

一类模糊双线性跳变系统的随机镇定问题

陈 珺¹ 高泽峰¹ 刘 飞¹

摘 要 研究了一类模糊双线性跳变系统的随机镇定问题. 采用 T-S 模糊建模技术来构建模糊双线性跳变模型, 然后通过并行分布补偿 (Parallel distributed compensation, PDC) 方法和选择合适的模糊隶属度函数, 将整个非线性控制器表示为一组局部线性控制器的模糊综合. 此外, 还推导出了保证闭环模糊双线性跳变系统随机稳定的充分条件, 并且这些条件最终可归结为一组线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 的可行性问题. 最后, 连续搅拌反应釜 (Continuous stirred tank reactor, CSTR) 系统的数值示例表明该设计方法的合理性和有效性.

关键词 T-S 模糊双线性模型, 跳变参数, 随机镇定, 线性矩阵不等式, 连续搅拌反应釜系统

引用格式 陈珺, 高泽峰, 刘飞. 一类模糊双线性跳变系统的随机镇定问题. 自动化学报, 2013, 39(5): 587–593

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00587

Stochastic Stabilization for a Class of Fuzzy Bilinear Jump Systems

CHEN Jun¹ GAO Ze-Feng¹ LIU Fei¹

Abstract This paper deals with the problem of stochastic stabilization for a class of fuzzy bilinear systems with Markovian jump parameters. The Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy modeling technique is adopted to construct a fuzzy bilinear jump model. By means of the parallel distributed compensation (PDC) method, an overall nonlinear controller is constructed by blending a set of local linear controllers through selected membership functions. Besides, some sufficient conditions are derived to guarantee the stochastic stability of the closed-loop fuzzy bilinear jump system via linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a numerical example for a continuously stirred tank reactor (CSTR) system is given to illustrate the validity and effectiveness of the designed procedure.

Key words Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy bilinear model, jump parameters, stochastic stabilization, linear matrix inequalities (LMIs), continuously stirred tank reactor (CSTR) system

Citation Chen Jun, Gao Ze-Feng, Liu Fei. Stochastic stabilization for a class of fuzzy bilinear jump systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 587–593

众所周知, 模糊控制是非线性系统行之有效的控制方法之一. 尤其是 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型的提出^[1], 给模糊控制理论研究及应用带来了深远的影响. 基于 T-S 模糊模型, 同时结合并行分布补偿 (Parallel distributed compensation,

PDC) 算法^[2] 和线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 技术^[3], 使得应用已有的丰富的分析与控制器综合方法于复杂非线性系统成为可能. 但值得注意的是, T-S 模糊模型规则的后件部分是一个线性模型. 随着研究对象复杂程度的增加, 传统的线性模型在某些情况下已无法满足现有的控制要求, 也无法描述一些具有特殊结构的复杂非线性系统, 如过程工业中具有状态变量与控制变量乘积项的复杂双线性系统. 双线性系统是一类特殊的非线性系统, 研究表明, 双线性系统能更准确地描述线性系统不能描述的一些典型的实际过程^[4]. 与一般非线性系统相比, 其动态性能简单, 易于处理, 所以引起了人们的广泛关注. 目前, 双线性系统已被广泛用于生物、化工、经济以及社会问题的各个领域^[5–6].

鉴于双线性系统的特殊性和 T-S 模糊模型的高度逼近性, 2007 年, Li 和 Tsai 将双线性系统和 T-S 模糊模型相结合, 提出了 T-S 模糊双线性模型^[7]. T-S 模糊双线性模型可用来近似一些用常规 T-S 模糊模型不能近似的复杂非线性系统, 从而为模糊系统的研究提供更为广阔的天地. 此后, 对 T-S

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-10-09
Manuscript received May 15, 2012; accepted October 9, 2012
国家自然科学基金 (61134007), 江苏省基础研究计划 (自然科学基金) (BK2012111), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP111A40), 高等学校学科创新引智计划 (B12018), 江苏高等学校优秀科技创新团队, 江苏高校优势学科建设工程项目资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61134007), the Basic Research Program of Jiangsu Province of China (Natural Science Foundation) (BK2012111), the Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP111A40), 111 Project (B12018), Program for Excellent Innovative Team of Jiangsu Higher Education Institutions, and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions

本文客座编委 王宏
Recommended by Guest Editor WANG Hong
1. 轻工过程先进控制教育部重点实验室 江南大学自动化研究所 无锡 214122

1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry, Ministry of Education, Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122

模糊双线性系统的研究引起了国内外学者的广泛关注, 内容主要涉及模糊双线性系统的鲁棒 H_∞ 控制问题^[8-9]、时滞依赖分析^[10-12] 和观测器设计^[13-14] 等.

考虑到系统在运行过程中, 可能会受到由于外部环境或内部结构等随机突变因素的影响而使系统参数发生随机跳变的现象. 这些因素的存在, 都会对系统的稳态性能和动态性能产生不同程度的影响. 但遗憾的是, 目前关于模糊双线性系统在参数随机跳变影响下的镇定问题还没有得到很好地解决.

为此, 本文以一类模糊双线性系统为研究对象, 讨论其在参数发生跳变情况下的系统随机镇定问题. 其中, T-S 模糊模型规则的后件部分采用双线性模型代替. 在此基础上, 以 Lyapunov 随机稳定性理论为分析手段, 同时结合状态反馈的并行分布补偿结构和基于线性矩阵不等式的处理方法, 给出依赖于模态的模糊控制器存在的充分条件, 以此保证闭环模糊双线性跳变系统的随机稳定性. 最后, 通过仿真实验验证所提方法的有效性.

1 问题描述及定义

考虑如下—类由 T-S 模糊双线性模型描述的非线性 Markov 跳变系统, 其第 i 条模糊规则为

Plant rule i :

If $v_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $v_p(t)$ is M_{ip}

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i(\eta(t))\mathbf{x}(t) + B_i(\eta(t))\mathbf{u}(t) + N_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t)$,

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \eta(0) = \eta_0, i = 1, 2, \cdots, l \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为系统的控制输入向量; $v_1(t), \cdots, v_p(t)$ 为模糊规则的前件变量, M_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, l, j = 1, 2, \cdots, p$) 为模糊集合, l 为模糊推理规则数, 即有 l 个子系统. $\eta(t)$ 为系统的跳变模态, 是一类随时间 t 在有限状态集合 $S = \{1, 2, \cdots, s\}$ 中取值的 Markov 过程, $\mathbf{x}_0$ 为系统的初始状态, η_0 为系统的初始模态, $A_i(\eta(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_i(\eta(t)) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $N_i(\eta(t)) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为依赖于模态 $\eta(t)$ 且具有适当维数的实值矩阵. 记模态 $\eta(t)$ 的跳变转移率矩阵为 $\Pi = [\pi_{rk}], r, k \in S$, 其中跳变转移概率定义如下:

$$\Pr\{\eta(t+dt) = k | \eta(t) = r\} = \begin{cases} \pi_{rk}dt + o(dt), & r \neq k \\ 1 + \pi_{rr}dt + o(dt), & r = k \end{cases} \quad (2)$$

式中, $dt > 0$, 且当 $dt \rightarrow 0$ 时, 有 $o(dt)/dt \rightarrow 0$ 成立. π_{rk} 表示从模态 r 跳变到模态 k 的转移率, 并当

$r \neq k$ 时, 有 $\pi_{rk} \geq 0$ 和 $\sum_{k=1, k \neq r}^s \pi_{rk} = -\pi_{rr}$ 成立.

对于给定的数对 $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, 采用单点模糊化、乘积推理以及加权平均反模糊化的推理方法, 得到整个闭环模糊双线性跳变系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) [A_i(\eta(t))\mathbf{x}(t) + B_i(\eta(t))\mathbf{u}(t) + N_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (3)$$

式中, $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \cdots, v_p(t)]^T$ 且满足

$$\mu_i(\mathbf{v}(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(v_j(t))$$

$$h_i(\mathbf{v}(t)) = \frac{\mu_i(\mathbf{v}(t))}{\sum_{i=1}^l \mu_i(\mathbf{v}(t))}, i = 1, 2, \cdots, l$$

其中, $M_{ij}(v_j(t))$ 为 $v_j(t)$ 关于模糊集合 M_{ij} 的隶属度函数, $\mu_i(\mathbf{v}(t))$ 为第 i 条规则的隶属度函数, 且满足如下条件:

$$\mu_i(\mathbf{v}(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^l \mu_i(\mathbf{v}(t)) > 0, i = 1, 2, \cdots, l$$

因此, 有

$$h_i(\mathbf{v}(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) = 1, i = 1, 2, \cdots, l$$

假设系统 (1) 的状态和模态均可得, 那么根据并行分布补偿算法, 可设计相应的依赖于跳变模态的局部状态反馈控制律, 控制器规则如下:

Controller rule i :

If $v_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $v_p(t)$ is M_{ip}

$$\text{Then } \mathbf{u}(t) = \frac{\rho K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t)K_i^T(\eta(t))K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}} \quad (4)$$

其中, $K_i(\eta(t)) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为待定的且依赖于模态的状态反馈增益矩阵, $\rho > 0$ 为待求标量. 从而, 可以得到全局状态反馈控制律如下:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) \frac{\rho K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t)K_i^T(\eta(t))K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}} \quad (5)$$

若令:

$$\begin{cases} \sin \alpha_i = \frac{K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t)K_i^T(\eta(t))K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}} \\ \cos \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{x}^T(t)K_i^T(\eta(t))K_i(\eta(t))\mathbf{x}(t)}} \end{cases}$$

其中, $\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) \rho \sin \alpha_i = \\ &\sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) \rho \cos \alpha_i K_i(\eta(t)) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

将状态反馈控制律 (6) 代入系统 (3) 中, 可得在上述控制律作用下的全局闭环模糊双线性跳变系统的表达式, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i(\mathbf{v}(t)) h_j(\mathbf{v}(t)) \Lambda_{ij}(\eta(t)) \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

式中, $\Lambda_{ij}(\eta(t)) = A_i(\eta(t)) + \rho N_i(\eta(t)) \sin \alpha_j + \rho B_i(\eta(t)) K_j(\eta(t)) \cos \alpha_j$.

为简化表述, 令 $h_i = h_i(\mathbf{v}(t))$, $h_j = h_j(\mathbf{v}(t))$, $r = \eta(t)$, $r_0 = \eta_0$.

定义 1. 模糊双线性跳变系统 (3) 在 $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ 下是随机稳定的, 如果对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和初始模态 $r_0 \in S$, 存在矩阵 $F = F^T > 0$, 满足以下条件:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} E\left\{\int_0^{t_f} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, r_0)\|^2 dt \mid \mathbf{x}_0, r_0\right\} \leq \mathbf{x}_0^T F \mathbf{x}_0$$

式中, $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, r_0)$ 为系统在初始条件 $(\mathbf{x}_0, r_0)$ 下的状态轨迹. 1992 年, Feng 等已在文献 [15] 中证明系统随机稳定意味着几乎渐近稳定.

定义 2. 在 Euclidean 空间 $\{\mathbf{R}^n \times S \times \mathbf{R}_+\}$ 上, 引入随机 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}(t), \eta(t) = r, t > 0) = V(\mathbf{x}(t), r)$$

构造针对模糊双线性跳变系统 (3) 的随机 Lyapunov 能量函数, 即:

$$V(\mathbf{x}(t), r) = \mathbf{x}^T(t) Q(r) \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

其中, $Q(r)$ 为依赖于模态的对称正定矩阵. 由文献 [16] 可知, 模糊双线性跳变系统 (3) ($\mathbf{u}(t) \equiv 0$) 是随机稳定的, 当且仅当存在一组对称正定矩阵 $Q(r)$, $r \in S$, 使得:

$$\sum_{i=1}^l h_i[Q(r) A_i(r) + A_i^T(r) Q(r) + \sum_{k=1}^s \pi_{rk} Q(k)] < 0 \quad (9)$$

本文的目的就是要为模糊双线性跳变系统 (3) 设计一个依赖于模态的状态反馈控制器 (5), 使得对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和初始模态 $r_0 \in S$, 闭环模糊双线性跳变系统 (7) 是随机稳定的.

2 依赖模态的状态反馈控制器设计

定理 1. 闭环模糊双线性跳变系统 (7) 是随机稳定的, 当且仅当存在一组依赖于模态的对称正定矩阵 $Q(r)$, $r \in S$, 使得:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i h_j [Q(r) \Lambda_{ij}(r) + \Lambda_{ij}^T(r) Q(r) + \\ &\sum_{k=1}^s \pi_{rk} Q(k)] < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

证明. 构造随机 Lyapunov 能量函数 (8), 根据定义 2 易知式 (10) 成立. $\square$

为了获得控制器增益, 在定理 1 的基础上, 利用 Schur 补引理及矩阵不等式放缩技术, 将闭环模糊双线性跳变系统的随机稳定条件转化为一组线性矩阵不等式的可解性问题. 在此之前, 先给出定理证明中要用到的引理 [17].

引理 1. 给定具有适当维数的矩阵 X 和 Y , 则存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得:

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y$$

定理 2. 模糊双线性跳变系统 (3) 是随机可镇定的, 如果对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_0$ 和初始模态 $r_0 \in S$, 存在正数 $\varepsilon_{ij} > 0$, 依赖于模态的对称正定矩阵 $X(r)$ 和矩阵 $Y_i(r)$, $r \in S$, $i, j = 1, 2, \dots, l$, 满足下列线性矩阵不等式, 即:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ii}(r) & * & * & * \\ B_i(r) Y_i(r) & -\varepsilon_{ii} I & * & * \\ N_i(r) X(r) & 0 & -\varepsilon_{ii} I & * \\ \Phi_1(r) & 0 & 0 & -\Phi_2(r) \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$i = 1, 2, \dots, l$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{ij}(r) + \Theta_{ji}(r) & * & * \\ B_i(r) Y_j(r) & -\varepsilon_{ij} I & * \\ B_j(r) Y_i(r) & 0 & -\varepsilon_{ji} I \\ N_i(r) X(r) & 0 & 0 \\ N_j(r) X(r) & 0 & 0 \\ 2\Phi_1(r) & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\varepsilon_{ij} I & * & * \\ 0 & -\varepsilon_{ji} I & * \\ 0 & 0 & -2\Phi_2(r) \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

$i < j, i, j = 1, 2, \dots, l$

式中,

$$\begin{aligned}\Theta_{ij}(r) &= A_i(r)X(r) + X(r)A_i^T(r) + \\ &\quad \varepsilon_{ij}\rho^2 I + \pi_{rr}X(r) \\ \Phi_1(r) &= [\sqrt{\pi_{r1}}X(r), \dots, \sqrt{\pi_{r(r-1)}}X(r), \\ &\quad \sqrt{\pi_{r(r+1)}}X(r), \dots, \sqrt{\pi_{rs}}X(r)]^T \\ \Phi_2(r) &= \text{diag}\{X(1), \dots, X(r-1), \\ &\quad X(r+1), \dots, X(s)\}\end{aligned}$$

由此得到依赖于模态的状态反馈控制器增益为

$$K_i(r) = Y_i(r)X^{-1}(r), i = 1, 2, \dots, l \quad (13)$$

证明. 由不等式 (10) 可得:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l h_i h_j [Q(r)\Lambda_{ij}(r) + \Lambda_{ij}^T(r)Q(r) + \\ &\quad \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k)] = \\ &\sum_{i=1}^l h_i^2 [Q(r)\Lambda_{ii}(r) + \Lambda_{ii}^T(r)Q(r) + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k)] + \\ &\quad 2 \sum_{i < j}^l \sum_{j=1}^l h_i h_j [Q(r) \frac{\Lambda_{ij}(r) + \Lambda_{ji}(r)}{2} + \\ &\quad \frac{\Lambda_{ij}^T(r) + \Lambda_{ji}^T(r)}{2} Q(r) + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k)] < 0\end{aligned}$$

为保证上述不等式成立, 只需满足以下两个条件, 即:

$$\begin{aligned}Q(r)\Lambda_{ii}(r) + \Lambda_{ii}^T(r)Q(r) + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k) < 0 \quad (14) \\ Q(r) \frac{\Lambda_{ij}(r) + \Lambda_{ji}(r)}{2} + \frac{\Lambda_{ij}^T(r) + \Lambda_{ji}^T(r)}{2} Q(r) + \\ \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k) < 0\end{aligned} \quad (15)$$

首先, 将 $\Lambda_{ij}(r) = A_i(r) + \rho B_i(r)K_j(r) \cos \alpha_j + \rho N_i(r) \sin \alpha_j$ 代入不等式 (14) 的左边, 并由引理 1 可知, 存在正数 $\varepsilon_{ii} > 0$, 使得:

$$\begin{aligned}Q(r)A_i(r) + A_i^T(r)Q(r) + \rho Q(r)B_i(r)K_i(r) \cos \alpha_i + \\ \rho K_i^T(r)B_i^T(r)Q(r) \cos \alpha_i + \rho Q(r)N_i(r) \sin \alpha_i + \\ \rho N_i^T(r)Q(r) \sin \alpha_i + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k) \leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(r)A_i(r) + A_i^T(r)Q(r) + \varepsilon_{ii}\rho^2 Q(r)Q(r) \cos^2 \alpha_i + \\ \varepsilon_{ii}^{-1} K_i^T(r)B_i^T(r)B_i(r)K_i(r) + \varepsilon_{ii}^{-1} N_i^T(r)N_i(r) + \\ \varepsilon_{ii}\rho^2 Q(r)Q(r) \sin^2 \alpha_i + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k) = \\ Q(r)A_i(r) + A_i^T(r)Q(r) + \varepsilon_{ii}\rho^2 Q(r)Q(r) + \\ \varepsilon_{ii}^{-1} K_i^T(r)B_i^T(r)B_i(r)K_i(r) + \\ \varepsilon_{ii}^{-1} N_i^T(r)N_i(r) + \sum_{k=1}^s \pi_{rk}Q(k) < 0\end{aligned}$$

对上述不等式分别左乘和右乘矩阵 $X(r) = Q^{-1}(r)$, 并令 $Y_i(r) = K_i(r)X(r)$, 则可得:

$$\begin{aligned}A_i(r)X(r) + X(r)A_i^T(r) + \varepsilon_{ii}\rho^2 I + \\ \varepsilon_{ii}^{-1} Y_i^T(r)B_i^T(r)B_i(r)Y_i(r) + \\ \varepsilon_{ii}^{-1} X(r)N_i^T(r)N_i(r)X(r) + \\ \sum_{k=1}^s \pi_{rk}X(r)Q(k)X(r) < 0\end{aligned}$$

应用矩阵的 Schur 补引理即可得到线性矩阵不等式 (11). $\square$

同理, 对不等式 (15) 也可采用上述相同的处理方法得到线性矩阵不等式 (12).

定理 2 给出了保证闭环模糊双线性跳变系统 (7) 随机稳定的充分条件, 并且将该条件转换为一组线性矩阵不等式的可行性问题, 相应的依赖模态的状态反馈控制器增益则由式 (13) 给出.

3 数值示例

为验证本文方法的有效性, 以下选取 CSTR 系统作为仿真对象进行研究, 其状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_0 x_1(t) + a_1 x_1(t)x_2(t) + \\ \quad u(t)(C_{a0} - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = a_0 x_1(t) - a_0 x_2(t) - \\ \quad a_1 x_1(t)x_2(t) - u(t)x_2(t) \end{cases} \quad (16)$$

其中, $x_1(t)$ 为反应物浓度, $x_2(t)$ 为生成物浓度, 控制输入 $u(t)$ 为进料流速, 动力参数 C_{a0} 为 0.1, a_0 和 a_1 是反应釜内活化能、密度、热熔等相关系数的一个综合参数.

这里假设系统有三组模态, 分别由 a_0 和 a_1 确定, 具体表示为

$$1) a_0 = 10, a_1 = 1;$$

2) $a_0 = 15, a_1 = 2;$

3) $a_0 = 20, a_1 = 2.$

同时, 反映各模态之间跳变关系的转移率矩阵给定如下:

$$\Pi = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.25 & 0.05 \\ 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 0.03 & 0.07 & -0.1 \end{bmatrix}$$

假设 $x_2(t) \in [0, 10]$, 采用两个 T-S 模糊双线性模型来逼近 CSTR 系统 (16), 即:

Plant rule 1 :

If $x_2(t)$ is about 0

Then $\dot{x}(t) = A_1(r)x(t) + B_1(r)u(t) + N_1(r)x(t)u(t).$

Plant rule 2 :

If $x_2(t)$ is about 10

Then $\dot{x}(t) = A_2(r)x(t) + B_2(r)u(t) + N_2(r)x(t)u(t).$

其中,

$$\begin{aligned} A_1(1) &= \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \\ A_2(1) &= \begin{bmatrix} -6.1803 & -0.5236 \\ 0 & -16.7039 \end{bmatrix} \\ A_1(2) &= \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 15 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(2) &= \begin{bmatrix} -6.3595 & -0.3088 \\ -5 & -26.6683 \end{bmatrix} \\ A_1(3) &= \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \\ A_2(3) &= \begin{bmatrix} -12.2508 & -0.2 \\ 0 & -32.4508 \end{bmatrix} \\ B_i(r) &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, N_i(r) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ i &= 1, 2, r = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

给定两组不同的初始状态 $\mathbf{x}_0 = [0.8, 6]^T$ 和 $\mathbf{x}_0 = [1.2, -1.4]^T$, 应用定理 2 求解线性矩阵不等式组 (11) 和 (12), 得到各模态下的状态反馈增益矩

阵为

$$\begin{aligned} K_1(1) &= [0.0800 \quad -0.3075] \\ K_2(1) &= [-0.2101 \quad 0.0828] \\ K_1(2) &= [-0.0789 \quad 0.0132] \\ K_2(2) &= [-0.0657 \quad 0.0118] \\ K_1(3) &= [-0.1909 \quad 0.0572] \\ K_2(3) &= [-0.1684 \quad 0.0514] \end{aligned}$$

利用 Simulink 动态环境构建 CSTR 系统的仿真模型, 其中对应规则的模糊隶属函数取为 Gauss 形函数, 如图 1 所示. 图 2 和图 3 分别给出了不同初始状态下系统的状态响应曲线, 而图 4 则显示了这两组初始状态下对应的控制输入曲线. 由仿真结果可以看出, 采用 T-S 模糊双线性跳变模型描述的 CSTR 系统的状态响应能够快速收敛到平衡点附近, 保证了闭环模糊双线性跳变系统的随机稳定性.

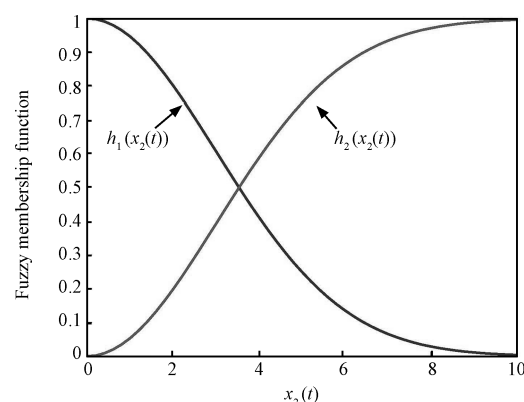


图 1 模糊隶属函数

Fig. 1 Fuzzy membership functions

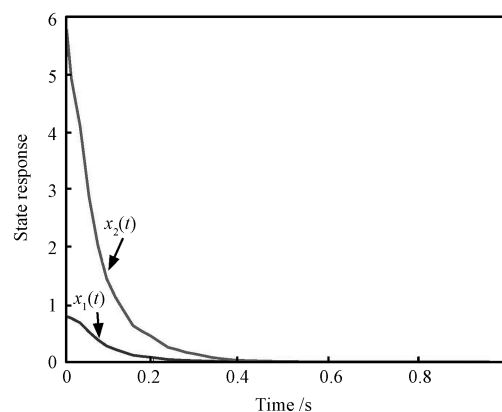


图 2 初始状态 $\mathbf{x}_0 = [0.8, 6]^T$ 下的系统状态响应

Fig. 2 State responses of system under initial condition $\mathbf{x}_0 = [0.8, 6]^T$

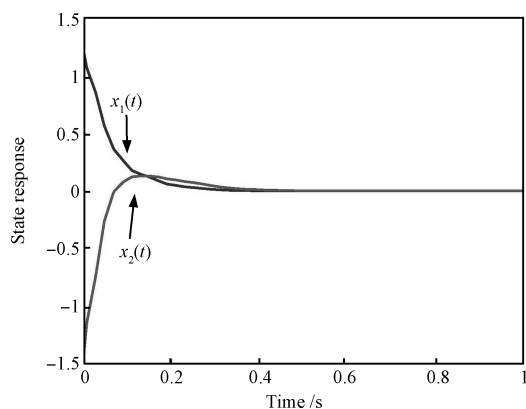


图3 初始状态 $\mathbf{x}_0 = [1.2, -1.4]^T$ 下的系统状态响应

Fig. 3 State responses of system under initial condition

$$\mathbf{x}_0 = [1.2, -1.4]^T$$

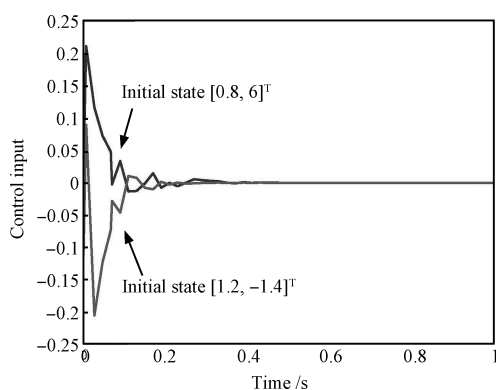


图4 系统控制输入曲线

Fig. 4 Control input curves of system

4 结论

本文针对一类带有双线性项的非线性跳变系统, 采用 T-S 模糊双线性模型结构对其进行系统描述, 并在此基础上讨论闭环模糊双线性跳变系统的随机稳定问题. 与常规 T-S 模糊模型不同的是, T-S 模糊双线性模型规则的后件部分是双线性模型, 取代了传统的线性模型, 可用来近似一些用常规 T-S 模糊模型不能近似的复杂非线性系统. 采用 Lyapunov 随机稳定性原理作为主要分析手段, 同时结合线性矩阵不等式处理技术, 给出保证闭环模糊双线性跳变系统随机稳定的充分条件以及依赖于模态的控制增益的求解方法. 最后以 CSTR 系统作为仿真对象进行仿真研究, 结果很好地验证了本文方法的有效性. 因此, T-S 模糊双线性模型的提出为解决一类特殊非线性系统的控制问题提供了一条新的途径.

References

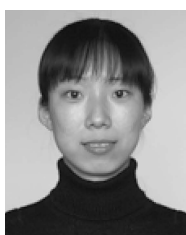
- 1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on*

Systems, Man, and Cybernetics, 1985, **15**(1): 116–132

- 2 Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In: *Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the Second International Fuzzy Engineering Symposium (FUZZ-IEEE/IFES)*. New York, USA: IEEE, 1995. 531–538
- 3 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. 7–35
- 4 Mohler R R. *Bilinear Control Processes*. New York: Academic, 1973
- 5 Elliott D L. Bilinear systems. *Encyclopedia of Electrical Engineering*. New York: Wiley, 1999
- 6 Mohler R R. *Nonlinear Systems: Applications to Bilinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991
- 7 Li T H S, Tsai S H. T-S fuzzy bilinear model and fuzzy controller design for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, **15**(3): 494–506
- 8 Li T H S, Tsai S H, Lee J Z, Hsiao M Y, Chao C H. Robust H_∞ fuzzy control for a class of uncertain discrete fuzzy bilinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, **38**(2): 510–527
- 9 Tsai S H. Robust H_∞ control for van de vusse reactor via T-S fuzzy bilinear scheme. *Expert Systems with Applications*, 2011, **38**(5): 4935–4944
- 10 Tsai S H, Li T H S. Robust fuzzy control of a class fuzzy bilinear systems with time-delay. *Chaos, Solitons, and Fractals*, 2009, **39**(15): 2028–2040
- 11 Yoneyama J. Stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy bilinear time-delay systems. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. Yokohama, Japan: IEEE, 2010. 111–116
- 12 Chen T T, Tsai S H, Tsai K L, Li C L. Fuzzy control for T-S fuzzy bilinear systems with time-delay in state and control input. In: *Proceedings of the 2011 International Conference on System Science and Engineering*. Macau, China: IEEE, 2011. 346–351
- 13 Saoudi D, Mechmeche C, Benhadj Braiek N. T-S fuzzy bilinear observer for a class of nonlinear system. In: *Proceedings of the 18th Mediterranean Conference on Control & Automation Congress Palace Hotel. Marrakech, Morocco: IEEE*, 2010. 1395–1400
- 14 Tsai S H, Chen T T, Hsiao M Y, Chen C S. Robust H_∞ fuzzy observer for a class of time-delay discrete fuzzy bilinear systems with parameter uncertainties. In: *Proceedings of*

the 2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Taipei, China: IEEE, 2011. 304–310

- 15 Feng X, Loparo K A, Ji Y, Chizeck H J. Stochastic stability properties of jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(1): 38–53
- 16 Ji Y, Chizeck H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(7): 777–788
- 17 Xu S Y, Lam J. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, **13**(1): 82–93



陈 珺 江南大学自动化研究所副教授. 2009 年获江南大学控制理论与控制工程博士学位. 主要研究方向为复杂系统的建模与分析, 模糊系统的控制及应用. 本文通信作者.

E-mail: chenjun1860@126.com

(**CHEN Jun** Associate professor at the Institute of Automation, Jiangnan

University. She received her Ph.D. degree in control theory and control engineering from Jiangnan University in 2009. Her research interest covers modeling and analysis for complex systems, control and application for fuzzy systems. Corresponding author of this paper.)



高泽峰 江南大学自动化研究所硕士研究生. 2009 年获江南大学物联网工程学院学士学位. 主要研究方向为模糊控制理论及应用.

E-mail: gaozefeng198610@163.com

(**GAO Ze-Feng** Master student at the Institute of Automation, Jiangnan University. He received his bachelor degree from the School of Internet of Things, Jiangnan University in 2009. His research interest covers control and application of fuzzy systems.)



刘 飞 江南大学自动化研究所教授. 2002 年获浙江大学控制科学与控制工程博士学位. 主要研究方向为先进控制理论与应用, 间歇过程控制工程, 工业过程的统计监控与诊断以及关于模糊系统和神经网络系统的智能技术.

E-mail: fliu@jiangnan.edu.cn

(**LIU Fei** Professor at the Institute of Automation, Jiangnan University. He received his Ph.D. degree in control science and control engineering from Zhejiang University in 2002. His research interests covers advanced control theory and applications, batch process control engineering, statistical monitoring and diagnosis in industrial process, and intelligent technique with emphasis on fuzzy and neural systems.)