第21卷 第5期
1995年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 21, No. 5
Sep., 1995

短 文

线性多变量反馈系统开闭环各类零极点关系描述

周 军
(兰州大学电子与信息科学系 兰州 730000)

摘 要

通过正(逆)开环系统概念，讨论了多变量反馈系统开闭环系统极点多项式对消与开闭环各类零极点结构特性的关系以及闭环系统零点的构成.

关键词: 多变量反馈系统,系统零极点,多项式对消,严格系统等价.

1 引言

多变量系统零极点结构特性已有结论[1-3],但多变量反馈系统类似问题的结论或限于特例[4,5]或不全面[6]，因而一般多变量反馈系统开闭环系统极点多项式对消常有混淆. 本文由正(逆)开环概念讨论了上述问题，给出不同对消与开闭环各类零极点转换的关系和闭环系统零点组成.

2 定义与基本关系

多变量反馈系统 S_C 由前向子系统 S_1 和反馈子系统 S_2 形成，$S_1 \to S_2$ 串联为正开环系统 S_P，$S_2 \to S_1$ 串联为逆开环系统 S_I，且 $S_i(i=1, 2)$ 是 PMD:$\{P_i(s), Q_i(s), R_i(s), W_i(s)\}$ 描述的 m_i 输入，l_i 输出，r_i 状态的系统. $P_i(s), Q_i(s)$, $R_i(s)$ 和 $W_i(s)$ 是适当维数的多项式矩阵,传递函数阵记 $G_i(s)$. 设 $m_1 = l_2$, $m_2 = l_1$, S_i, S_C, S_P, S_I 系统矩阵是

$$\Sigma_i = \left[\begin{array}{c|c} P_i(s) & Q_i(s) \\ \hline -R_i(s) & W_i(s) \end{array}\right], i = 1,2, \tag{1}$$

$$\Sigma_C = \left[\begin{array}{c} P_1(s) + Q_1(s)W_2(s)M^{-1}(s)R_1(s) \\ -Q_2(s)M^{-1}(s)R_1(s) \\ \hline -M^{-1}(s)R_1(s) \end{array}\right.$$

本文于1992年11月9日收到

$$\left.\begin{array}{c|c} Q_1(s)R_2(s)-Q_2(s)W_2(s)M^{-1}(s)W_1(s)R_2(s) & Q_1(s)W_2(s)M^{-1}(s)W_1(s)-Q_1(s) \\ P_2(s)+Q_2(s)M^{-1}(s)W_1(s)R_2(s) & -Q_2(s)M^{-1}(s)W_1(s) \\ \hline M^{-1}(s)W_1(s)R_2(s) & M^{-1}(s)W_1(s) \end{array}\right],$$

$$\Sigma_P=\left[\begin{array}{cc|c} P_1(s) & 0 & Q_1(s) \\ -Q_2(s)R_1(s) & P_2(s) & Q_2(s)W_1(s) \\ \hline -W_2(s)R_1(s) & -R_2(s) & W_2(s)W_1(s) \end{array}\right],$$

$$\Sigma_I=\left[\begin{array}{cc|c} P_1(s) & -Q_1(s)R_2(s) & Q_1(s)W_2(s) \\ 0 & P_2(s) & Q_2(s) \\ \hline -R_1(s) & -W_2(s)R_2(s) & W_1(s)W_2(s) \end{array}\right].$$

其中 $M(s)=I_1+W_1(s)W_2(s)$，I_1 是 l_1 阶单位阵，记

$$\hat{\Sigma}_C=\left[\begin{array}{cccc|c} P_1(s) & Q_1(s) & 0 & 0 & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) & 0 & -I_1 & W_1(s) \\ 0 & 0 & P_2(s) & Q_2(s) & 0 \\ 0 & I_2 & -R_2(s) & W_2(s) & 0 \\ \hline -R_1(s) & W_1(s) & 0 & 0 & W_1(s) \end{array}\right],$$

其中 I_2 是 m_1 阶单位阵. $M(s)$ 单模态时，从增广系统矩阵意义上 Σ_C 与 $\hat{\Sigma}_C$ 严格系统等价，即可由 $\hat{\Sigma}_C$ 讨论 Σ_C 零极点[7]. 本文仅限于 $M(s)$ 单模态的情形.

S_P, S_I 和 S_C 系统极点多项式 $\phi_P(s)$，$\phi_I(s)$ 和 $\phi_C(s)$ 有

$$\phi_P(s)=\phi_I(s)=|P_1(s)|\cdot|P_2(s)|, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\phi_C(s)/\phi_P(s)&=\phi_C(s)/\phi_I(s)\\&=\alpha|I_1+G_I(s)|\\&=\beta|I_2+G_P(s)|,\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $G_P(s)=G_2(s)G_1(s)$，$G_I(s)=G_1(s)G_2(s)$，α,β 是非零常数. 记 $Z_s^{(\cdot)}(P_s^{(\cdot)})$，$Z_G^{(\cdot)}(P_G^{(\cdot)})$，$Z_d^{(\cdot)}(Z_{i,d}^{(\cdot)},Z_{0,d}^{(\cdot)},Z_{i,0,d}^{(\cdot)})$表示(·)的系统零(极)点集、传递函数阵零(极)点集、解耦(输入解耦、输出解耦、输入输出解耦)零点集，定义见文[3]，则有

$$Z_s^{(\cdot)}=Z_G^{(\cdot)}+Z_d^{(\cdot)}, \tag{4}$$

$$P_s^{(\cdot)}=P_G^{(\cdot)}+Z_d^{(\cdot)}, \tag{5}$$

$$Z_d^{(\cdot)}=Z_{i,d}^{(\cdot)}+Z_{0,d}^{(\cdot)}-Z_{i,0,d}^{(\cdot)}, \tag{6}$$

$$Z_{i,d}^{(S_P)}=Z_{i,d}^{(S_1)}+Z_{i,d}^{(S_2)}+T_2^{(S_P)}, \tag{7}$$

$$Z_{0,d}^{(S_P)}=Z_{0,d}^{(S_1)}+Z_{0,d}^{(S_2)}+T_1^{(S_P)}, \tag{8}$$

$$Z_{i,d}^{(S_I)}=Z_{i,d}^{(S_1)}+Z_{i,d}^{(S_2)}+T_1^{(S_I)}, \tag{9}$$

$$Z_{0,d}^{(S_I)}=Z_{0,d}^{(S_1)}+Z_{0,d}^{(S_2)}+T_2^{(S_I)}, \tag{10}$$

$$P_s^{(S_P)}=P_G^{(S_P)}+Z_d^{(S_1)}+Z_d^{(S_2)}+T_2^{(S_P)}+T_1^{(S_P)} \tag{11}$$

$$P_s^{(S_I)}=P_G^{(S_I)}+Z_d^{(S_1)}+Z_d^{(S_2)}+T_1^{(S_I)}+T_2^{(S_I)}, \tag{12}$$

$$P_G^{(S_P)}+T_2^{(S_P)}+T_1^{(S_P)}=P_G^{(S_1)}+P_G^{(S_2)}, \tag{13}$$

$$P_G^{(S_I)} + T_1^{(S_I)} + T_2^{(S_I)} = P_G^{(S_1)} + P_G^{(S_2)}, \tag{14}$$

$T_2^{(S_P)}$ 表示 $G_P(s)$ 消去的 $G_2(s)$ 极点集，$T_1^{(S_P)}$ 表示 $G_P(s)$ 消去的 $G_1(s)$ 极点集. $T_2^{(S_I)}$, $T_1^{(S_I)}$ 类似. (7)—(14)式的证明见附录 A.

3 结论

定理 1. 系统 S_C 有 1) $Z_{i,d}^{(S_C)} = Z_{i,d}^{(S_P)}$, 2) $Z_{0,d}^{(S_C)} = Z_{0,d}^{(S_I)}$.

证明. 仅证 1), 由定义

$$Z_{i,d}^{(S_C)} = \left\{ s \left| \begin{bmatrix} P_1(s) & Q_1(s) & 0 & 0 & Q_1(s) \\ -R_1(s) & W_1(s) & 0 & -I_1 & W_1(s) \\ 0 & 0 & P_2(s) & Q_2(s) & 0 \\ 0 & I_2 & -R_2(s) & W_2(s) & 0 \end{bmatrix} \text{的 Smith 零点} \right. \right\}$$

$$= \left\{ s \left| \begin{bmatrix} P_1(s) & Q_1(s) & 0 & 0 \\ -R_1(s) & W_1(s) & 0 & -I_1 \\ 0 & 0 & P_2(s) & Q_2(s) \end{bmatrix} \text{的 Smith 零点} \right. \right\}$$

$$= \left\{ s \left| \begin{bmatrix} P_1(s) & Q_1(s) & 0 \\ -Q_2(s)R_1(s) & Q_2(s)W_1(s) & P_2(s) \end{bmatrix} \text{的 Smith 零点} \right. \right\}$$

$$= Z_{i,d}^{(S_P)}.$$

记 $T_2^{(S_P,S_I)}$ 是 $T_2^{(S_P)}$ 和 $T_2^{(S_I)}$ 对应 $G_2(s)$ 同一结构的极点的集, $\hat{T}_2^{(S_I)} = T_2^{(S_I)} - T_2^{(S_P,S_I)}$. 又 $Z_d^{(S_1)}$, $Z_d^{(S_2)}$, $T_2^{(S_P,S_I)}$ 属不同结构, 由(7)—(10)式和定理 1, 有

$$Z_{i,0,d}^{(S_C)} = Z_{i,0,d}^{(S_1)} + Z_{i,0,d}^{(S_2)} + T_2^{(S_P,S_I)}, \tag{15}$$

$$Z_d^{(S_C)} = Z_d^{(S_1)} + Z_d^{(S_2)} + T_2^{(S_P)} + \hat{T}_2^{(S_I)}. \tag{16}$$

由(13), (14)式和 $\hat{T}_2^{(S_I)}$ 的定义有 $\hat{T}_2^{(S_I)} \subset P_G^{(S_P)}$; 否则 $\hat{T}_2^{(S_I)} \subset T_2^{(S_P)}$, 但这意味着 $\hat{T}_2^{(S_I)} \subset T_2^{(S_P,S_I)}$, 与 $\hat{T}_2^{(S_I)}$ 定义矛盾. 因此, 有 $P_G^{(S_P)}$ 的子集 $P_G^{(S_P,1)}$, $\hat{P}_G^{(S_P)}$ 使

$$P_G^{(S_P,1)} = \hat{T}_2^{(S_I)}, \tag{17}$$

$$P_G^{(S_P,1)} + \hat{P}_G^{(S_P)} = P_G^{(S_P)}. \tag{18}$$

又 S_C 传递函数阵 $G_C(s) = G_1(s)[I_2 + G_P(s)]^{-1}$, $G_P(s)$ 中无 $T_1^{(S_P)}$ 结构, 从而 $[I_2 + G_P(s)]^{-1}$ 无 $T_1^{(S_P)}$ 的闭环对应结构. 将 $G_1(s)$ 与 $[I_2 + G_P(s)]^{-1}$ 视为串联关系, 则 $G_1(s)$ 的 $T_1^{(S_P)}$ 结构的元或是 S_C 的解耦零点, 或是 $G_C(s)$ 的极点. 但 $T_1^{(S_P)}$ 元是 S_C 的解耦零点与定理 1 矛盾. 因此 $T_1^{(S_P)} \subset P_G^{(S_C)}$, 即有 $P_G^{(S_C)}$ 子集 $P_G^{(S_C,1)}$, $\hat{P}_G^{(S_C)}$ 使

$$P_G^{(S_C,1)} = T_1^{(S_P)}, \tag{19}$$

$$P_G^{(S_C,1)} + \hat{P}_G^{(S_C)} = P_G^{(S_C)}. \tag{20}$$

设 $P(\cdot)$ 是集$(\cdot)$的首一多项式. 如 $P(\{1, 2\}) = (s-1)(s-2)$. 由(2)—(18)式, 有

$$\frac{\Phi_C(s)}{\Phi_P(s)} = \frac{P(Z_d^{(S_1)})P(Z_d^{(S_2)})P(T_2^{(S_P)})P(\hat{T}_2^{(S_I)})P(P_G^{(S_C,1)})P(\hat{P}_G^{(S_C)})}{P(Z_d^{(S_1)})P(Z_d^{(S_2)})P(T_2^{(S_P)})P(P_G^{(S_P,1)})P(T_1^{(S_P)})P(\hat{P}_G^{(S_P)})}. \tag{21}$$

又由文[5], 有

$$
\begin{aligned}
&|I_2 + G_P(s)| \\
&= 1 + \Sigma G_P(s) \text{ 的所有 1 阶既约主子式} \\
&\quad + \Sigma G_P(s) \text{ 的所有 2 阶既约主子式} \\
&\quad + \cdots + |G_P(s)| \\
&= \gamma \frac{n(s)}{p(s)}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

γ 是非零常数. $p(s)$ 是 $G_P(s)$ 所有各阶非零既约主子式的首一最小公分母, 则 $n(s)$, $p(s)$ 互质. 记 $\hat{p}(s)$ 是 $G_P(s)$ 所有阶所有既约非主子式首一最小公母扣除与 $p(s)$ 公因式的多项式,则

$$P(P_G^{(S_P)}) = p(s)\hat{p}(s). \tag{23}$$

由(3),(21),(23)式,有

$$\frac{P(\hat{T}_2^{(S_I)})P(\hat{P}_G^{(S_C)})}{P(P_G^{(S_P)})} = \frac{P(\hat{T}_2^{(S_I)})P(\hat{P}_G^{(S_C)})}{p(s)\hat{p}(s)} = \eta \frac{n(s)}{p(s)}.$$

注意到 $P(\hat{T}_2^{(S_I)}) = P(P_G^{(S_P,1)})|P(P_G^{(S_P)})$, 上式表明有 $\hat{P}_G^{(S_C)}$ 子集 $P_G^{(S_C,2)}$; $P_G^{(S_C,3)}$, $\hat{P}_G^{(S_P)}$ 子集 $P_G^{(S_P,2)}$,$P_G^{(S_P,3)}$,使

$$P_G^{(S_C,2)} + P_G^{(S_C,3)} = \hat{P}_G^{(S_C)}, \tag{24}$$

$$P(P_G^{(S_C,2)}) \cdot P(\hat{T}_2^{(S_C)}) = \hat{p}(s), \tag{25}$$

$$P(P_G^{(S_C,3)}) = n(s), \tag{26}$$

$$P_G^{(S_P,2)} + P_G^{(S_P,3)} = \hat{P}_G^{(S_P)}, \tag{27}$$

$$P(P_G^{(S_P,1)}) = P(\hat{T}_2^{(S_I)}) = \hat{p}_1(s), \tag{28}$$

$$P(P_G^{(S_P,2)}) = P(P_G^{(S_C,2)}) = \hat{p}_2(s), \tag{29}$$

$$P(P_G^{(S_P,3)}) = p(s). \tag{30}$$

其中 $\hat{p}_1(s)$、$\hat{p}_2(s) = p(s)$. 将(24)—(30)式代入(21)式,有

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi_C(s)}{\Phi_P(s)} &= \frac{P(Z_d^{(S_1)})P(Z_d^{(S_2)})P(T_2^{(S_P)})P(\hat{T}_2^{(S_I)})}{P(Z_d^{(S_1)})P(Z_d^{(S_2)})P(T_2^{(S_P)})P(P_G^{(S_P,1)})} \\
&\quad \cdot \frac{P(P_G^{(S_C,1)}) \cdot P(P_G^{(S_C,2)}) \cdot P(P_G^{(S_C,3)})}{P(T_1^{(S_P)}) \cdot P(P_G^{(S_P,2)}) \cdot P(P_G^{(S_P,3)})}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

(31)式表明 $\Phi_C(s)$ 与 $\Phi_P(s)$ 因式对消有

1) $P(Z_d^{(S_i)})$, $i = 1,2$ 对应 $S_i(i = 1,2)$ 解耦零点在 S_P, S_C 均为解耦零点;

2) $P(T_2^{(S_P)})$ 对应 $T_2^{(S_P)}$ 的 S_P 输入解耦零点为 S_C 输入解耦零点;

3) $P(\hat{T}_2^{(S_I)})$ 与 $P(P_G^{(S_P,1)})$ 对应 $P_G^{(S_P,1)}$ 的 $G_P(s)$ 极点在 S_C 为输出解耦零点;

4) $P(P_G^{(S_C,1)})$ 与 $P(T_1^{(S_P)})$ 对应 $T_1^{(S_P)}$ 的 S_P 输出解耦零点为 $G_C(s)$ 极点;

5) $P(P_G^{(S_C,2)})$ 与 $P(P_G^{(S_P,2)})$ 对应 $P_G^{(S_P,2)}$ 的 $G_P(s)$ 极点为 $G_C(s)$ 极点.

注意到 $\Phi_I(s)$ 与 $\Phi_P(s)$ 的结构意义不同, 所以 $\Phi_C(s)$ 与 $\Phi_I(s)$ 的对消与 $\Phi_C(s)$ 与 $\Phi_P(s)$ 的对消结构意义不尽相同. 因此多变量系统开环是矢量性的. 而且一般地,回差行列式 $|I_2 + G_P(s)|(|I_1 + G_I(s)|)$ 仅是 $G_P(s), G_C(s)$ 部分极点的关系.

定理 2. 系统 S_C 中成立, $Z_s^{(S_C)} = Z_s^{(S_1)} + P_s^{(S_2)}$.

证明. 不失一般设 $m_1 \geqslant l_1$,则 $\hat{\Sigma}_C$ 的任一包含前 $r_1 + r_2$ 行(列)的 $r_1 + r_2 + m_1 +$

l_1+l_1 阶子式作适当行列处理，并由 Laplace 定理得

$$(-1)^{\alpha}|P_2(s)|\begin{vmatrix} P_1(s) & Q_1(s)_{j_1\cdots j_{l_1}} \\ -R_1(s) & W_1(s)_{j_1\cdots j_{l_1}} \end{vmatrix}.$$

其中 $Q_1(s)_{j_1\cdots j_{l_1}}$ 表示 $Q_1(s)$ 第 $j_1,\cdots,j_{l_1}$ 列的子阵. $W_1(s)_{j_1\cdots j_{l_1}}$ 类似. 由系统零点定义即得结论. 证毕.

4　结语

多变量反馈系统开闭环系统极点多项式对消与结构特性在开闭环描述值和属性转换的关系可有多种理解，这是该问题易含混的主要原因. 正(逆)开环概念将其描述清楚. 特别在多变量反馈系统中，正(逆)开环状态未必相同使有关结论与单变量反馈系统相关结论有实质区别.

参　考　文　献

[1] Schrader C B and Sain K M. Research on system zeros: a survey. *Int. J. Control*, 1989, **50**(4): 1407—1433.

[2] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 科学出版社，1986，731—736.

[3] 王朝珠，王恩平. 多变量线性控制系统引论——微分算子多项式矩阵法. 科学出版社，1987，115—167.

[4] 叶庆凯，线性系统与多变量控制. 国防工业出版社，1989，138—154.

[5] Postlethwaite I and MacFarlane A G J. A complex variable approach to the analysis of linear multivariable feedback systems. Springer-Verlag, 1979.

[6] 白方周，庞国仲. 多变量频域理论与设计技术. 国防工业出版社，1988，81—91.

[7] 郑大钟. 线性系统理论. 清华大学出版社，1990，281—353.

附　录　A

证. 由文[4]，有

$$P_s^{(S_P)} = P_s^{(S_1)} + P_s^{(S_2)}, \tag{A1}$$

$$Z_d^{(S_i)} \subset Z_d^{(S_P)},\quad i=1,2. \tag{A2}$$

设 $\hat{Z}_d^{(S_P)} = Z_d^{(S_P)} - Z_d^{(S_1)} - Z_d^{(S_2)}$. 由 (A1), (A2) 式和(5)式，有

$$P_G^{(S_1)} + P_G^{(S_2)} = P_G^{(S_P)} + \hat{Z}_d^{(S_P)}, \tag{A3}$$

即 $\hat{Z}_d^{(S_P)}$ 对应 $G_1(s)$, $G_2(s)$ 结构对消的解耦零点. 由文[4]定理4，9，有

$$T_2^{(S_P)} = \hat{Z}_{i,d}^{(S_P)}, \tag{A4}$$

$$T_1^{(S_P)} = \hat{Z}_{0,d}^{(S_P)}. \tag{A5}$$

由 (A2),(A4) 式可得(7)式，类似得(8),(9),(10)式.

又 $T_2^{(S_P)}$, $T_1^{(S_P)}$ 分属 $G_1(s)$, $G_2(s)$, $\hat{Z}_d^{(S_P)}$ 中无输入输出解耦零点，即

$$\hat{Z}_d^{(S_P)} = T_1^{(S_P)} + T_2^{(S_P)}, \tag{A6}$$

或

$$Z_d^{(S_P)} = Z_d^{(S_1)} + Z_d^{(S_2)} + T_1^{(S_P)} + T_2^{(S_P)}. \tag{A7}$$

将 (A7) 式代入 (A1) 式，即得(11)式，类似得(12)式，将 (A6) 式代入 (A3) 式得(13)式，类似得(14)式.

CLOSED-AND-OPEN-LOOP RELATIONSHIPS OF ZEROS AND POLES IN MULTIVARIABLE FEEDBACK SYSTEMS

ZHOU JUN

(Dept. of Electronics & Information Sci. Lanzhou Univ. Lanzhou 730000)

ABSTRACT

This paper discusses the reducible factors between the closed-loop and open-loop system pole polynomials in linear multivariable feedback systems, and their relationships with between the closed-loop and open-loop system structures. The proof is given with concepts of positive and inverse open-loop systems. The closed-loop system zero constitution is also proved.

Key words: Multivariable feedback system, system zero and pole, reducible polynomial, restricted system equivalence.