分散式 MPC 经济性能评估

刘 苏 [1] 冯毅萍 [1] 荣 冈 [1]

摘 要 近年来, 学术界对集中式模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 性能评估进行了广泛的研究. 对于大规模化工过程, 工业现场通常采用分散式 MPC 的控制结构. 由于各子系统间存在复杂的耦合关系, 针对集中式 MPC 的性能评估方法不能客观反映分散式 MPC 的性能. 本文基于线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的方法对分散式 MPC 进行经济性能评估. 首先提出了一种迭代方法求解分散式线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 问题, 该方法显著降低了已有求解方法的保守性. 再利用 LQR 基准建立了一组随机优化命题对 MPC 进行经济性能评估, 评估方法对集中式 MPC 与分散式 MPC 均适用, 评估结果可以指导 MPC 参数调整, 也可以为集中式与分散式 MPC 结构选择提供重要参考. 通过对重油分馏塔控制问题的仿真验证了本文方法的有效性与应用价值.

关键词 模型预测控制, 经济性能评估, 分散式控制, 线性二次型调节器, 线性矩阵不等式

引用格式 刘苏, 冯毅萍, 荣冈. 分散式 MPC 经济性能评估. 自动化学报, 2013, **39**(5): 548−555

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.00548

Economic Performance Assessment of Decentralized Model Predictive Control

LIU Su[1] FENG Yi-Ping[1] RONG Gang[1]

Abstract In recent years, performance assessment of centralized model predictive control (MPC) has attracted a lot of academic interest. In fact, large-scale complex chemical processes are usually controlled by decentralized MPC in the industrial field. Due to the complex interactions between subsystems, most performance assessment methods regarding centralized control structure cannot be applied to the performance assessment of decentralized MPC. In this paper, a linear matrix inequality (LMI) based approach is proposed to assess the economic performance of decentralized MPC. First, an iterative method is proposed to obtain the decentralized linear quadratic regulator (LQR) benchmark. A probabilistic optimization problem is then formulated to assess the economic performance of MPC. The proposed approach can be applied to assessment of both centralized MPC and decentralized MPC. The assessment result provides guidance for parameter tuning as well as control structure selection. The simulation result of Shell control problem shows the effectiveness of the proposed method.

Key words Model predictive control (MPC), economic performance assessment, decentralized control, linear quadratic regulator (LQR), linear matrix inequality (LMI)

Citation Liu Su, Feng Yi-Ping, Rong Gang. Economic performance assessment of decentralized model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 548−555

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 因其处理多变量、约束等能力, 得到了广泛的工业应用. 典型的化工过程通常是由一系列相互作用的子系统组成, 各子系统之间存在着复杂的物料流、能量流以及信息流. 针对复杂的大规模工业过程, 虽然集中式控制结构能够提供最优性能指标, 但是由于计算机能力和通讯能力的限制, 难以应用. 因此, 在工业实际中通常采用分散式控制结构, 即忽略装置间的相互作用, 对每个子系统单独设计 MPC 控制器. 但是, 当各子系统之间的相互作用较强时, 分散式 MPC 的控制性能会大打折扣, 甚至导致系统不稳定[1]. 为了结合集中式与分散式 MPC 的优势, 近年来学术界对分布式 MPC 进行了广泛的研究, 提出了多种分布式 MPC 策略[2]. 其中文献 [3] 提出的分布式协同方案在收敛时可以达到与集中式控制方案相同的控制效果. 但分布式 MPC 增加了控制系统的复杂度与成本, 对通信存在较高要求, 目前工业应用较少. 为选择合理的控制器结构, 就需要对集中式 MPC 与分散式 MPC 进行性能评估. 自从 Harris 的早期论文 [4] 之后, 学术界对控制器性

收稿日期 2012-05-13 录用日期 2012-10-08
Manuscript received May 13, 2012; accepted October 8, 2012
国家基础研究发展计划 (973 计划) (2012CB720500), 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2012BAE05B03) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB720500) and National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2012 BAE05B03)
本文客座编委 王宏
Recommended by Guest Editor WANG Hong
1. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室智能系统与控制研究所 杭州 310027
1. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Cyber-System and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027

能评估进行了广泛而深入的研究, 许多评估方法被应用到集中式 MPC 的性能评估[5]. 例如最小方差控制 (Minimum variance control, MVC) 基准[6−7]、线性二次型高斯 (Linear quadratic Gaussian, LQG) 基准[8]、用户自定义基准[9]、模型验证[10]、设计目标与实际对比[11] 等. 其中, LQG 基准被认为具有较高的参考价值, 因为 LQG 基准同时考虑了系统的输入方差和输出方差. 由于各子系统之间存在耦合关系, 以上针对集中式 MPC 的性能评估方法不能直接应用于分散式 MPC 的性能评估. 分散式 MPC 的性能评估必须考虑到控制器的块对角结构特性. 目前学术界对于分散式控制系统的性能评估研究相对较少, 主要关注于分散式 MVC 基准[12−14]. 由于控制器的块对角结构约束给优化命题带来非凸的特性, 此类问题目前还没有一个完善的解决方法, 只能通过一些简化假设求得分散式 MVC 基准的上界或下界. 然而, 由于只考虑了输出方差, 而未考虑输入作用, 分散式 MVC 基准无法客观反映分散式 MPC 的控制性能. 本文的核心工作就是将 LQG 基准应用于分散式 MPC 的经济性能评估. 主要贡献包括: 1) 在系统状态已知的情况下, 提出了一种基于线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 的迭代方法处理控制器块对角约束, 得到了分散式线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 基准. 本文的迭代方法显著降低了现有方法的保守性. 2) 建立了一组随机优化命题, 利用集中式与分散式 LQR 基准分别对 MPC 进行经济性能评估. 评估结果既可以为分散式 MPC 的参数调整提供参考, 也可以表明用集中式 MPC 代替分散式 MPC 能取得的潜在经济效益. 下文如下展开: 第 1 节介绍系统描述以及本文需要的基础数学工具, 第 2 节介绍如何基于 LMI 利用迭代的方法求解分散式 LQR 基准, 第 3 节介绍如何利用集中式与分散式 LQR 基准进行 MPC 经济性能评估, 第 4 节通过两个仿真例子分别说明本文提出的分散式 LQR 基准与经济性能评估方法的价值.

1 系统描述与数学工具

1.1 系统描述

假设整个化工过程由 m 个相互关联的线性子系统构成, 每个子系统可表示为如下的离散状态空间模型:

$$x_i(k+1) = A_{ii}x_i(k) + B_{ii}u_i(k) + M_iw_i(k) + \sum_{j=1}^{m,j\neq i}(A_{ij}x_j(k) + B_{ij}u_j(k))$$

$$y_i(k) = C_ix_i(k) + N_iw_i(k) \tag{1}$$

其中, $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $u_i \in \mathbf{R}^{l_i}$, $y_i \in \mathbf{R}^{p_i}$, $i = 1, \cdots, m$, 分别代表各子系统的状态、输入和输出变量. A_{ij}, B_{ij}, M_i, C_i, N_i, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, m$, 是具有相应维数的系统矩阵. $w_i(k) \in \mathbf{R}^{q_i}$ 是均值为零、协方差为 Ω_i 的高斯白噪声. $\sum_{j=1}^{m,j\neq i}(A_{ij}x_j(k) + B_{ij}u_j(k))$ 代表各子系统之间的状态耦合与输入耦合. 设整个过程的状态变量为 $x = [x_1^{\mathrm{T}} \cdots x_i^{\mathrm{T}} \cdots x_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, 输入变量为 $u = [u_1^{\mathrm{T}} \cdots u_i^{\mathrm{T}} \cdots u_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^l$, 输出变量为 $y = [y_1^{\mathrm{T}} \cdots y_i^{\mathrm{T}} \cdots y_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^p$. 则集中式的系统可以表示为

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Mw(k) \\ &y(k) = Cx(k) + Nw(k) \end{aligned} \tag{2}$$

集中式的系统矩阵 A, B, M, C, N 由分散式系统矩阵对应组合而成, 这里不再赘述. 本文假定集中式系统 (A, B) 为能控对, (A, C) 为能观对. 式 (1) 与式 (2) 所表述的对象是完全等价的, 分开列写是为了便于下文描述分散式 MPC 与集中式 MPC.

1.2 分散式 MPC 与集中式 MPC

采用分散式 MPC 结构时, 针对式 (1) 表示的化工过程, 为简化问题形式, 本文假设每个子系统对应的 MPC 为

$$\begin{aligned} &\min \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{2}\left\{y_i(t)^{\mathrm{T}}Q_iy_i(t) + u_i(t)^{\mathrm{T}}R_iu_i(t)\right\} \\ &\text{s.t.} \quad x_i(t+1) = A_{ii}x(t) + B_{ii}u_i(t) \\ &\qquad\quad y_i(t) = C_ix_i(t) \\ &\qquad\quad u_i^{\min} \le u_i(t) \le u_i^{\max} \end{aligned} \tag{3}$$

其中, Q_i, R_i 为对称权重矩阵, $u_i^{\min}$, $u_i^{\max}$ 为控制上、下限, N 为预测时域和控制时域. 从式 (3) 可以看出, 每个子系统在设计 MPC 时忽略了互相之间的状态耦合与输入耦合. 式 (3) 表达的是一个常规控制问题, 设定点追踪问题可以通过简单的坐标变换转化为常规控制问题. 采用集中式 MPC 时, 针对式 (2) 表示的整个过程模型设计的 MPC 为

$$\begin{aligned} &\min \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{2}\left\{y(t)^{\mathrm{T}}Qy(t) + u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t)\right\} \\ &\text{s.t.} \quad x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ &\qquad\quad y(t) = Cx(t) \\ &\qquad\quad u^{\min} \le u(t) \le u^{\max} \end{aligned} \tag{4}$$

其中, $Q = \mathrm{diag}\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_m\}$, $R = \mathrm{diag}\{R_1, R_2, \cdots, R_m\}$.

1.3 LQR 基准

MPC 性能评估的一类重要的参考基准就是 LQG 基准. 由于 LQG 基准不考虑输入约束, 只有当工作点距离输入输出约束边界较远时, LQG 基准才可以客观反映 MPC 性能. 系统状态可测时, LQG 问题退化为 LQR 问题. 本文基于 LQR 基准对分散式 MPC 进行性能评估. 以下首先给出求解 LQR 基准的数学工具.

对于式 (2) 表达的集中式系统, 忽略输入约束, 采用状态反馈控制器 $u(k)=Kx(k)$, 定义系统的控制目标为 $J=\min \mathrm{E}\{x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru\}$, 则性能指标 J 与对应的状态反馈增益 K 可通过如下的优化命题求解[15]:

$$\begin{aligned} J=&\min_{K,P,\Phi_y,\Phi_u,G}\ \mathrm{tr}(Q\Phi_y)+\mathrm{tr}(R\Phi_u)\\ \text{s.t.}\quad &\begin{bmatrix}\Phi_y & CG & N\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0\\ &\begin{bmatrix}\Phi_u & KG\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P\end{bmatrix}>0\\ &\begin{bmatrix}P & AG & M\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0 \end{aligned}\tag{5}$$

其中, Φ_y, Φ_u 分别代表系统输出与输入的协方差, P 是 $n\times n$ 对称正定矩阵, G 是 $n\times n$ 满秩矩阵 (G 是一个扩展参数, 起到了辅助变量的作用[15]). Ω 代表噪声 $w(k)$ 的协方差, $*$ 表示矩阵的对称部分.

式 (5) 中的优化命题得到的就是集中式系统的 LQR 性能基准. 只需要通过简单的非线性变换 $L=KG$, 优化命题 (5) 就可以转化为 LMI 问题, 目前已经有许多成熟的算法可以求解 LMI. 利用 LQR 基准可以对集中式 MPC 的控制性能进行评估. 而对分散式 MPC 进行控制评估, 由于各子系统间存在状态耦合与输入耦合, 不能直接利用 LQR 基准对每个子系统的 MPC 控制器进行评估, 应该采用分散式的 LQR 基准, 即在优化命题 (5) 中, 对状态反馈控制器 $u(k)=Kx(k)$, 加入块对角约束 $K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_m\}$, K_i 表示第 i 个子系统的状态反馈增益. 第 3 节中将提出一种迭代的方法处理控制器的块对角约束, 得到分散式 LQR 基准.

2 分散式 LQR 基准

自从 LQR 基准问世以来, 学术界一直没有停止对分散式 LQR 基准的研究, 但是目前尚未有一套完善的解决方法. 由于问题本身非凸的特性, 主要的研究成果都是获得 LQR 基准的上界或下界. 文献 [16] 提出一种迭代的方法处理 Riccati 方程中的块对角结构, 迭代结果会根据不同的初值收敛到不同的局部最优点. 文献 [17] 提出了一种参数空间优化方法处理分散式控制问题, 所得结果不依赖于迭代初始值, 但通常情况下收敛不到最优值. 文献 [15] 基于 LMI 的方法, 通过对扩展参数加入块对角约束实现控制器的块对角约束, 不需要进行迭代. 由于扩展参数释放了一定的自由度, 文献 [15] 的方法进一步减小了文献 [17] 结果的保守性, 但文献 [15] 的方法仍然是相当保守的. 第 2 节的主要贡献就是提出了一种基于 LMI 的迭代方法求解分散式 LQR 基准, 该方法显著降低了现有方法的保守性.

在优化命题 (5) 中, 当 K 具有块对角结构 $K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_m\}$ 时, 若令 $L=KG$, 则有:

$$\begin{bmatrix}L_1\\ L_2\\ \vdots\\ L_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & K_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & K_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\\ \vdots\\ G_m\end{bmatrix}\tag{6}$$

其中, L_i, G_i 分别表示 L 和 G 的行块. 显然, L_i 的每一行 $L_{i(j)}$ 都是 G_i 各行 $G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}$ 的线性组合, 即 $L_{i(j)}\in\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}$. 又因为 G 是满秩方阵, G 的各行线性不相关, 所以只要满足 $L_{i(j)}\in\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}$, 就必然存在唯一的块对角矩阵 $K=LG^{-1}$ 满足式 (6). 以上分析说明, K 的块对角结构与 $L_{i(j)}\in\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}$ 等价. 由此本文提出以下的迭代方法求解分散式 LQR 基准.

算法 1.

步骤 1. 设 $n=1$, 选择任意一个合适的状态反馈增益 $K^{(1)}$.

步骤 2. 计算优化命题:

$$\begin{aligned} J^{(n)}=&\min_{P,\Phi_y,\Phi_u,G}\ \mathrm{tr}(Q\Phi_y)+\mathrm{tr}(R\Phi_u)\\ \text{s.t.}\quad &\begin{bmatrix}\Phi_y & CG & N\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0\\ &\begin{bmatrix}\Phi_u & K^{(n)}G\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P\end{bmatrix}>0\\ &\begin{bmatrix}P & AG & M\\ * & G+G^{\mathrm{T}}P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0 \end{aligned}\tag{7}$$

再令 $G^{(n)}=G$, G 为式 (7) 优化命题的计算结果.

步骤 3. 计算优化命题:

$$J^{(n)}=\min_{L,P,\Phi_y,\Phi_u,G}\ \mathrm{tr}(Q\Phi_y)+\mathrm{tr}(R\Phi_u)$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{bmatrix}\Phi_y & CG & N\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_u & L\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P\end{bmatrix}>0$$

$$\begin{bmatrix}P & AG & M\\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0\\ * & * & \Omega^{-1}\end{bmatrix}>0 \tag{8}$$

$$L_{i(j)}\in \mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}$$

$$\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}=\mathrm{span}\{G^{(n)}_{i(1)},\cdots,G^{(n)}_{i(n_i)}\},\quad i=1,\cdots,m \tag{9}$$

再令 $n=n+1$, $K^{(n)}=LG^{-1}$, 其中 L, G 为以上优化命题的计算结果.

步骤 4. 如果 $|J^{(n-1)}-J^{(n)}|<\epsilon$ (ϵ 是给定的很小的正数), 停止, $J^{(n)}$ 为分散式 LQR 能取得的性能指标, 否则返回步骤 2.

在上述迭代过程中, 步骤 2 和步骤 3 中的优化命题都是 LMI 问题. 步骤 3 中首先根据已知的状态反馈增益 $K^{(n)}$ 计算出对应的 $G^{(n)}$, 步骤 4 再在 $G^{(n)}$ 的行空间约束下求出对应最优的状态反馈增益 $K^{(n+1)}$, 如此反复迭代. 注意步骤 3 中优化命题加入的行空间约束 $L_{i(j)}\in\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}$ 和 $\mathrm{span}\{G_{i(1)},\cdots,G_{i(n_i)}\}=\mathrm{span}\{G^{(n)}_{i(1)},\cdots,G^{(n)}_{i(n_i)}\}$ 为线性约束. 由于增加了变量 L 与 G 的行空间约束, 步骤 3 中得到的状态反馈增益 K 必定具有块对角结构. 在每一步迭代中, 优化命题的目标函数相同, 且上一次优化求得的解同时是新的优化命题的可行解, 因此每一步迭代目标函数必定下降或不变, 所以上述迭代过程必然收敛. 第 4 节中将通过一个简单的例子说明本文提出的迭代方法显著降低了现有方法计算分散式 LQR 性能基准的保守性.

3 经济性能评估

近年来, 一些学者利用 LQG 基准对 MPC 进行经济性能评估, 采用一组随机优化命题同时确定稳态工作点与输入输出方差. 由于 LQG 基准中输入输出方差关系只能通过调节权重隐式地表达为一组 Riccati 方程, 为了获得输入输出方差的解析关系, 文献 [18−20] 中通过改变 LQG 问题的输入输出权重 "逐点求解" 一系列 Pareto 最优解, 再用数值拟合的方法确定输入输出方差关系曲线 (Trade-off curve), 这导致了较大的计算成本以及一定的计算精度问题. 尤其对于多变量的情况, 拟合一个复杂关系曲面的计算代价是十分庞大的. 一种较为合理的简化方法[8] 是按照重要程度固定输入之间的相对权重与输出之间的相对权重, 再通过改变输入输出间的权重确定方差关系曲线. 然而由于约束的存在, 不同局部输入输出间的实际相对权重可能是不同的, 一个全局最优的相对权重是难以确定的. 文献 [21] 给出了一个综合的框架分析约束与波动对 MPC 经济性能的影响, 采用基于线性矩阵不等式 (LMI) 的方法确定 LQG 基准, 并以 "最小能量" 基准的形式通过迭代求解 MPC 经济指标. 文献 [21] 的迭代过程避免了对多变量方差关系的拟合, 具有一定的优势, 但由于问题本身非凸的特性, 文献 [21] 的迭代方法同样不能保证最优性. 并且, 文献 [21] 的评估方法只能指出控制性能的调整方向, 但不能计算最大的潜在经济效益. 本节采用相同的框架进行 MPC 经济性能评估, 提出了一种迭代方法求解经济性能评估的随机优化问题, 可以从一定程度上克服已有方法的不足, 迭代结果可以收敛到局部最优点, 但同样不能保证全局最优. 以下首先利用 LQR 基准对集中式 MPC 进行经济性能评估, 在此基础上再利用第 2 节给出的迭代方法处理控制器的块对角约束, 得到分散式 MPC 的经济性能结果. 第 4 节中将通过对重油分馏塔控制的仿真说明本节方法的有效性.

首先考虑集中式 MPC 的经济性能评估. LP-MPC (Linear programming MPC)[22] 的工业应用十分广泛, 其稳态优化层求解如下的线性规划问题:

$$J=\max_{y\ u}\ \sum_{i=1}^{p}a_iy_i-\sum_{j=1}^{m}b_ju_j$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &\Delta y=K\Delta u,\ \ y=y_0+\Delta y,\ \ u=u_0+\Delta u\\ &L_{yi}\le y_i\le H_{yi}\\ &L_{uj}\le u_j\le H_{uj}\end{aligned} \tag{10}$$

其中, y_i, $i=1,2,\cdots,p$ 和 u_j, $j=1,2,\cdots,m$, 是需要优化的被控变量与操作变量的稳态工作点, a_i 与 b_j 为相应的经济指标参数, K 代表稳态增益, y_0 和 u_0 代表当前的工作点, L_{yi}, H_{yi}, L_{uj}, H_{uj} 是对应被控变量与操作变量的边界约束. 当过程噪声满足高斯白噪声假设时, 稳态操作点 y_i 与 u_j 满足正态分布. 性能指标的期望值可以表示为

$$\mathrm{E}\,[J]=\sum a_i\bar{y}_i-\sum b_j\bar{u}_j \tag{11}$$

其中, $\bar{y}_i$ 与 $\bar{u}_j$ 分别表示被控变量与操作变量的均值. 工作点边界约束可以表示为概率约束:

$$\begin{aligned} &Pr\{L_{yi} \le \bar{y}_i \le H_{yi}\} > \alpha_i \\ &Pr\{L_{uj} \le \bar{u}_j \le H_{uj}\} > \beta_j \end{aligned} \tag{12}$$

其中, α_i 与 β_j 为置信度 (通常取 95 %). 式 (12) 表达的含义是 $\bar{y}_i$ 位于其约束边界 (L_{yi}, H_{yi}) 内的概率为 α_i, $\bar{u}_j$ 位于其约束边界 (L_{uj}, H_{uj}) 内的概率为 β_j. 由于 y_i 与 u_j 满足正态分布, 式 (11) 可以进一步改写为

$$\begin{aligned} &L_{yi}+F^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\Phi_{yi}} \le \bar{y}_i \le H_{yi} - F^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\Phi_{yi}} \\ &L_{uj}+F^{-1}(\beta_j)\sqrt{\Phi_{uj}} \le \bar{u}_j \le H_{uj} - F^{-1}(\beta_j)\sqrt{\Phi_{uj}} \end{aligned} \tag{13}$$

其中, F^{-1} 表示高斯分布函数的逆函数, Φ_{yi}, Φ_{uj} 表示对应各输出与输入的方差, 即协方差矩阵 Φ_y 与 Φ_u 的对角线上第 i 或第 j 个元素. 当 Φ_y 与 Φ_u 满足式 (5) 中的 LQR 基准时, 可以通过如下的随机优化命题进行 MPC 性能评估:

$$\begin{aligned} &E_c = \max_{\bar{y},\bar{u},\Phi_y,\Phi_u,P,G,L} \sum a_i\bar{y}_i - \sum b_j\bar{u}_j \\ &\text{s.t.}\quad \Delta y = K\Delta u,\ \ y = y_0 + \Delta y,\ \ u = u_0 + \Delta u \\ &L_{yi} + F^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\Phi_{yi}} \le \bar{y}_i \le H_{yi} - F^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\Phi_{yi}} \\ &L_{uj} + F^{-1}(\beta_j)\sqrt{\Phi_{uj}} \le \bar{u}_j \le H_{uj} - F^{-1}(\beta_j)\sqrt{\Phi_{uj}} \\ &\begin{bmatrix} \Phi_y & CG & N \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0 \\ * & * & \Omega^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} \Phi_u & KG \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} P & AG & M \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0 \\ * & * & \Omega^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

式 (14) 中的随机优化命题同时考虑了过程的控制性能与经济性能, 求解的结果既可以得到集中式 MPC 最优的工作点以及能取得的经济性能 (这里定义为 E_c), 同时可以得到对应的输入与输出方差, 为控制参数调节提供参考. 但是, 由于约束中同时存在方差与标准差, 式 (14) 中的优化命题不是 LMI 问题, 事实上, 式 (14) 是一个非凸的优化命题. 要完善地求解优化命题 (14) 具有较大的难度, 本文提出如下的迭代方法得到式 (14) 的局部最优解.

算法 2.

步骤 1. 确定初始可行的输出输入方差 $\Phi_y^{(0)}$, $\Phi_u^{(0)}$, 可以用当前工况计算. 置 $n = 0$.

步骤 2. 计算优化命题:

$$\begin{aligned} &E_c = \max_{\bar{y},\bar{u},\Phi_y,\Phi_u,P,G,L} \sum a_i\bar{y}_i - \sum b_j\bar{u}_j \\ &\text{s.t.}\quad \Delta y = K\Delta u,\ \ y = y_0 + \Delta y,\ \ u = u_0 + \Delta u \\ &L_{yi}+F^{-1}(\alpha_i)\frac{\Phi_{yi}}{\sqrt{\Phi_{yi}^{(n)}}} \le \bar{y}_i \le H_{yi} - F^{-1}(\alpha_i)\frac{\Phi_{yi}}{\sqrt{\Phi_{yi}^{(n)}}} \\ &L_{uj}+F^{-1}(\beta_j)\frac{\Phi_{uj}}{\sqrt{\Phi_{uj}^{(n)}}} \le \bar{u}_j \le H_{uj} - F^{-1}(\beta_j)\frac{\Phi_{uj}}{\sqrt{\Phi_{uj}^{(n)}}} \\ &\begin{bmatrix} \Phi_y & CG & N \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0 \\ * & * & \Omega^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} \Phi_u & KG \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} P & AG & M \\ * & G+G^{\mathrm{T}}-P & 0 \\ * & * & \Omega^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

步骤 3. 如果 $|\Phi_y^{(n)} - \Phi_y^{(n-1)}| + |\Phi_u^{(n)} - \Phi_u^{(n-1)}| < \epsilon$ (ϵ 是给定的很小的正数), 停止计算, $E_c^{(n)}$ 为最终的评估结果. 否则返回步骤 2.

评估分散式 MPC 的经济性能相当于在集中式 MPC 的经济性能评估问题 (14) 中加入控制器的块对角约束, 即:

$$\begin{aligned} &L = KG \\ &K = \mathrm{diag}\{K_1, K_2, \cdots, K_m\} \end{aligned} \tag{14}$$

第 2 节中已经提出了处理控制器的块对角约束的迭代方法, 因此, 利用算法 2 对分散式 MPC 进行经济性能评估, 只需要在每次迭代计算式 (15) 中的优化命题时利用第 2 节的迭代算法处理控制器的块对角约束即可.

4 案例分析

例 1. 分散式 LQR 基准.

为说明第 2 节中的迭代方法求解分散式 LQR 基准具有较小的保守性, 本例采用与文献 [15] 中相同的数值仿真案例. 考虑式 (2) 表达的系统, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8189 & 0.0863 & 0.0900 & 0.0813 \\ 0.2524 & 1.0033 & 0.0313 & 0.2004 \\ -0.0545 & 0.0102 & 0.7901 & -0.2580 \\ -0.1918 & -0.1034 & 0.1602 & 0.8604 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0.0045 & 0.0044 \\ 0.1001 & 0.0100 \\ 0.0003 & -0.0136 \\ -0.0051 & 0.0936 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} 0.0953 \\ 0.0145 \\ 0.0862 \\ -0.0011 \end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \Omega=1$$

要求对上述系统设计一个分散式状态反馈控制器, 第 1 个控制输出通过前两个状态反馈, 第 2 个输出通过后两个状态反馈, 即

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中, $K_1, K_2 \in \mathbf{R}^{1\times 2}$. 设分散式系统控制的性能指标为 $J=\min \mathrm{E}\{x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru\}$, 其中,

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

应用文献 [15] 中的方法得到的控制器与对应的性能指标为

$$K_{d1}=\begin{bmatrix} -1.4891 & -1.6600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1211 & -0.0137 \end{bmatrix}$$

$$J_{d1}=0.1580$$

采用第 3 节提出的迭代方法求解, 对应的控制器与性能指标为

$$K_{d2}=\begin{bmatrix} -0.4724 & -0.3003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3772 & -0.1852 \end{bmatrix}$$

$$J_{d2}=0.0744$$

从计算结果可以看出, 本文提出的迭代方法明显改善了文献 [15] 中方法求解分散式 LQR 基准的保守性. 为进一步说明本文迭代方法的优势, 用式 (5) 计算集中式 LQR 性能基准, 得到的结果为 $J_c=0.0733$. J_{d2} 与 J_c 相当接近, 又考虑到 J_{d2} 必然大于 J_c, 说明本文的迭代方法具有较小的保守性.

例 2. MPC 经济性能评估.

壳牌重油分馏塔的控制问题受到学术界广泛研究[19, 21]. 过程模型和扰动模型分别为

$$T(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{4.05}{50s+1}\mathrm{e}^{-27s} & \dfrac{1.77}{60s+1}\mathrm{e}^{-28s} & \dfrac{5.88}{50s+1}\mathrm{e}^{-27s} \\ \dfrac{5.39}{50s+1}\mathrm{e}^{-18s} & \dfrac{5.72}{60s+1}\mathrm{e}^{-14s} & \dfrac{6.90}{40s+1}\mathrm{e}^{-15s} \\ \dfrac{4.38}{33s+1}\mathrm{e}^{-20s} & \dfrac{4.42}{44s+1}\mathrm{e}^{-22s} & \dfrac{7.2}{19s+1} \end{bmatrix}$$

$$N(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1.20}{45s+1}\mathrm{e}^{-27s} & \dfrac{1.44}{40s+1}\mathrm{e}^{-27s} \\ \dfrac{1.53}{25s+1}\mathrm{e}^{-15s} & \dfrac{1.83}{20s+1}\mathrm{e}^{-15s} \\ \dfrac{1.14}{27s+1} & \dfrac{1.26}{32s+1} \end{bmatrix}$$

其中, 被控变量: y_1 代表分馏器顶部产品成分, y_2 代表分馏器侧线产品成分, y_3 代表分馏器底部回流温度. 操作变量: u_1 代表分馏器顶部产品抽出率, u_2 代表分馏器侧线产品抽取率, u_3 代表分馏器底部回流热负荷. 扰动变量: d_1 为塔中部回流热负荷, d_2 为塔顶的回流热负荷. 设该过程由三个分散式 MPC 控制, $T(s)$ 对角线上的传递函数. 利用 Matlab MPC 工具箱设计控制器, 取预测时域 $P=120$, 控制时域 $M=5$, 输入输出约束都为 $[-1,1]$, 扰动是均值为 0, 标准差为 2 的相互独立的高斯白噪声. 假设稳态优化的目标函数为 $E_c=\min(-\bar{y}_1-\bar{y}_2+\bar{u}_3)$. 利用第 3 节中的方法分别对集中式 MPC, 分散式 MPC 进行经济性能评估, 并根据评估结果分别调整 MPC 参数, 仿真验证经济性能评估结果. 设输入输出概率约束的置信度为 95.4 %, 即 $F^{-1}(\alpha_i)=F^{-1}(\beta_j)=2$. 对应的评估结果与仿真验证结果见表 1.

表 1　当前工况、评估结果与验证结果

Table 1　Current working condition, assessment results, and verification

	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	E_c
当前工况	0.3868	0.1547	−0.4617	0.8221	−0.2124	−0.4170	−0.1245
集中式 MPC 评估	0.9080	0.7884	−0.0329	1.0000	−0.2511	−0.4588	−1.2376
分散式 MPC 评估	0.5905	0.2791	−0.5062	1.0000	−0.2886	−0.5015	−0.3681
集中式 MPC 验证	0.7406	0.4628	−0.1661	0.9041	−0.2505	−0.3988	−0.8046
分散式 MPC 验证	0.4888	0.2166	−0.4590	0.9115	−0.2435	−0.4518	−0.2536

从表 1 可以看出, 评估结果对于参数调整具有积极的指导意义. 当前工况是指当前正在运行的分散式 MPC 的稳态工况, 此时被控变量 y_1 与 y_2 的波动范围均已接近约束边界, 取得的经济目标为 -0.1245. 利用第 3 节中的方法进行经济性能评估, 得到分散式 MPC 能取得的潜在经济目标为 -0.3681, 根据评估结果调整各子控制器参数后, 得到的经济目标为 -0.2536. 评估集中式 MPC 能取得的经济目标为 -1.2376, 通过仿真验证得到的经济目标为 -0.8046. 以上结果表明本文提出的经济性能评估方法可以从一定程度上表明分散式 MPC 与集中式 MPC 的潜在经济效益. 仿真结果明显劣于评估结果, 主要原因在于: 1) 评估方法采用的 LQR 基准中状态已知, 而本例中状态是未知的; 2) 评估方法中输入与输出约束是概率约束, 而 MPC 中输入约束为硬约束; 3) 参数调整不到位. 值得注意的是, 集中式 MPC 与分散式 MPC 的经济性能评估结果之比为 3.36, 通过仿真验证得到的比值为 3.17, 这说明本文的经济性能评估方法对控制结构的选择具有较高的参考价值.

5 结论

本文研究了分散式 MPC 的性能评估. 首先提出了一种基于 LMI 的迭代方法求解分散式 LQR 基准, 本文的迭代方法显著降低了现有方法的保守性. 再通过一组随机优化命题将 LQR 基准引入 MPC 稳态优化, 对集中式 MPC 与分散式 MPC 进行经济性能评估. 仿真结果表明本文提出的评估方法对控制器参数调整与结构选择具有重要的参考价值.

References

1 Cui H, Jacobsen E W. Performance limitations in decentralized control. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(4): 485−494

2 Scattolini R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review. *Journal of Process Control*, 2009, **19**(5): 723−731

3 Stewart B T, Venkat A N, Rawlings J B, Wright S J, Pannocchia G. Cooperative distributed model predictive control. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(8): 460−469

4 Harris T J. Assessment of control loop performance. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1989, **67**(5): 856−861

5 Huang B, Kadali R. *Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring: A Data-driven Subspace Approach*. Vol. 374. New York: Springer Verlag, 2008

6 Gao J P, Patwardhan R, Akamatsu K, Hashimoto Y, Emoto G, Shah S L, Huang B. Performance evaluation of two industrial MPC controllers. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(12): 1371−1387

7 Yang M Y, Jin X M, Chen F. Performance assessment of model predictive control in industrial distillation column. In: Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, China: IEEE, 2004. 637−641

8 Huang B, Shah S L. *Performance Assessment of Control Loops: Theory and Applications*. New York: Springer Verlag, 1999

9 Shah S L, Patwardhan R, Huang B. Multivariate controller performance analysis: methods, applications and challenges. *AIChE Symposium Series*, New York, USA, 2002. 190−207

10 Shah S L, Mitchell W, Shook D. Challenges in the detection, diagnosis and visualisation of controller performance data. *Computing and Control Engineering Journal*, 2005, **16**(4): 30−34

11 Patwardhan R S, Shah S L, Qi K Z. Assessing the performance of model predictive controllers. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2002, **80**(5): 954−966

12 Jain M, Lakshminarayanan S. Estimating performance enhancement with alternate control strategies for multiloop control systems. *Chemical Engineering Science*, 2007, **62**(17): 4644−4658

13 Kariwala V, Forbes J F, Meadows E S. Minimum variance benchmark for decentralized controllers. In: Proceedings of the 2005 American Control Conference. Portland, OR, USA: IEEE, 2005. 1437−1442

14 Kariwala V. Fundamental limitation on achievable decentralized performance. *Automatica*, 2007, **43**(10): 1849−1854

15 De Oliveira M C, Geromel J C, Bernussou J. Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 2002, **75**(9): 666−679

16 Geromel J C, Peres P L D. Decentralized load-frequency control. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, 1985, **132**(5): 225−230

17 Geromel J C, Bernussou J, Peres P L D. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, 1994, **30**(10): 1565−1578

18 Zhao C, Zhao Y, Su H Y, Huang B. Economic performance assessment of advanced process control with LQG benchmarking. *Journal of Process Control*, 2009, **19**(4): 557−569

19 Zhao C, Su H Y, Gu Y, Chu J. A pragmatic approach for assessing the economic performance of model predictive control systems and its industrial application. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2009, **17**(2): 241−250

20 Xu Q L, Zhao C, Zhang D F, An A M, Zhang C. Data-driven LQG benchmarking for economic performance assessment of advanced process control system. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, CA, USA: AACC, 2011. 5085−5090

21 Xu F W, Huang B, Akande S. Performance assessment of model predictive control for variability and constraint tuning. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2007, **46**(4): 1208−1219

22 Ying, C M, Joseph B. Performance and stability analysis of LP-MPC and QP-MPC cascade control systems. *AIChE Journal*, 1999, **45**(7): 1521−1534

刘 苏 浙江大学智能系统与控制研究所硕士研究生. 2010 年获北京理工大学化工与环境学院学士学位. 主要研究方向为 MPC 性能评估.
E-mail: liusu@zju.edu.cn
(**LIU Su** Master student at the Institute of Cyber-System and Control, Zhejiang University. He received his bachelor degree from Beijing Institute of Technology in 2010. His main research interest is performance assessment of model predictive control.)

冯毅萍 浙江大学智能系统与控制研究所高级工程师. 2008 年获浙江大学控制系工学博士学位. 主要研究方向为复杂工业系统建模及优化, 智能工厂仿真技术. E-mail: ypfeng@iipc.zju.edu.cn
(**FENG Yi-Ping** Senior engineer at the Institute of Cyber-System and Control, Zhejiang University. She received her Ph. D. degree from Zhejiang University in 2008. Her research interest covers complex system modeling and optimization, and smart plant simulation technology.)

荣 冈 浙江大学智能系统与控制研究所教授. 1989 年获浙江大学工业自动化专业博士学位. 主要研究方向为智慧供应链和智能工厂整体解决方案, 流程工业生产执行系统, 数据校正与数据挖掘, 复杂工业过程的虚拟现实与信息可视化, 先进控制理论及其应用. 本文通信作者.
E-mail: grong@iipc.zju.edu.cn
(**RONG Gang** Professor at the Institute of Cyber-System and Control, Zhejiang University. He received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 1989. His research interest covers intelligent supply chain and the total solution of smart plant, manufacturing execution systems, data reconciliation and data mining, virtual reality and information visualization of complex industrial process, and advanced control theory and application. Corresponding author of this paper.)