hypersonic vehicle. Corresponding author of this paper.)
- 张卯瑞 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心教授. 主要研究方向为非线性控制, 鲁棒控制. E-mail: zhangmaorui@hit.edu.cn
(ZHANG Mao-Rui Professor at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. His research interest covers nonlinear control and robust control.)
- 梁晓玲 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心博士研究生. 主要研究方向为非线性控制, 高超声速飞行器制导与控制.
E-mail: xiaoxiao.liang2011@gmail.com
(LIANG Xiao-Ling Ph.D. candidate at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. Her research interest covers nonlinear control, the guidance and control of hypersonic vehicle.)