短 文

动态系统白噪声估值器[1)]

邓自立 周 露 刘叔军
(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

摘 要

用现代时间序列分析方法提出了单输入单输出(SISO)动态系统的统一的和通用的白噪声估值器。它包括输入白噪声估值器和观测白噪声估值器,可处理非零均值白噪声、相关白噪声、不稳定和非最小相位系统. 对于雷达跟踪系统的仿真例子说明了其有效性和可应用性.

关键词: 白噪声估计,输入白噪声估值器,观测白噪声估值器,SISO 系统.

1 问题阐述

动态系统白噪声估计问题出现在 Kalman 滤波、信号处理、反射地震学、通讯等许多领域的理论和应用问题中[1-4]. 考虑 SISO 系统

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})w_t + C(q^{-1})v_t, \tag{1}$$

其中 y_t, w_t 和 v_t 分别为输出,输入白噪声和观测白噪声,多项式 A, B, C 有形式 $X(q^{-1}) = x_0 + x_1q^{-1} + \cdots + x_{n_x}q^{-n_x}, x_{n_x} \neq 0$,且 $a_0 = 1, c_0 = 1, b_0 = \cdots = b_{k-1} = 0$, $b_k \neq 0, k \geqslant 1, q^{-1}$ 是单位滞后算子,$q^{-1}s_t = s_{t-1}$. 假设 w_t 和 v_t 分别是带非零均值 μ_w 和 μ_v、方差为 σ_w^2 和 σ_v^2 的相关白噪声

$$E[(w_t - \mu_w)(v_i - \mu_v)] = r\delta_{ti}, \tag{2}$$

其中 E 为数学期望,$\delta_{tt} = 1, \delta_{ti} = 0 (t \neq i)$. 假设 A 和/或 B 可以是不稳定的,且 (A, B, C) 互质,设初始观测时刻 $t_0 = 0$. 最优白噪声估计问题是:基于观测 $\{y_{t+N}, \cdots, y_0\}$ 求 w_t 和 v_t 的线性最小方差估值器 $\hat{w}_{t|t+N}$ 和 $\hat{v}_{t|t+N}$. 对 $N > 0, N = 0$ 和 $N < 0$,分别称其为平滑器、滤波器和预报器. 自校正白噪声估计问题是:当系统中含有未知模型参数和噪声统计时,求渐近最优(即自校正)估值器 $\hat{w}_{t|t+N}$ 和 $\hat{v}_{t|t+N}$.

2 稳态最优白噪声估值器

引理. 观测 y_t 的 ARMA 新息模型为

$$A(q^{-1})y_t = \rho + D(q^{-1})e_t, \tag{3}$$

1) 国家自然科学基金资助课题.
本文于1993年8月26日收到

其中 $D(q^{-1})$ 是稳定的，$d_0=1$，阶次 $n_d=\max(n_c,n_b-k)$，新息过程 e_t 是零均值、方差为 σ_e^2 的白噪声，且

$$D(q^{-1})e_t = B(q^{-1})w'_t + C(q^{-1})v'_t, \tag{4}$$

$$w'_t = w_t - \mu_w, v'_t = v_t - \mu_v, \tag{5}$$

$$\rho = B(1)\mu_w + C(1)\mu_v. \tag{6}$$

证明. 将(5)式代入(1)式，类似文献[3]得证.

为了导出白噪声估值器，引入 Diophantine 方程

$$B(q^{-1}) = D(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-(N+1)}J(q^{-1}), \tag{7}$$

其中N为自然数，$F(q^{-1})=f_0+f_1q^{-1}+\cdots+f_Nq^{-N}$，$J(q^{-1})$是 $\max(n_a-N-1,n_d-1)$阶多项式，用比较系数法有递推公式

$$f_i = -\sum_{j=1}^{\min(i,n_d)} d_jf_{i-j} + b_i, f_0=0, i=1,2,\cdots,N, \tag{8}$$

式中规定若 $i>n_b$，则 $b_i=0$. 类似引入 Diophantine 方程

$$C(q^{-1}) = D(q^{-1})G(q^{-1}) + q^{-(N+1)}L(q^{-1}), \tag{9}$$

其中 $G(q^{-1})=g_0+g_1q^{-1}+\cdots+g_Nq^{-N}, g_0=1$，且有递推公式

$$g_i = -\sum_{j=1}^{\min(i,n_d)} d_jg_{i-j} + c_i, g_0=1, c_i=0(i>n_c), i=1,2,\cdots,N. \tag{10}$$

定理 1. 对 $N>0$，稳态最优白噪声估值器各为

$$\hat{w}_{t|t+N} = \mu_w + \sum_{i=0}^{N}[(\sigma_w^2f_i + rg_i)/\sigma_e^2]e_{t+i}, \tag{11}$$

$$\hat{v}_{t|t+N} = \mu_v + \sum_{i=0}^{N}[(\sigma_v^2g_i + rf_i)/\sigma_e^2]e_{t+i}, \tag{12}$$

$$\hat{w}_{t|t} = \mu_w + (r/\sigma_e^2)e_t, \hat{v}_{t|t} = \mu_v + (\sigma_v^2/\sigma_e^2)e_t, \tag{13}$$

$$\hat{w}_{t+N|t} = \mu_w, \hat{v}_{t+N|t} = \mu_v. \tag{14}$$

证明. 应用(4)，(7)和(9)式，e_t 有展式

$$e_t = F(q^{-1})w'_t + \alpha_t + G(q^{-1})v'_t + \beta_t, \tag{15}$$

其中 α_t 和 β_t 是如下 ARMA 过程：

$$D(q^{-1})\alpha_t = q^{-(N+1)}J(q^{-1})w'_t,\ D(q^{-1})\beta_t = q^{-(N+1)}L(q^{-1})v'_t. \tag{16}$$

由关于 w_t 和 v_t 的假设和(15)，(16)式，应用射影公式[2]有最优白噪声平滑器 $\hat{w}'_{t|t+N}$ 为

$$\hat{w}'_{t|t+N} = \sum_{j=0}^{t+N}[E(w'_te_j)/\sigma_e^2]e_j = \sum_{j=t}^{t+N}[(\sigma_w^2f_{j-t} + rg_{j-t})/\sigma_e^2]e_j. \tag{17}$$

置 $j-t=i$ 并利用(5)式得(11)式. 类似证得(12)式. 取 $N=0$，由(11)，(12)式，并注意 $f_0=0, g_0=1$ 得(13)式. 由(15)式和射影公式得(14)式.

定理 2. 最优白噪声估值器误差方差分别为

$$E(w_t - \hat{w}_{t|t+N})^2 = \sigma_w^2 - \sum_{i=0}^{N}(\sigma_w^2f_i + rg_i)^2/\sigma_e^2, N\geqslant 0, \tag{18}$$

$$E(v_t-\hat{v}_{t|t+N})^2=\sigma_v^2-\sum_{i=0}^{N}(\sigma_v^2 g_i+rf_i)^2/\sigma_\varepsilon^2, N\geqslant 0, \tag{19}$$

$$E(w_{t+N}-\hat{w}_{t+N|t})^2=\sigma_w^2, E(v_{t+N}-\hat{v}_{t|t+N})^2=\sigma_v^2. \tag{20}$$

证明. 由定理 1、(15)式及 w_t 和 v_t 的假设得证.

定理 3. 均值 μ_w 和 μ_v 可分别由下式求得:

$$\mu_w=[\rho-C(1)\mu_v]/B(1), \mu_v=[\rho-B(1)\mu_w]/C(1). \tag{21}$$

证明. 由(6)式即得(21)式.

定理 4. 设 d_i,σ_ε^2 已知,当噪声统计 σ_w^2,σ_v^2 和 r 未知时,它们可用解如下线性方程组求得:

$$\sigma_\varepsilon^2\sum_{j=i}^{n_d}d_jd_{j-i}=\sigma_w^2\sum_{j=i}^{n_s}b_jb_{j-i}+\sigma_v^2\sum_{j=i}^{n_s}c_jc_{j-i}+r\left(\sum_{j=i}^{n_s}b_jc_{j-i}+\sum_{j=i}^{n_s}c_jb_{j-i}\right), \tag{22}$$

其中 $i=0,1,\cdots,n_d$ 规定 $b_j=0(j>n_b)$ 或 $c_j=0(j>n_c)$, $n_s=\max(n_b,n_c)$.

证明. 计算(4)式两边的 MA 过程的相关函数得(22)式.

注意,在(22)式两边除以 σ_ε^2,则可直接解出增益系数 $\sigma_w^2/\sigma_\varepsilon^2,\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2$ 和 r/σ_ε^2.

当噪声统计 $\sigma_w^2,\sigma_v^2,r,\mu_w$ 或 μ_v, 和/或 $A(q^{-1})$ 是未知时, 利用 ARMA 新息模型(3)的递推增广最小二乘法 (RELS) 辨识器[2] 伴随最优白噪声估值器可得到自校正白噪声估值器[4].

3 仿真例子

所提出的白噪声估值器可应用于状态估计和信号处理. 考虑雷达跟踪系统[4]

$$s_{t+1}=s_t+\dot{s}_tT, \dot{s}_{t+1}=a\dot{s}_t+w_t, y_t=s_t+v_t, \tag{23}$$

其中 s_t 代表飞行目标在极坐标下的斜距或方位角,$\dot{s}_t$ 代表在时刻 tT 的速度, T 为采样周期, y_t 为 s_t 的观测信号, v_t 是观测噪声. 设 w_t 和 v_t 是零均值、方差各为 σ_w^2 和 σ_v^2 的独立的白噪声,参数 a,σ_w^2 和 σ_v^2 是未知的. 自校正跟踪问题是: 求 s_t 和 $\dot{s}_t$ 的自校正跟踪平滑器 $\hat{s}_{t|t+N}$ 和 $\hat{\dot{s}}_{t|t+N}$.

系统(23)有状态空间模型

$$x_{t+1}=Ax_t+Bw_t, y_t=Hx_t+v_t, \tag{24),(25}$$

$$x_t=\begin{bmatrix}s_t\\ \dot{s}_t\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & a\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, H=[1\ \ 0]. \tag{26}$$

由(24),(25)式迭代得

$$\begin{bmatrix}H\\ HA\end{bmatrix}x_t=\begin{bmatrix}y_t-v_t\\ y_{t+1}-HBw_t-v_{t+1}\end{bmatrix}. \tag{27}$$

取(27)式两边各项到由 $\{y_{t+N},\cdots,y_0\}$ 所生成的线性流形上的射影, 注意 $HB=0$, 有最优跟踪平滑器

$$\hat{x}_{t|t+N}=\begin{bmatrix}\hat{s}_{t|t+N}\\ \hat{\dot{s}}_{t|t+N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H\\ HA\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_t-\hat{v}_{t|t+N}\\ y_{t+1}-\hat{v}_{t+1|t+N}\end{bmatrix}. \tag{28}$$

由(23)式引出 y_t 具有形如(1)的模型

$$(1-aq^{-1})(1-q^{-1})y_t=Tq^{-2}w_t+(1-aq^{-1})(1-q^{-1})v_t. \tag{29}$$

令 $z_t=(1-q^{-1})y_t$，有 ARMA 新息模型

$$(1-aq^{-1})z_t=(1+d_1q^{-1}+d_2q^{-2})e_t. \tag{30}$$

基于 RELS 估值 $\hat{a}(t),\hat{d}_1(t),\hat{d}_2(t)$ 可求得自校正白噪声平滑器 $\hat{v}_{t|t+N},\hat{v}_{t+1|t+N}$，将它们代入(28)式得自校正跟踪平滑器。在仿真中取 $T=1,N=1$ 是已知的，设 $a=0.9,\sigma_w^2=4,\sigma_v^2=1$ 是未知的，仿真结果如图 1，图 2，图 3 所示。可看到 RELS 估值 $\hat{a}(t)$ 收敛于真实值 $a=0.9$，且自校正平滑器 $\hat{x}_{t|t+1}$ 对 x_t 具有良好的跟踪性能。

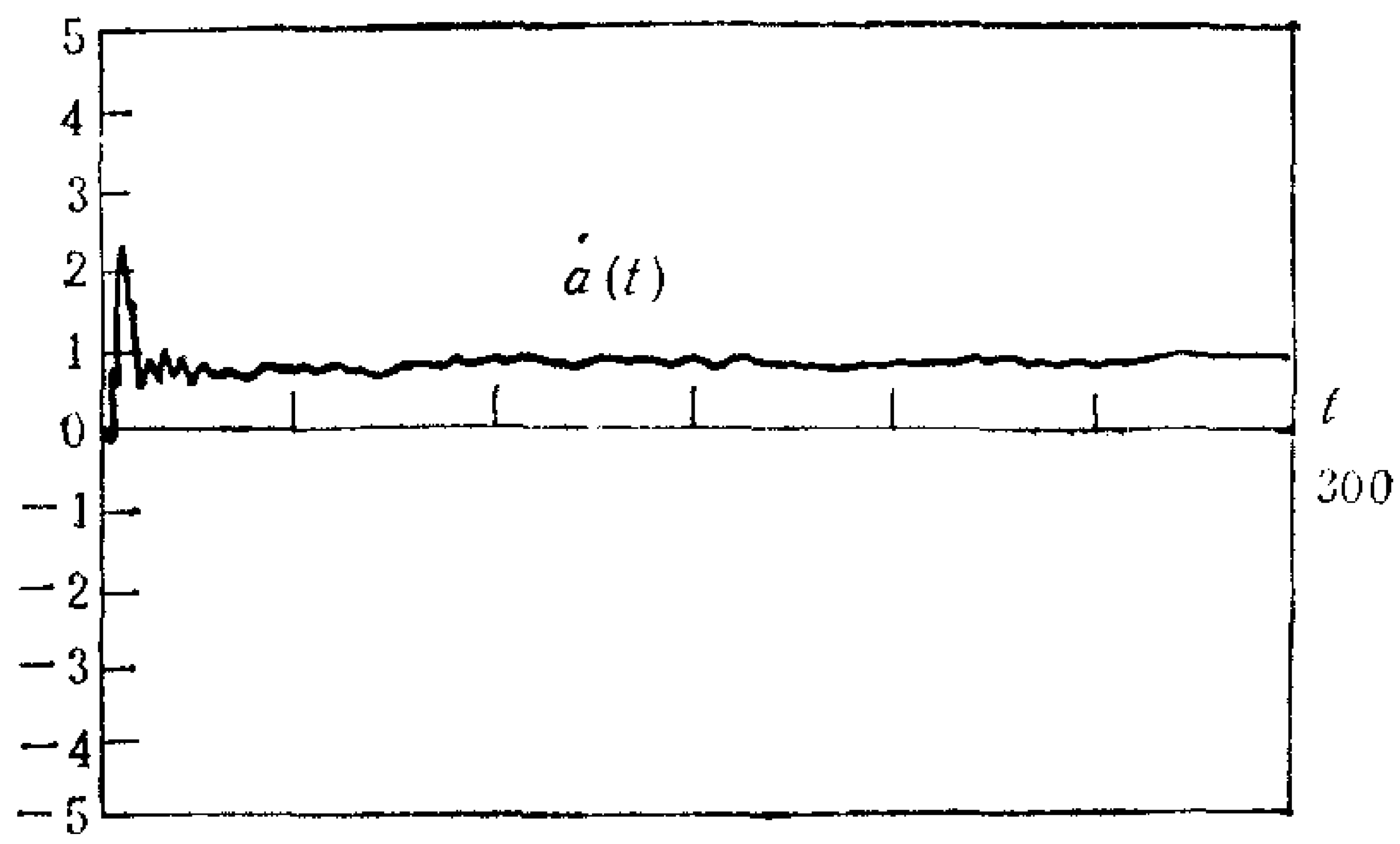

图 1　RELS 参数估值 $\hat{a}(t)$ 的收敛性

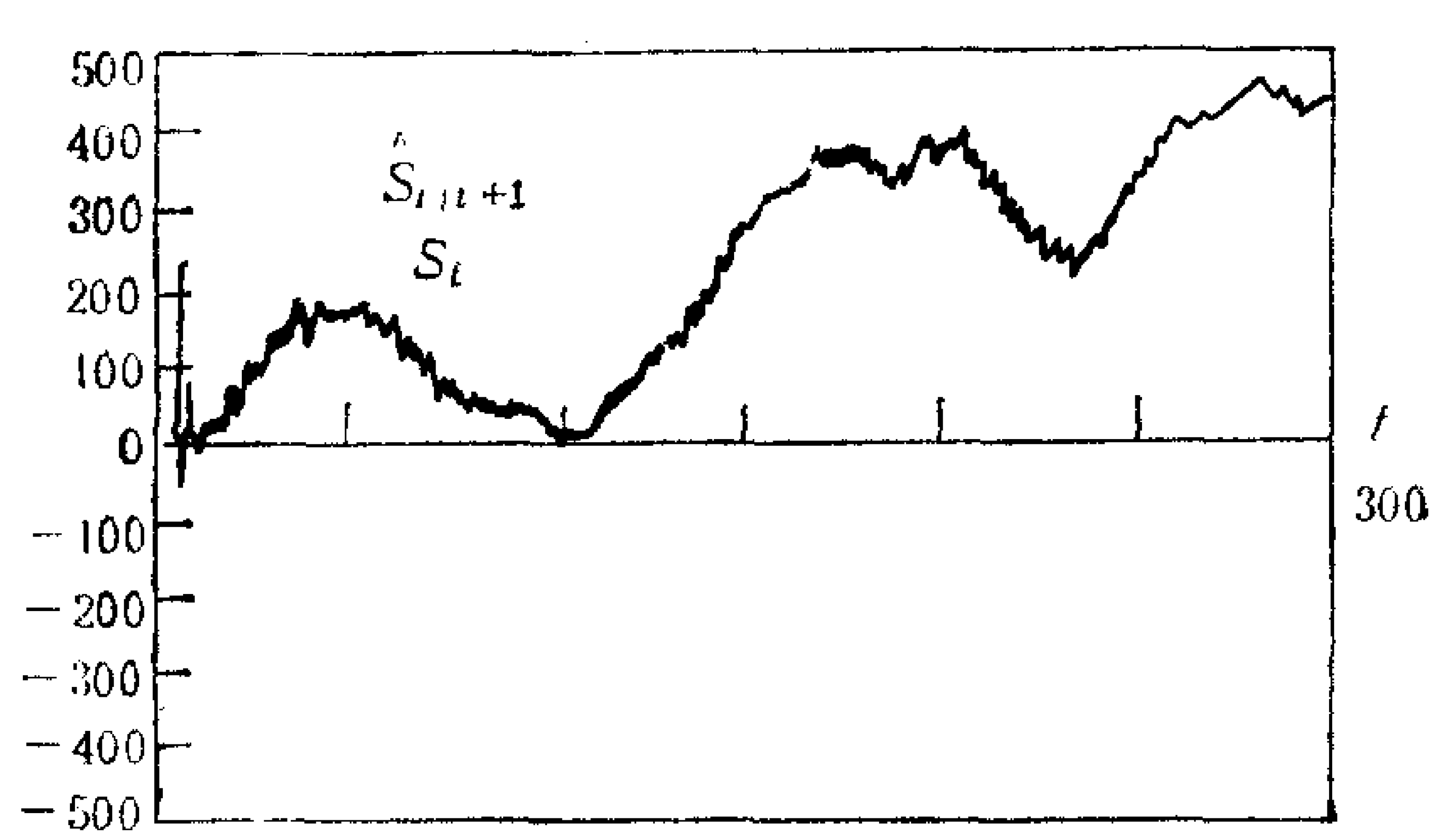

图 2　s_t 和自校正跟踪平滑器 $\hat{s}_{t|t+1}$

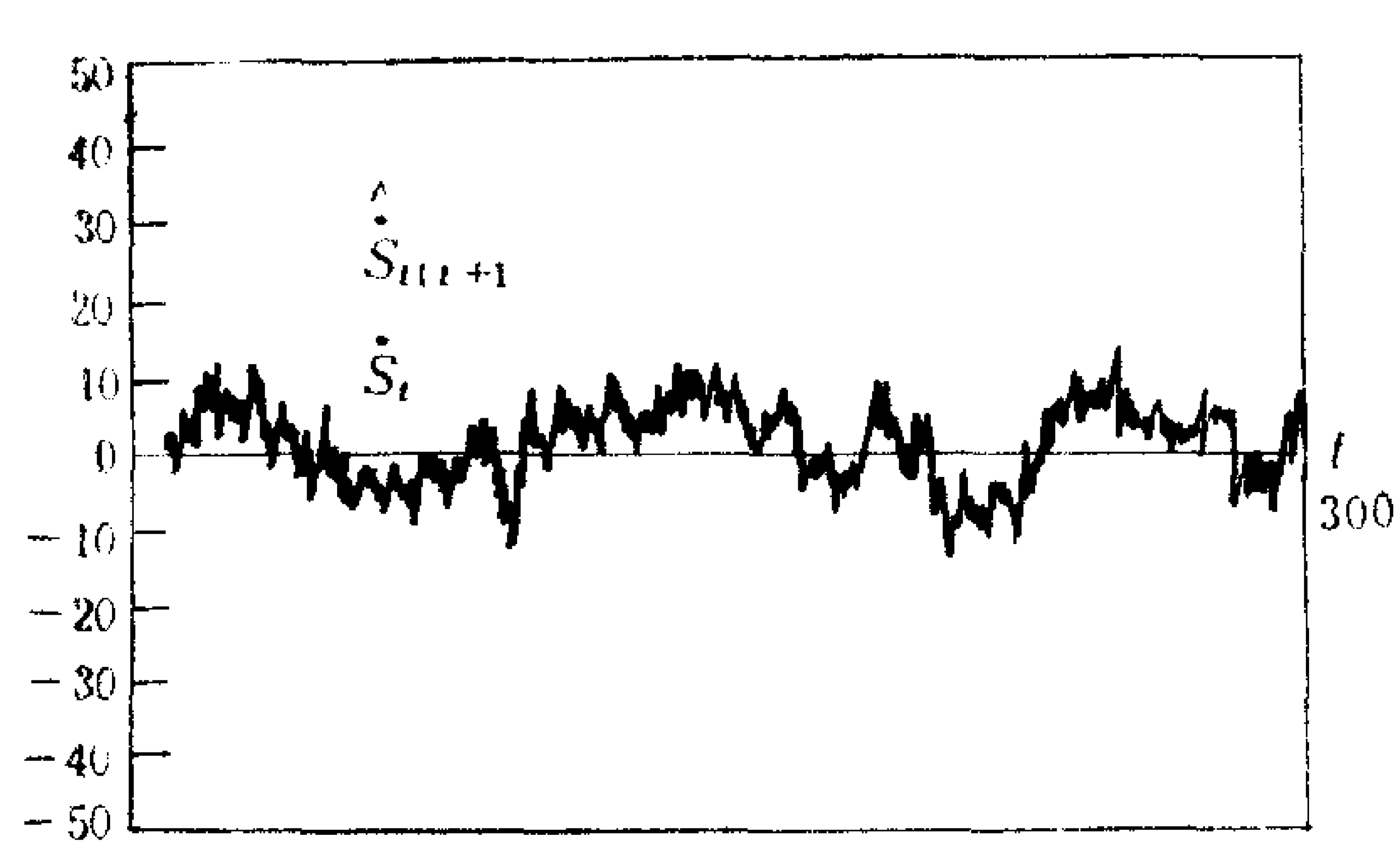

图 3　$\dot{s}_t$ 和自校正跟踪平滑器 $\hat{\dot{s}}_{t|t+1}$

参考文献

[1] Mendel JM. White noise estimators for seismic data processing in oil exproration, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1977, **AC**-22:694—706.

[2] 邓自立,郭一新. 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989.

[3] 邓自立,梁昌. 单输出系统最优自校正滤波新方法及其在跟踪系统中的应用. 信息与控制, 1993,22(2):83—90.

[4] 邓自立,梁昌. 一种新的自校正跟踪滤波器,控制与决策,1993,8(3): 166—169.

WHITE NOISE ESTIMATORS OF DYNAMIC SYSTEMS

DENG ZILI ZHOU LU LIU SHUJUN

(*Inst. of Applied Mathematics, Heilongjiang Univ. Harbin* 150080)

ABSTRACT

Using time series analysis, this paper presents an unified and general white noise estimators for single input-single output (SISO) systems, which include the input white noise estimators and observation white noise estimators, and can handle the correlated white noises with non-zero means, unstable and nonminimum phase systems. A simulation example of radar tracking system shows the usefulness and applicability of the results obtained in this paper.

Key words: White noise estimation, input white noise estimators, observation white noise estimators, single input-single output systems.