

## 多速率分段线性系统预测 控制的显式设计

蒋亚丽<sup>1</sup> 邹媛媛<sup>1,2</sup> 牛玉刚<sup>1</sup>

**摘要** 针对输出采样周期是输入更新周期  $N$  倍的多速率分段线性 (Piecewise linear, PWL) 系统, 本文提出了保证稳定性的显式预测控制器设计方法. 首先, 基于动态规划原理将预测控制优化问题分解为多个单级优化问题; 然后, 根据分段线性系统各子模型以及目标函数的具体形式, 进一步将各单级优化问题分为若干个子问题, 再利用多参数二次规划 (Multiparametric quadratic programming, MP-QP) 方法求解; 最后, 通过比较各子问题的解从而得到系统的最优显式控制律. 在设计过程中, 将系统的最大正不变集作为优化问题的终端约束集, 从而保证了系统的稳定性. 仿真结果表明本文提出的显式预测控制方法能够有效降低多速率分段线性系统的在线计算时间, 在保证系统稳定性的同时, 满足其对输入更新速度的要求.

**关键词** 分段线性系统, 多速率采样, 显式预测控制, 动态规划

**引用格式** 蒋亚丽, 邹媛媛, 牛玉刚. 多速率分段线性系统预测控制的显式设计. 自动化学报, 2013, 39(5): 631–636

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00631

### Explicit Model Predictive Control for Multi-rate Piecewise Linear Systems

JIANG Ya-Li<sup>1</sup> ZOU Yuan-Yuan<sup>1,2</sup> NIU Yu-Gang<sup>1</sup>

**Abstract** This paper studies the explicit model predictive control for piecewise linear (PWL) systems with the output sampling period several times larger than the input updating period. First, based on dynamic programming, the model predictive control optimization problem is decomposed into multi-stage optimization problems with one-step optimal horizon. Further, optimization problem of each stage is separated into sub-problems according to the sub-models of the piecewise linear system and the form of objective function. After that, by utilizing multiparametric quadratic programming (MP-QP) technique and comparing the solutions of all the sub-problems, the optimal explicit control laws are obtained. Besides, the maximal positively invariant set of the piecewise linear system is chosen as the terminal constraint set of the optimization problem such that the stability can be ensured. The numerical example shows that the proposed explicit model predictive control can reduce online computation and satisfy the demand of the multi-rate piecewise linear system with fast updating speed of input.

**Key words** Piecewise linear system, multi-rate control system, explicit model predictive control, dynamic programming

**Citation** Jiang Ya-Li, Zou Yuan-Yuan, Niu Yu-Gang. Explicit model predictive control for multi-rate piecewise linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 631–636

分段线性 (Piecewise linear, PWL) 系统可以较精确地表示大部分复杂的非线性系统, 并且可以描述工业过程中的饱和、死区以及滞后等环节, 因此在化工过程、机器人控制等领域得到了广泛的应用<sup>[1–2]</sup>. 模型预测控制是一种处理多变量约束系统最优控制问题的有效方法之一, 已经在石油、化工等流程工业领域获得广泛应用, 取得了巨大的经济效益与社会效益<sup>[3–5]</sup>. 目前, 已有的关于分段线性系统预测控制方法<sup>[6–7]</sup>, 通常需要在线求解混合整数二次规划或混合整数线性规划问题, 这就要考虑优化时域内分段线性系统子模型之间的切换, 在线计算复杂, 难以在实际中应用.

另外, 在很多复杂的实际工业过程控制中, 系统的控制输入更新速率与输出采样速率并不一致, 例如聚合反应堆化工过程和汽油辛烷质量分析, 通常对输入的在线更新速度要求较高<sup>[8]</sup>. 对于多速率采样控制系统, 提升技术是一种有效的处理方法<sup>[9–10]</sup>, 它将时变的多速率系统转化为在慢速率采样周期内的时不变单速率系统. 但是, 在提升的过程中, 系统模型的输入维数成倍增加, 使得优化问题的在线计算面临更大的挑战, 极易导致控制输入难以在设定的快速率周期内被及时更新这样的问题.

显式预测控制是由 Bemporad 等提出的<sup>[11]</sup>, 主要是解决预测控制在线计算量大、计算时间长的问题. 该方法通过离线计算将系统的状态区域进行凸划分, 得到对应各状态分区的状态反馈显式控制律, 在线时只需查找当前状态所处的分区, 再根据相应的显式表达式直接计算最优控制律. 由于无需反复在线求解优化问题, 相对于经典预测控制, 显式预测控制在线计算时间大为减少, 易于在工程实际中应用. 对于多速率分段线性预测控制系统, 一方面在线求解混合整数规划问题比较耗时, 另一方面, 提升技术的使用会进一步增加在线求解优化问题的复杂度. 为此, 本文采用显式预测控制方法进行研究. 目前关于多速率分段线性系统的显式预测控制的研究文献尚不多见, 而且, 已有的显式预测控制算法不易直接扩展到多速率分段线性系统中, 主要原因是多速率分段线性系统优化问题复杂度的增加将导致可行域划分数目的增加, 进而使得后续各子问题求解过程中的比较次数显著增加, 要得到最终显式预测控制器就更加困难.

基于上述讨论, 本文针对输出采样周期是输入更新周期  $N$  倍的多速率分段线性系统, 提出了显式预测控制方法. 该方法基于动态规划思想, 利用多参数二次规则 (Multiparametric quadratic programming, MP-QP) 技术设计显式预测控制器并给出保证闭环系统稳定性的局部固定状态反馈增益. 由于多速率分段线性系统中提升技术的使用, 各级优化问题的状态可行域分区数目显著增加, 进而分解后的子问题数目增加, 增加了后续比较过程的复杂度. 本文考虑到预测控制的滚动优化原理, 只存储  $k = 0$  时单级优化问题最优控制律的相关信息. 这样, 不仅有效减小离线求解优化问题的复

of System Control and Information Processing, Ministry of Education

本文客座编委 李少远

Recommended by Guest Editor LI Shao-Yuan

1. 华东理工大学化工过程先进控制与优化技术教育部重点实验室 上海 200237  
2. 系统控制与信息处理教育部重点实验室 上海 200240

1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes, Ministry of Education, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237 2. Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education, Shanghai 200240

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-08-14

Manuscript received May 15, 2012; accepted August 14, 2012

国家自然科学基金 (61074041, 61004062, 61273073), 上海市教育委员会和上海市教育发展基金会“晨光计划” (10CG30), 中央高校基本科研业务费专项资金, 系统控制与信息处理教育部重点实验室开放基金资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074041, 61004062, 61273073), “Chen Guang” Program of Shanghai Municipal Education Commission and Shanghai Education Development Foundation (10CG30), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, and the Foundation of Key Laboratory

杂度而且节约控制律所需的存储空间. 本文的算法使得在线操作只需查找当前状态所在的分区并计算相应的最优控制律, 相对于传统预测控制方法, 不仅能够保证系统的稳定性, 还可大大减小最优控制律的在线计算时间.

## 1 系统描述

考虑如下的分段线性化系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t) \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (1)$$

满足约束条件

$$u_{\min} \leq \mathbf{u}(t) \leq u_{\max} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  分别是系统的状态和控制输入,  $\Omega_i$  是系统的各工作区域, 且是状态可行域  $\bar{X}$  的多面体分割, 即  $\forall i, j \in \{1, \dots, s\}, i \neq j$ , 有:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (3)$$

$$\bigcup_{i=1}^s \Omega_i = \bar{X} \quad (4)$$

假设多速率采样系统的输入更新周期为  $T$ , 状态采样周期为  $T_s$ , 且

$$T_s = NT, \quad N \in \mathbf{Z}^+ \quad (5)$$

以周期  $T$  离散化式 (1) 可得:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(k) \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (6)$$

满足约束

$$u_{\min} \leq \mathbf{u}(k) \leq u_{\max} \quad (7)$$

本文为了设计多速率分段线性系统的显式预测控制器, 利用提升技术<sup>[9]</sup>, 将多速率系统转化为  $T_s$  周期内的单速率采样系统:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{A}_i \mathbf{X}_k + \bar{B}_i \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{X}_k \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (8)$$

$$U_{\min} \leq \mathbf{U}_k \leq U_{\max} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{X}_k = \mathbf{x}(kT_s)$ ,  $\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}(kT) \cdots \mathbf{u}((k+N-1)T)]^T$ ,  $\bar{A}_i = A_i^N$ ,  $\bar{B}_i = [A_i^{N-1} B_i \quad A_i^{N-2} B_i \quad \cdots \quad A_i B_i \quad B_i]$ ,  $U_{\min} = [u_{\min}^T \cdots u_{\min}^T]^T$ ,  $U_{\max} = [u_{\max}^T \cdots u_{\max}^T]^T$ .

本文的目标是离线设计显式预测控制器, 在线按照输入更新周期为  $T$ , 状态采样周期为  $T_s$  的方式驱动系统 (8) 的状态在有限步数内进入相应的终端不变集, 然后, 在该不变集内部采用局部状态反馈控制律使得系统最终稳定.

## 2 PWL 系统预测控制优化问题

系统 (8) 的预测控制优化问题可以描述为

$$J^*(\mathbf{X}_0) = \min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{U}, \mathbf{X}_0) = \min_{\mathbf{U}} \sum_{k=0}^{L-1} \{ \|\mathbf{X}_k\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_k\|_R^2 \} + \|\mathbf{X}_L\|_P^2 \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \bar{A}_i \mathbf{X}_k + \bar{B}_i \mathbf{U}_k, \text{ 若 } \mathbf{X}_k \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \\ \mathbf{X}_L \in X_f, \quad U_{\min} \leq \mathbf{U}_k \leq U_{\max} \end{cases}$$

其中,  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0^T, \dots, \mathbf{U}_{L-1}^T]^T$  和  $\mathbf{X}_0$  分别是优化问题的决策变量和参数,  $L$  是优化时域,  $P, Q, R$  均为正定对称矩阵.  $X_f$  是系统 (8) 的最大正不变集, 其定义如下:

**定义 1.** 对于满足约束 (9) 的分段线性系统 (8), 在局部控制律

$$\mathbf{U} = K_i \mathbf{X}_k, \quad \mathbf{X}_k \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (11)$$

的作用下, 如果存在集合  $X_f$ , 使得

$$X_f = \{ \mathbf{X}_k \in X_f \mid \mathbf{X}_{k+1} \in X_f, \forall k \in \mathbf{Z}^+ \} \quad (12)$$

那么,  $X_f$  称为系统 (8) 的最大正不变集.

为保证系统的稳定性, 优化问题的终端加权矩阵  $P$  和最大正不变集内局部反馈增益  $K_i$  满足:

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i)^T P (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i) - P < 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (13)$$

令  $Z = P^{-1}$ ,  $Y_i = K_i P^{-1}$ , 那么, 式 (13) 可以等价于以下的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} Z & Z & Y_i^T & (\bar{A}_i Z + \bar{B}_i Y_i)^T \\ Z & Q^{-1} & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & R^{-1} & 0 \\ \bar{A}_i Z + \bar{B}_i Y_i & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (14)$$

进一步, 按照以下步骤求取系统 (8) 的最大正不变集.

对于分段线性系统:

$$\mathbf{X}_{k+1} = (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i) \mathbf{X}_k, \quad \mathbf{X}_k \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (15)$$

令  $\theta_0 = \left\{ \mathbf{X} \in \bar{X} \mid \begin{array}{l} U_{\min} \leq K_i \mathbf{X} \leq U_{\min} \\ (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i) \mathbf{X} \in \bar{X}, \\ \mathbf{X} \in \Omega_i, \forall i \in \{1, \dots, s\} \end{array} \right\}$ , 下面给出

$\text{Pre}_i(S)$  的定义.

**定义 2.** 对于系统 (8) 的各子模型, 令一步可以演变到  $S$  的可行状态集合为

$$\text{Pre}_i(S) = \{ \mathbf{X} \in \theta_0 \mid (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i) \mathbf{X} \in S \}, \quad i = 1, \dots, s \quad (16)$$

**注 1.**  $S \subseteq \theta_0$  是多面体集合, 式 (15) 是线性系统, 那么  $\text{Pre}_i(S)$  也是多面体集合.

令  $\theta_k^i = \text{Pre}_i(\theta_k) \cap \theta_k$ ,  $i = 1, \dots, s$ , 下面给出求系统 (8) 的最大正不变集的方法.

**算法 1.**

**步骤 1.** 令  $k = 0$ .

**步骤 2.**  $\theta_{k+1} = \bigcup_{i=1}^s \theta_k^i$ .

**步骤 3.** 如果  $\theta_{k+1} = \theta_k$ , 返回  $X_f = \theta_k$ ; 否则, 令  $k = k + 1$ , 重复步骤 2.

基于优化问题 (10), 下面考虑如何设计显式预测控制器在保证系统 (8) 稳定性的同时, 减小最优控制律的在线计算时间.

## 3 显式预测控制器设计

本文在离线求解优化问题 (10) 时, 为避免考虑优化时域内分段线性系统 (8) 各子模型所有可能的切换情况, 采用基于动态规划思想求解 MP-QP 问题的方法<sup>[12]</sup>, 先将优化问题

分为多个单级优化问题, 再根据分段线性系统各子模型和目标函数具体形式的组合情况, 将各单级优化问题分为若干子问题并利用 MP-QP 技术进行求解, 最后通过比较各子问题的解来得到最优显式控制律、最优值函数以及对应的状态可行域划分.

首先, 优化问题 (10) 分为  $L$  个单级优化问题:

$$V_k(\mathbf{X}_k) = \min_{\mathbf{U}_k} \|\mathbf{X}_k\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_k\|_R^2 + V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1}) \quad (17)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \bar{A}_i \mathbf{X}_k + \bar{B}_i \mathbf{U}_k, \mathbf{X}_k \in \Omega_i, i = 1, \dots, s \\ \mathbf{X}_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}, U_{\min} \leq \mathbf{U}_k \leq U_{\max} \end{cases}$$

其中,  $k = L-1, \dots, 0$ . 另外, 当  $k = L-2, \dots, 0$  时,  $\bar{X}_{k+1} = \cup CR_{k+1}^l$ ,  $CR_{k+1}^l$  是第  $k+1$  级优化问题的状态可行域划分. 当  $k = L-1$  时,  $\bar{X}_{k+1} = X_f$ , 且  $V_L(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}_L\|_P^2$ .

显然, 优化问题 (17) 的约束条件会随着状态  $\mathbf{X}_k$  在可行域内的分布情况而变化. 那么, 各单级优化问题无法直接使用 MP-QP 技术依次求解. 本文在给出多重二次函数以及区域有序单值函数定义的基础上<sup>[13]</sup>, 先将各单级优化问题进一步分解为多个子问题进行求解.

对于 MP-QP 问题, 最优值函数是连续的凸分段二次函数, 最优解是连续的分段仿射函数. 在此基础上, 给出如下定义.

**定义 3.** 如果  $\mathbf{X} \in \Psi$ ,  $\Psi \subseteq \mathbf{R}^n$  是凸多面体集合, 且有:

$$a(\mathbf{X}) = \min \begin{cases} a_1(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T W_1 \mathbf{X} + E_1 \mathbf{X} + c_1 \\ \vdots \\ a_d(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T W_d \mathbf{X} + E_d \mathbf{X} + c_d \end{cases}$$

其中,  $d \in \mathbf{Z}^+$ , 那么, 称函数  $a$  为重数为  $d$  的多重二次函数.

**定义 4.** 集合  $\Psi \subseteq \mathbf{R}^n$  (不一定是凸的), 若该集合存在一个多面体分割  $\Psi_1, \dots, \Psi_v$  ( $\Psi_1, \dots, \Psi_v$  均为凸多面体), 且有:

$$a(\mathbf{X}) = \min \begin{cases} a_{l1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T W_{l1} \mathbf{X} + E_{l1} \mathbf{X} + c_{l1} \\ \vdots \\ a_{ld_l}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T W_{ld_l} \mathbf{X} + E_{ld_l} \mathbf{X} + c_{ld_l} \end{cases} \\ \mathbf{X} \in \Psi_l, l = 1, \dots, v$$

那么, 函数  $a$  称为多面体上重数为  $d$  的多重分段二次函数. 其中,  $d_l$  是函数  $a$  在分区  $\Psi_l$  上的重数, 而  $d = \sum_{l=1}^v d_l$  是函数  $a$  的重数.

考虑分段函数

$$b(\mathbf{X}) = f_l(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Psi_l, l = 1, \dots, v \quad (18)$$

其中,  $\Psi_l$  是状态空间上的子集. 如果存在  $l, \alpha \in \{1, \dots, v\}$  使得  $\mathbf{X} \in \Psi_l \cap \Psi_\alpha$  且  $f_l(\mathbf{X}) \neq f_\alpha(\mathbf{X})$ , 那么,  $b(\mathbf{X})$  就不是单值的. 为了使  $b(\mathbf{X})$  具有单一值, 给出如下定义.

**定义 5.** 对于函数 (18), 令

$$b_0(\mathbf{X}) = f_l(\mathbf{X}), \text{ 若 } \mathbf{X} \in \Psi_l \text{ 且 } \forall \alpha < l, \mathbf{X} \notin \Psi_\alpha, \\ \alpha = 1, \dots, v \quad (19)$$

那么, 称  $b_0(\mathbf{X})$  为关于  $b(\mathbf{X})$  的区域有序单值函数.

**注 2.** 对于区域有序单值函数 (19), 其函数值会随着各区域位置顺序的改变而改变.

基于上述定义, 优化问题 (17) 可以利用 MP-QP 技术从后向前依次求解, 并且通过比较各子问题的解来得到最优显式控制律、最优值函数以及对应的状态可行域划分. 下面以  $k = L-1$  为例, 给出求解各单级优化问题的方法.

第  $k = L-1$  级优化问题为

$$V_{L-1}(\mathbf{X}_{L-1}) = \min_{\mathbf{U}_{L-1}} \|\mathbf{X}_{L-1}\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_{L-1}\|_R^2 + V_L(\mathbf{X}_L) \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{X}_L = \bar{A}_i \mathbf{X}_{L-1} + \bar{B}_i \mathbf{U}_{L-1} \\ \mathbf{X}_{L-1} \in \Omega_i, i = 1, \dots, s \\ \mathbf{X}_L \in X_f, U_{\min} \leq \mathbf{U}_{L-1} \leq U_{\max} \end{cases}$$

其中,  $V_L(\mathbf{X}_L) = \|\mathbf{X}_L\|_P^2$  是二次函数,  $\mathbf{X}_L$  是定义在  $s$  个多面体区域上的分段线性函数. 那么  $V_L(\mathbf{X}_L)$  就成为定义在  $s$  个多面体区域上的关于参数  $\mathbf{X}_{L-1}$  的分段二次函数, 该优化问题可以分为  $s$  个 MP-QP 子问题分别求解:

$$\min_{\mathbf{U}_{L-1}} \|\mathbf{X}_{L-1}\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_{L-1}\|_R^2 + \\ \left\| (\bar{A}_i \mathbf{X}_{L-1} + \bar{B}_i \mathbf{U}_{L-1}) \right\|_P^2 \quad (21)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{X}_{L-1} \in \Omega_i, \mathbf{X}_L \in X_f, U_{\min} \leq \mathbf{U}_{L-1} \leq U_{\max}$$

其中,  $i = 1, \dots, s$ . 假设第  $i$  个子问题的解如下:

$$U_i(\mathbf{X}_{L-1}) = F_{i\beta}(\mathbf{X}_{L-1}) + G_{i\beta} \\ J_i(\mathbf{X}_{L-1}) = \mathbf{X}_{L-1}^T W_{i\beta} \mathbf{X}_{L-1} + E_{i\beta} \mathbf{X}_{L-1} + c_{i\beta} \\ \forall \mathbf{X}_{L-1} \in \Psi_{i\beta}, \beta = 1, \dots, \bar{N}_i \quad (22)$$

其中,  $\Psi_i = \cup_{\beta=1}^{\bar{N}_i} \Psi_{i\beta}$  是使相应子优化问题可行的  $\mathbf{X}_{L-1}$  的集合,  $\Psi_{i1}, \dots, \Psi_{i\bar{N}_i}$  是其多面体分割,  $\bar{N}_i$  是分区数目.

下面以  $s = 2$  为例来说明如何将各 MP-QP 子问题的解进行比较, 进而得到最优解  $\mathbf{U}_{L-1}^*(\mathbf{X}_{L-1})$ 、最优值函数  $V_{L-1}(\mathbf{X}_{L-1})$  及相应的最终状态可行域划分  $CR_{L-1}^l$ .

设两个子问题对应的分区为  $\Psi_{1\beta}$  和  $\Psi_{2\delta}$ , 其中  $\beta = 1, \dots, \bar{N}_1, \delta = 1, \dots, \bar{N}_2$ . 如果有  $\Psi_{1\beta} \cap \Psi_{2\delta} \neq \emptyset$ , 那么在两个区域的交集  $CR_{L-1}^l = \Psi_{1\beta} \cap \Psi_{2\delta}$  上, 最优值函数  $V_{L-1}(\mathbf{X}_{L-1})$  就是多面体  $CR_{L-1}^l$  上的 2 重分段二次函数, 且  $\Psi_{1\beta}$  和  $\Psi_{2\delta}$  的存储位置要排在  $CR_{L-1}^l$  后面, 例如令  $CR_{L-1}^{l+1} = \Psi_{1\beta}, CR_{L-1}^{l+2} = \Psi_{2\delta}$ . 此时,  $\mathbf{U}_{1\beta}^*$  和  $\mathbf{U}_{2\delta}^*$  的信息无需存储, 只需存储  $V_{1\beta}(\mathbf{X}_{L-1})$  和  $V_{2\delta}(\mathbf{X}_{L-1})$  的信息, 用于第  $L-2$  级优化问题的求解. 需要注意的是, 在求解整个优化问题的过程中, 当存储新区域对应的最优值函数时, 之前存好区域的相对顺序不可改变.

若  $s > 2$ , 先将前两个子 MP-QP 问题的解按照  $s = 2$  的步骤进行比较和存储, 将比较结果再与第 3 个子 MP-QP 问题进行同样的操作, 依此类推.

从第二级  $k = L-2$  一直到  $k = 0$ , 优化问题 (17) 的求解过程同上. 只是当  $k \neq L-1$  时,  $V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1})$  是定义在多面体区域上的具有一定重数  $d_{k+1}$  的分段二次函数. 如果  $v_{k+1}$  是  $V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1})$  对应的分区数目, 那么, 通过考虑  $V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1})$  在各分区上的重数之和以及分段线性系统的各子模型情况, 第  $k$  级优化问题可以分为  $sd_{k+1}$  个子 MP-QP 问题来求解, 再按照上面介绍的方法进行比较得到最终的最优解、最优控制律及相应的可行域划分. 其中, 当  $k = L-2, \dots, 1$  时, 只存储值函数  $V_k(\mathbf{X}_k)$  的信息用于下一级优化问

题的求解. 当  $k=0$  时, 需要存储对应的  $\mathbf{U}_0^*(\mathbf{X}_0)$  和  $V_0(\mathbf{X}_0)$  的信息, 且  $\mathbf{U}_0^*(\mathbf{X}_0)$  在各区域  $CR_0^l$  上的表达式信息也按照区域有序的方式来存储. 对于值函数重数大于 2 的区域, 需要将对应于各重值函数的最优控制律表达式同时存储, 而实际取值通过在线判断多重值函数的大小来决定. 最后求得最优控制律形式为

$$\mathbf{U}_0^* = F_0^l \mathbf{X}_0 + G_0^l, \quad \mathbf{X}_0 \in CR_0^l, \quad l = 1, \dots, v_0 \quad (23)$$

但是,  $\mathbf{U}_0^*$  关于  $\mathbf{X}_0$  在各分区  $CR_0^l$  上是区域有序的单值函数.

**注 3.** 为了进一步减小优化问题的离线求解复杂度以及降低最优控制律的存储需求, 根据预测控制滚动优化的原理, 对  $k \neq 0$  时的单级优化问题, 本文只存储值函数的信息用于下一级优化问题的求解, 而  $k=0$  时, 存储对应的最优控制律和最优值函数的信息.

下面给出求解显式预测控制器的具体算法. 其中, 优化问题 (17) 的第  $k$  级子问题  $V_k(\mathbf{X}_k)$  的分区记为  $CR_k^l, l=1, \dots, v_k, V_k(\mathbf{X}_k)$  在该分区上的重数标号为  $\lambda, \lambda=1, \dots, d_k^l$  的总重数为  $d_k = \sum_{l=1}^{v_k} d_k^l$ , 分段线性系统各子模型的标号为  $i, i=1, \dots, s$ .

#### 算法 2.

**步骤 1.** 给出优化问题 (10) 以及状态加权矩阵  $Q$ , 输入加权矩阵  $R$ , 优化时域  $L$ . 离线计算终端加权矩阵  $P$  和终端不变集  $X_f$ ;

**步骤 2.** 将优化问题 (10) 分为  $L$  个单级优化问题, 即式 (17), 令  $V_L = \|\mathbf{X}_L\|_P^2, CR_L^1 = \bar{X}_L = X_f$ ;

**步骤 3.** 令优化问题 (17) 的级数  $k=L-1$ ;

**步骤 4.** 令  $V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1})$  的分区  $CR_{k+1}^l$  上标  $l=1$ ;

**步骤 5.** 令  $V_{k+1}(\mathbf{X}_{k+1})$  在分区  $CR_{k+1}^l$  上的重数标号  $\lambda=1$ ;

**步骤 6.** 令分段线性子模型标号  $i=1$ ;

**步骤 7.** 求解子优化问题

$$\min_{\mathbf{U}_k} \|\mathbf{X}_k\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_k\|_R^2 +$$

$$\|\mathbf{X}_{k+1}\|_{W_{i\lambda}}^2 + E_{i\lambda} \mathbf{X}_{k+1} + c_{i\lambda}$$

$$\text{s.t. } U_{\min} \leq \mathbf{U}_k \leq U_{\max}, \quad \mathbf{X}_k \in \Omega_i, \quad \mathbf{X}_{k+1} \in CR_{k+1}^l$$

得到该子优化问题的分区  $\Psi_{k,l,\lambda,i}$ , 最优值函数  $V_{k,l,\lambda,i}$ . 若  $k=0$ , 存储最优控制律  $\mathbf{U}_{k,l,\lambda,i}$ ;

**步骤 8.**  $i=i+1$ , 重复步骤 7, 直到  $i>s$ ;

**步骤 9.**  $\lambda=\lambda+1$ , 重复步骤 6 和步骤 7, 直到  $\lambda>d_{k+1}^l$ ;

**步骤 10.**  $l=l+1$ , 重复步骤 5~7, 直到  $l>v_{k+1}$ ;

**步骤 11.** 根据上文介绍的方法将  $sd_{k+1}$  个子问题的解依次进行比较, 得到以多面体上多重二次函数的形式存储的最优值函数  $V_k(\mathbf{X}_k)$ , 相应的分区  $CR_k^l, l=1, \dots, v_k$ , 若  $k=0$ , 存储  $\mathbf{U}_k(\mathbf{X}_k)$ ;

**步骤 12.**  $k=k-1$ , 重复步骤 4~11, 直到  $k<0$ , 返回  $CR_0^l, l=1, \dots, v_0, \mathbf{U}_0(\mathbf{X}_0), V_0(\mathbf{X}_0)$ .

## 4 稳定性

在上一节中, 离线设计的显式控制律 (23) 可以将系统状态驱动到最大正不变集. 在该正不变集内部, 采用局部状态反馈控制律 (11) 使系统最终稳定. 下面给出系统稳定性结果.

**定理 1.** 对于分段线性系统 (8), 在显式控制律 (23) 和局部反馈控制律 (11) 的作用下, 如果优化问题 (10) 在  $k$  时

刻关于当前状态  $\mathbf{X}_k$  是可行的, 那么, 优化问题在  $k+1$  时刻存在可行解, 且系统是闭环稳定的.

**证明.** 对于分段线性系统 (8), 由于优化问题关于当前状态  $\mathbf{X}_k$  是可行的, 假设其对应的最优解为  $\tilde{\mathbf{U}}_k^* = \{\mathbf{U}_{k|k}^*, \mathbf{U}_{k+1|k}^*, \dots, \mathbf{U}_{k+L-1|k}^*\}$ . 在  $k+1$  时刻, 构造一组解  $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^* = \{\mathbf{U}_{k+1|k}^*, \dots, \mathbf{U}_{k+L-1|k}^*, K_i \mathbf{X}_{k+L}\}$ . 因为  $\mathbf{U}_{k+1|k}^*, \dots, \mathbf{U}_{k+L-1|k}^*$  是  $k$  时刻的可行解, 显然, 它们在  $k+1$  时刻可行且满足优化问题 (10) 的约束条件. 同时,  $\mathbf{X}_{k+1}$  可以经过  $L-1$  步被驱动到  $X_f$ , 即  $\mathbf{X}_{k+L} \in X_f$ . 综上, 由最大正不变集的定义可知约束条件  $U_{\min} \leq K_i \mathbf{X}_{k+L} \leq U_{\max}, i=1, \dots, s, \mathbf{X}_{k+L} \in X_f$  和  $\mathbf{X}_{k+L} \in \bar{X}$  均可满足. 那么, 优化问题 (10) 在  $k+1$  时刻是可行的.

定义优化问题 (10) 的最优目标函数值为 Lyapunov 函数:

$$V(\mathbf{X}_k) = J^*(\mathbf{X}_k) = \min_{\mathbf{U}} \sum_{i=k}^{k+L-1} \{\|\mathbf{X}_i\|_Q^2 + \|\mathbf{U}_i\|_R^2\} + \|\mathbf{X}_{k+L}\|_P^2 \quad (24)$$

设  $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^*$  是  $k+1$  时刻的最优解. 那么, 对应于  $\tilde{\mathbf{U}}_k^*, \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^*$  和  $\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^*$  的目标值函数值分别为  $J^*(\mathbf{X}_k), J(\mathbf{X}_{k+1})$  和  $J^*(\mathbf{X}_{k+1})$ . 根据最优性原理有:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(\mathbf{X}_{k+1}) - V(\mathbf{X}_k) \leq \\ & J(\mathbf{X}_{k+1}) - J^*(\mathbf{X}_k) = \\ & -\mathbf{X}_k^T Q \mathbf{X}_k - \mathbf{U}_k^T R \mathbf{U}_k + \mathbf{X}_{k+L+1}^T P \mathbf{X}_{k+L+1} - \\ & \mathbf{X}_{k+L}^T (P - Q) \mathbf{X}_{k+L} + \mathbf{U}_{k+L}^T R \mathbf{U}_{k+L} \end{aligned} \quad (25)$$

由于式 (25) 中的前两项始终为负, 且  $P$  和  $K_i$  满足线性矩阵不等式 (14), 显然  $\Delta V < 0$ , 闭环系统稳定.  $\square$

## 5 数值仿真

对于分段线性系统, 考虑状态采样周期为  $T_s = 0.4\text{s}$ , 输入更新周期为  $T = 0.1\text{s}$ . 以  $T = 0.1\text{s}$  离散化, 得到状态空间模型为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.35 & -0.6062 \\ 0.6062 & 0.35 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k), \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 0.35 & 0.6062 \\ -0.6062 & 0.35 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k), \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) < 0 \end{cases}$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in [-5, 5] \times [-5, 5], -1 \leq \mathbf{u}(k) \leq 1$ . 将以上模型以  $T = 0.4\text{s}$  进行提升, 对于提升后模型对应的优化问题, 令优化时域  $L = 3$ , 状态和输入加权矩阵分别为  $0.7I_{2 \times 2}$  和  $0.3I_{4 \times 4}$ .

利用线性矩阵不等式 (14) 解得终端加权矩阵和局部状态反馈增益分别为

$$P = \begin{bmatrix} 1.2541 & 8.0997 \times 10^{-19} \\ 8.0997 \times 10^{-19} & 1.2590 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0533 & -0.0215 \\ -0.1164 & 0.1004 \\ -0.0575 & 0.1873 \\ 0.1554 & 0.0627 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.0533 & -0.0215 \\ 0.1164 & 0.1004 \\ 0.0575 & 0.1873 \\ -0.1554 & 0.0627 \end{bmatrix}$$

求解各级优化问题, 得到多速率系统最优控制律为  $\mathbf{U}_0^* = F_0^l \mathbf{X}_0 + G_0^l$ ,  $\mathbf{X}_0 \in CR_0^l$ , 对应的状态分区如图 1 所示.

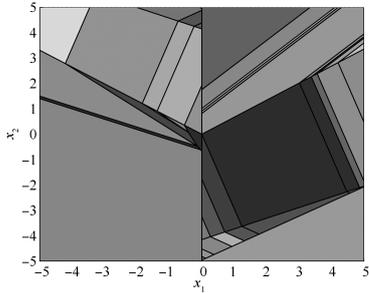


图 1 多速率系统最终分区, 数目为 171  
Fig. 1 171 critical regions of multi-rate system

设初始状态为  $\mathbf{x} = [4 \ -3]^T$ , 对以上分段线性系统采用多速率控制策略, 在线搜索各  $kT_s$  时刻状态所在分区, 计算对应的显式控制律  $\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}(kT)^T \ \mathbf{u}((k+1)T)^T \ \mathbf{u}((k+2)T)^T \ \mathbf{u}((k+3)T)^T]^T$ , 并在各输入更新时刻, 即  $kT, (k+1)T, (k+2)T$  和  $(k+3)T$ , 实施到系统中. 当系统状态变量进入到最大正不变集内部后, 则采用固定的状态反馈控制律, 相应的控制律如图 2 所示. 图 3 为系统的状态轨迹, 图 4 为系统的终端不变集和状态轨迹的局部放大图, 可以看出系统状态进入终端不变集后趋于稳定. 为了进一步说明多速率控制的效果, 将本文提出的多速率预测控制方法与状态采样周期为  $T_s = 0.4s$  而输入更新周期在  $0.4s$  内不发生变化的控制方式进行了比较. 两种不同控制方式对应的状态演化轨迹如图 5 所示. 从图中可以看出, 控制输入在慢采样周期内变化的多速率的控制效果比控制输入在慢采样周期内不变化的控制效果要好.

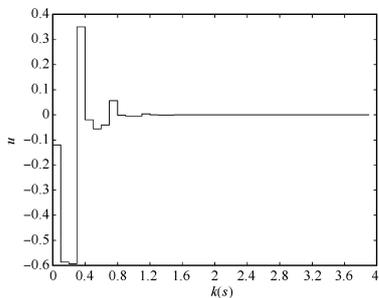


图 2 多速率系统控制输入  
Fig. 2 Control input of multi-rate system

### 6 结论

本文针对多速率分段线性系统, 提出了基于动态规划原理、多参数规划方法以及不变集理论的保性能显式预测控制方法, 该方法不但保证了系统的稳定性, 还大大减小了最优控制律的在线计算时间, 从而满足多速率分段线性系统对输入快速更新的要求.

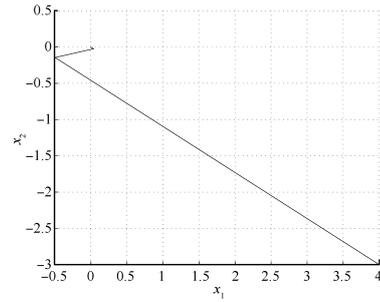


图 3 多速率系统状态轨迹  
Fig. 3 State trajectories of multi-rate system

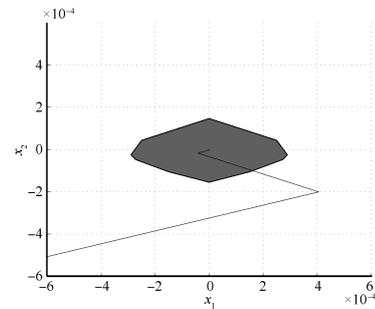


图 4 多速率系统状态轨迹局部  
Fig. 4 Detail view of state trajectories for multi-rate system

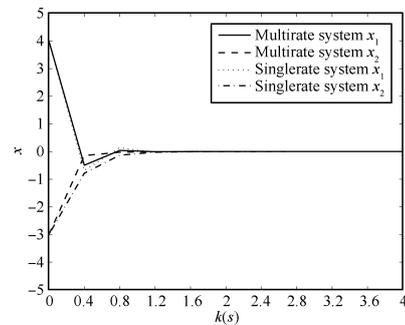


图 5 状态演化轨迹  
Fig. 5 State trajectories

### References

- 1 Özkan L, Kothare M V, Georgakis C. Model predictive control of nonlinear systems using piecewise linear models. *Computers and Chemical Engineering*, 2000, **24**(2-7): 793-799
- 2 Ding D W, Yang G H. Static output feedback control for discrete-time piecewise linear systems: an LMI approach. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(4): 337-344
- 3 Xi Yu-Geng. *Predictive Control*. Beijing: National Defence Industrial Press, 1993  
(席裕庚. 预测控制. 北京: 国防工业出版社, 1993)
- 4 Ping Xu-Bin, Ding Bao-Cang, Han Chong-Zhao. Dynamic output feedback robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(1): 31-37  
(平续斌, 丁宝苍, 韩崇昭. 动态输出反馈鲁棒模型预测控制. 自动化学报, 2012, **38**(1): 31-37)

- 5 Huang He, Li De-Wei, Xi Yu-Geng. On design of mixed  $H_2/H_\infty$  RMPC based on multi-step control strategy. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 944–950  
(黄鹤, 李德伟, 席裕庚. 基于多步控制策略的混合  $H_2/H_\infty$  鲁棒预测控制器设计. 自动化学报, 2012, **38**(6): 944–950)
- 6 Bemporad A, Borrelli F, Morari M. Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems. In: Proceedings of the 2000 American Control Conference. Chicago, USA: IEEE, 2000. 1190–1194
- 7 Özkan Leyla, Kothare M V, Georgakis C. Model predictive control of nonlinear systems using piecewise linear models. *Computers & Chemical Engineering*, 2000, **24**(2–7): 793–799
- 8 Araki M, Yamamoto K. Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(2): 145–154
- 9 Kranc G M. Input-output analysis of multirate feedback systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1957, **3**(1): 21–28
- 10 Gu Cong, Liang Yan, Zhang Gong-Yuan, Yang Feng, Pan Quan.  $H_\infty$  filter for multi-rate systems with missing measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(6): 881–885  
(谷丛, 梁彦, 张共愿, 杨峰, 潘泉. 量测缺失下多速率传感器系统的  $H_\infty$  滤波器设计. 自动化学报, 2012, **36**(6): 881–885)
- 11 Bemporad A, Borrelli F, Morari M. Model predictive control based on linear programming — the explicit solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **47**(12): 1974–1985
- 12 Kouramas K I, Faísca N P, Panos C, Pistikopoulos E N. Explicit multi-parametric model predictive control (MPC) of linear discrete-time systems by dynamic and multi-parametric programming. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1638–1645
- 13 Borrelli F, Baotic M, Bemporad A, Morari M. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. *Automatica*, 2005, **41**(10): 1709–1721

蒋亚丽 华东理工大学控制科学与工程专业硕士研究生. 主要研究方向为多速率控制系统的显式预测控制. E-mail: yali.jiang@qq.com

(JIANG Ya-Li Master student in control science and engineering at East China University of Science and Technology. Her main research interest is explicit predictive control for the multi-rate systems.)

邹媛媛 华东理工大学副教授. 主要研究方向为预测控制理论与算法, 网络控制系统和分布式控制系统. 本文通信作者.

E-mail: yyzou@ecust.edu.cn

(ZOU Yuan-Yuan Associate professor at East China University of Science and Technology. Her research interest covers predictive control, network-based control systems, and distributed control systems. Corresponding author of this paper.)

牛玉刚 华东理工大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为滑模控制, 随机系统, 网络拥塞控制和无线传感网络.

E-mail: acniuyg@ecust.edu.cn

(NIU Yu-Gang Professor at the School of Information Science and Engineering, East China University of Science and Technology. His research interests covers sliding mode control, stochastic systems, network congestion control, and wireless sensor network.)